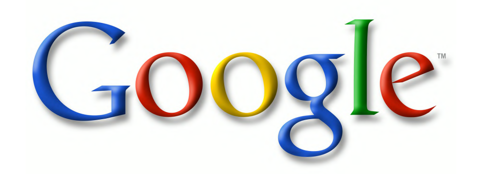


P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der ... ngen hin weit ... hlwollen zahl ... gleitetes Bem ... gleicher Unt ... nd Aus- land ... ernenden in V ... Verlags- ane ... rden mir desl ... enselben Geg ... nen sein.

... esonders auf ... nd Wien und ... gegebene Enc ... nerksam, die ... eometrie, die ... ie Astro- nom ... ophische und ... u obigen Bän

... d natur- wiss ... Mathe- ma ... chiv der Ma ... utschen Ma ... tik und Phy ... rwissen- sch

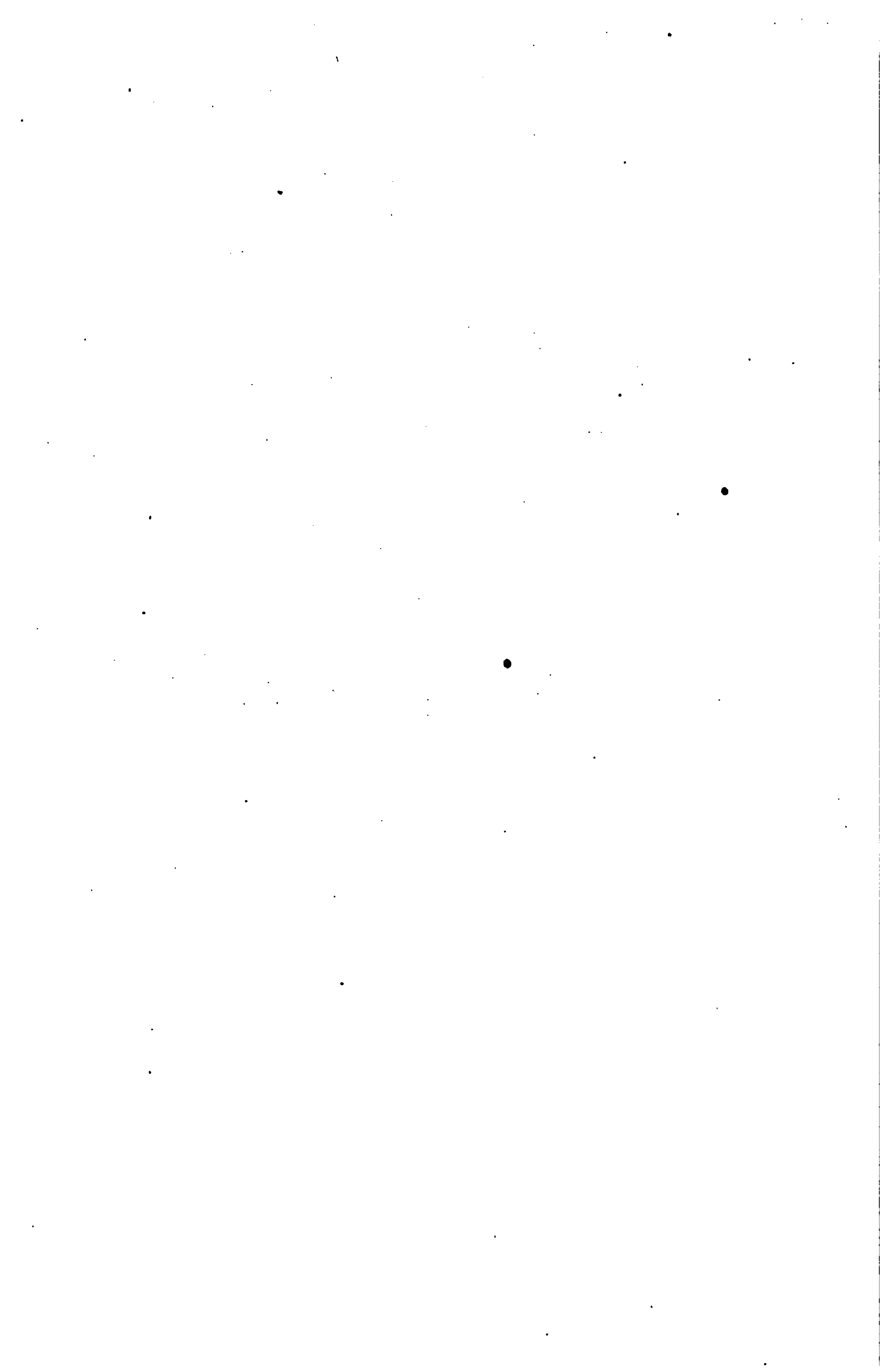
... : „Mit- teil ... ese „Mit- teil ... n In- als auc ... , welches mei ... n, unter der ... ngen des Teu ... das bis auf ... gedruckte Ver ... iete der **Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 95. Ausgabe [XXXVIII u. 140 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

LEIPZIG, Poststraße 3.

B. G. Teubner.







VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUGUST FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

IN VIER BÄNDEN

VIERTER BAND:

DYNAMIK

MIT 69 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1901

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Die Vorlesung über Dynamik bildet den Abschluss des Lehrgangs der technischen Mechanik an unserer Hochschule. Sie fällt in das vierte Studiensemester der Bau- und der Maschinen-Ingenieure. Bis zum Ende dieses Semesters müssen überhaupt die zur Vorbereitung auf die engeren Fachstudien bestimmten mathematisch-naturwissenschaftlichen Lehrfächer im Wesentlichen erledigt sein, um während der beiden folgenden Studienjahre vor Allem der Ausbildung nach der constructiven Seite hin vollständig freie Bahn zu lassen.

In einer dreistündigen Vorlesung während des gewöhnlich ohnehin nur recht kurzen Sommersemesters lässt sich freilich nicht alles vorbringen, was ich in den vorliegenden Band aufgenommen habe. Mehr als bei den anderen bin ich vielmehr bei diesem Bande über den durchschnittlichen Inhalt der von mir in Wirklichkeit abgehaltenen Vorlesungen hinausgegangen. Ich glaubte nämlich auf den zufälligen Umstand, dass für die Vorlesung über Dynamik an der hiesigen Hochschule weniger Zeit zur Verfügung steht, als für die übrigen Theile der technischen Mechanik, kein entscheidendes Gewicht bei der Abfassung des Buches legen zu sollen. Ich hielt es vielmehr für richtiger, den Band hinsichtlich des Umfangs und der Reichhaltigkeit des Stoffes mit den übrigen Bänden des Werkes auf ungefähr gleiche Stufe zu bringen. Der Inhalt des Bandes würde daher auch für eine vierstündige Wintervorlesung, wie sie der im dritten Bande behandelten Festigkeitslehre gewidmet ist, noch vollständig ausreichen. Er umfasst so ziemlich Alles,

was von der Dynamik meiner Meinung nach für die Ausbildung der Ingenieure überhaupt in Betracht kommen kann.

Die vorausgehenden Bemerkungen bitte ich übrigens nicht etwa als eine Klage darüber aufzufassen, dass mir für die Vorlesung über Dynamik nicht so viel Zeit zu Gebote steht, um den in diesem Bande behandelten Stoff vollständig bewältigen zu können. Die Ansprüche an die Leistungsfähigkeit der Studirenden der technischen Fächer sind so umfangreich und so hoch, dass sich der Vertreter des einzelnen Wissensgebietes mit dem bescheiden muss, was sich unter den gegebenen Verhältnissen erreichen lässt. Sobald aber eine solche Beschränkung geboten ist, kann kein Zweifel darüber bestehen, dass sie in erster Linie nach oben hin, also bei den schwierigeren oder verwickelteren Theilen der Theorie geübt werden muss, während die die Grundlage abgebenden einfacheren Lehren nicht darunter leiden dürfen.

Bei der Ausarbeitung des Buches durften dagegen jene Rücksichten, die zur Einschränkung der Vorlesungen selbst nöthigen, mehr in den Hintergrund gestellt werden. Wer das Buch nur in der Absicht gebraucht, das im Vortrag Gehörte noch einmal in Ruhe nachzulesen, kann die weitergehenden Ausführungen einfach überschlagen. Sobald er aber später im Laufe seiner Berufsthätigkeit Veranlassung findet, sich mit irgend einem dynamischen Probleme zu beschäftigen, dürfte er es mit Dank begrüssen, wenn er in dem ihm gewohnt gewordenen Lehrbuche auch über den engeren Kreis der ihm von früher her bekannten Dinge hinaus noch manchen Rath und manche Auskunft findet, die ihm von Nutzen werden können. Jedenfalls wird es ihm auf diese Art leichter fallen, sich zurecht zu finden, als wenn er genöthigt wäre, sich nach einem anderen Lehrbuche umzusehen, in dem er noch nicht heimisch geworden ist. — Im Uebrigen findet man über die Grundsätze, von denen ich mich bei der Auswahl des Stoffes leiten liess, in § 1 noch einige weitere Bemerkungen.

Die Frage der Ingenieur-Ausbildung wird heute immer noch lebhaft erörtert. Da die technische Mechanik — gleich

einigen verwandten Fächern — eine Mittelstellung zwischen den mathematisch-naturwissenschaftlichen und den constructiven Lehrfächern, um deren relative Werthschätzung es sich dabei handelt, einnimmt, kann sich ein Vertreter der Mechanik einer deutlich ausgesprochenen Stellungnahme in diesem Streite nicht wohl entziehen. Darum bin ich auch schon in den vorausgehenden Bänden auf diese Frage wiederholt eingegangen. Nachdem die Einrichtung eines Studienplans für „technische Physiker“ an unserer Hochschule neuerdings die Veranlassung abgegeben hat, den Streit von Neuem wieder anzufachen, möchte ich die Gelegenheit nicht vorüber gehen lassen, mich auch hierzu kurz zu äussern.

In manchen Kreisen der Grossindustrie besteht eine, sich dem Umfange nach freilich in bescheidenen Grenzen haltende Nachfrage nach solchen Technikern, deren Können vorwiegend auf dem Gebiete experimentell-physikalischer Untersuchungen in Verbindung mit der zu einer erfolgreichen Durchführung solcher Arbeiten erforderlichen theoretischen Ausbildung liegt. Der Bedarf an constructiv gut durchgebildeten Ingenieuren ist freilich weit grösser. Zur Zeit steht aber jener geringen Nachfrage ein noch geringeres Angebot gegenüber. Nun hat man sich zwar hie und da ganz gut damit zu helfen gewusst, für solche Arbeiten, die eine erheblich weitergehende physikalische Ausbildung voraussetzen, als sie im regelmässigen Studiengange eines Maschinen-Ingenieurs erworben werden kann, Physiker anzustellen, die aus den Universitäts-Laboratorien hervorgegangen sind. Es wird sich aber kaum bestreiten lassen, dass die technischen Hochschulen zur Ausbildung von Physikern, die ihr Arbeitsfeld in der Industrie suchen, besser geeignet sind, als die Universitäten. Aus dieser Erwägung sind die an der hiesigen Hochschule für das Studium der technischen Physik vorgesehenen Einrichtungen hervorgegangen.

Es kann kaum überraschen, wenn eine solche Neuerung anfänglich nach vielen Seiten hin auf Misstrauen oder auf Widerstand stösst. Ich denke aber, dass der gesunde Gedanke, auf dem sie beruht, sich bald Bahn brechen wird. Erinnert

man sich der ungewöhnlichen Erfolge der deutschen chemischen Industrie, die zum ganz wesentlichen Theile auf die Beschäftigung einer grossen Zahl von theoretisch sehr gründlich vorgebildeten Chemikern zurückzuführen sind, so kann man sich kaum der Vermuthung erwehren, dass auch die Verwendung von technischen Physikern in der Industrie, sobald solche nur in ausreichender Güte und in hinreichender Anzahl zur Verfügung stehen, noch ein weiteres Feld als heute vor sich haben dürfte. Als „Generalstabsofficiere der Technik“, wie sie gelegentlich genannt wurden, werden diese Physiker an sich freilich niemals gelten können. Wenn man bei dem militärischen Bilde stehen bleiben will, wird man sie vielmehr als die gleichgestellten Kameraden von einer andern Waffengattung anzusehen haben. Der Generalstab dagegen setzt sich aus besonders befähigten Officieren von allen Waffen zusammen; — wie ja überhaupt kein Zweifel darüber möglich ist, dass es weit mehr von den persönlichen Fähigkeiten eines Mannes, als von dem speciellen Bildungsgange abhängt, den er auf der Schule durchgemacht hat, ob er im Stande ist, die höchsten Ziele zu erreichen.

Der andere zur Ausbildung der vorerst wenigstens nur in geringer Zahl verlangten technischen Physiker vorgeschlagene Weg, nämlich jene absolvirten Maschineningenieure, die besondere Neigung und Befähigung dazu haben, zu einer Fortsetzung ihrer Studien nach der physikalischen Seite hin zu ermuthigen, ist nach mancher Richtung hin vielleicht noch besser, obschon er natürlich einen grösseren Aufwand von Zeit und Mitteln erfordert. Auch er steht Jedem, der ihn einschlagen will, an unserer Hochschule offen.

Dass ein „technischer Physiker“ meiner Meinung nach mit dem ganzen Inhalte dieses Buches und nicht nur mit jenem, freilich schon recht beträchtlichen Theile, der in der Vorlesung selbst behandelt wird, wohl vertraut sein sollte, möge hierbei ebenfalls Erwähnung finden.

München, im März 1899.

A. Föppl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Auch von diesem Bande meiner „Vorlesungen" hat sich schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit eine neue Auflage nöthig gemacht. Für die Neubearbeitung kamen mir manche Winke und Verbesserungsvorschläge zu Statten, die meist schon nach ihrer Herkunft sorgsame Beachtung erforderten. In der That sind auch die meisten der jetzt vorgenommenen Aenderungen und Zusätze auf solche Anregungen zurückzuführen. Ich erlaube mir, den Herren, von denen sie ausgingen, auch an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Gegen den Gebrauch, den ich in diesem und im ersten Bande der „Vorlesungen" vom Rechnen mit gerichteten Grössen gemacht habe, ist in manchen Besprechungen das Bedenken erhoben worden, dass die Benutzung des Buches dadurch für die damit noch nicht Vertrauten erschwert werde. Dabei ist aber meist zugleich anerkannt worden, dass — wie es in einer der beachtenswerthesten Besprechungen heisst — „eine Reihe der wichtigsten allgemeinen Sätze der Mechanik im Gewande der Vektoren eine Einfachheit und Verständlichkeit erlangt, wie sie nach der alten Methode nicht zu erreichen ist".

Mir scheint, dass mit einem solchen Zugeständnisse die Berechtigung meines Vorgehens schon anerkannt ist. Neue und bessere Darstellungen können nur dadurch festen Fuss fassen, dass sie in die für weite Leserkreise bestimmten Lehrbücher eingeführt werden. Freilich lässt sich bei allen Neuerungen solcher Art nicht vermeiden, dass sie anfänglich den an die ältere Darstellungsweise Gewöhnten gewisse Schwierigkeiten bereiten. Darum darf aber auf den Fortschritt der Wissenschaft nicht verzichtet werden.

Im Uebrigen glaube ich, dass selbst solche Leser, die grundsätzlich alle Stellen meines Werkes überschlagen, an denen mit Vektoren gerechnet wird, immer noch manchen

Nutzen daraus werden ziehen können. Das Werthvollste sind in allen Büchern über Mechanik meiner Ansicht nach nicht die Rechnungen, sondern das, was man aus den Büchern entnehmen kann, ohne die Ausrechnungen im Einzelnen zu verfolgen. Dass die Rechnungen richtig durchgeführt sind, darf man in der Regel getrost voraussetzen; viel wichtiger ist es, zu verfolgen, wie der Ansatz gemacht wird, welche Voraussetzungen dabei mitspielen und wie die Schlussergebnisse der Rechnung zu deuten sind. Die Verwendung der Vektoren zur Rechnung hat aber in dieser Hinsicht grade den Vortheil, dass der Umfang der Ausrechnung dadurch sehr vermindert wird, so dass man, wenn man will, den Rechnungsgang um so leichter überschlagen und den wesentlichen Inhalt der angestellten Ueberlegungen um so besser überblicken kann.

Der gute Absatz, den die Bücher seither schon gefunden haben, scheint mir auch zu beweisen, dass ich mich in der Erwartung nicht getäuscht habe, allen Ingenieuren, namentlich also auch den mit den neuen Methoden noch nicht Vertrauten, damit etwas bieten zu können.

München, im April 1901.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Dynamik des materiellen Punktes.

---

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

Der zweite und der dritte Band dieses Werkes und die darin wiedergegebenen Vorlesungen des dritten Studiensemesters beschäftigen sich fast ausschliesslich mit der Lehre vom Gleichgewichte der Körper. Nach der hierdurch herbeigeführten längeren Unterbrechung handelt es sich jetzt darum, die dynamischen Lehren des ersten Bandes von Neuem wieder aufzunehmen und sie in solchem Umfange zum Abschlusse zu bringen, wie er mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der studirenden Techniker geboten erscheint. Freilich kann es dabei, wie ich von vornherein bemerken möchte, nicht meine Absicht sein, den Gegenstand annähernd vollständig zu erschöpfen. Wichtigere statische Betrachtungen darf man in einem Lehrbuche der technischen Mechanik nicht wohl übergehen; dagegen muss man es als unabänderlich hinnehmen, dass sich der Vortrag in der Dynamik nur auf eine gewisse Auswahl der wichtigsten Untersuchungen erstrecken kann. Geboten wird diese Beschränkung einerseits durch den Mangel an Zeit, die auf eine weitere Vertiefung dieser Studien verwendet werden müsste, andererseits durch die Reichhaltigkeit des Stoffes, den die heutige Wissenschaft der Dynamik umfasst und zum Theile auch durch die Schwierigkeit mancher Betrachtungen. Es wird hiernach meine Aufgabe sein, das

Nöthigste und Wichtigste aus der Fülle des Vorhandenen auszuwählen und hierbei Sorge dafür zu tragen, dass womöglich nichts ausser Acht gelassen wird, was den Ingenieur in seinem Berufe wesentlich zu fördern vermag.

Dabei soll aber schon jetzt betont werden, dass eine solche Förderung nach zwei Richtungen hin stattfinden kann: ausser der unmittelbaren Anwendung der dynamischen Lehren in der späteren Berufsthätigkeit kommt nämlich auch die tiefere Einsicht in die Bewegungsvorgänge in Betracht, die durch solche Studien gewonnen werden kann und die oft wenigstens eine ungefähre Abschätzung ermöglicht, wenn eine genauere Untersuchung aus irgend welchen Gründen nicht durchführbar ist. In der That sind nämlich manche der hier vorzutragenden Lehren zur unmittelbaren Lösung von Aufgaben, wie sie in der technischen Praxis vorkommen, nur schwer oder kaum verwendbar. Hiernach allein darf man aber aus dem angeführten Grunde den Nutzen solcher Untersuchungen nicht bemessen. Ihr Fehlen würde eine später oft doch recht fühlbare Lücke lassen, wenn auch ihr Zusammenhang mit den Problemen der Praxis nicht so eng ist, als in anderen Fällen.

Ich möchte dies hier noch an zwei wichtigen Beispielen näher erläutern. So würde ich es nicht für zulässig halten, die Lehre von der Planetenbewegung in einem Vortrage über technische Mechanik ganz unbeachtet zu lassen, obschon man natürlich nicht die Absicht haben kann, dabei auf die Bedürfnisse zukünftiger Astronomen Rücksicht zu nehmen. Die von Newton für die Planetenbewegung gegebene Erklärung steht dagegen in so engem Zusammenhange mit dem mächtigen Fortschritte, den die allgemeine Mechanik durch die Arbeiten dieses grossen Mannes erfuhr, dass man kaum auf diese Betrachtungen verzichten kann, ohne das Eindringen in den Geist der Dynamik erheblich zu schädigen. Als zweites Beispiel führe ich die Lehre von der Bewegung eines sich selbst überlassenen oder des um einen festen Punkt drehbaren starren Körpers an. Hier ist die Beziehung zu vielen technischen Anwendungen weit enger. Dagegen werden die Betrachtungen in

diesem Falle meist so schwierig, dass genaue Rechnungen darüber eine weit über das gewöhnlich zu erreichende Maass hinausgehende Schulung erfordern. In einer allgemeinen Vorlesung über Mechanik an einer technischen Hochschule thut man hier wohl am besten daran, in möglichst anschaulicher Form die wichtigsten grundlegenden Betrachtungen und die aus diesen ableitbaren einfachsten Gesetze vorzubringen, ohne sich dabei als Ziel zu stecken, den Hörer bis zur völligen Beherrschung des ganzen Gebiets zu führen. Es muss hier vielmehr genügen, wenn die Mehrzahl der Hörer eine qualitativ zutreffende Vorstellung des Bewegungsvorgangs gewinnt, die sie gegen die grade bei dieser Frage noch recht häufigen und landläufigen gröbsten Irrthümer schützt. Dabei wird man mit Recht darauf hoffen dürfen, dass Einzelne, die solchen Untersuchungen ein lebhafteres Interesse entgegen bringen, durch den Vortrag zu einem weitergehenden selbständigen Studium der Frage angeregt und dazu auch genügend vorbereitet werden.

Aehnlich verhält es sich auch noch bei einigen anderen Beispielen. Immerhin war ich aber bei der Zusammenstellung des Vortrags sehr darauf bedacht, mir in der Heranziehung von Untersuchungen, die nicht in nächster Beziehung zu den in der technischen Praxis wirklich vorkommenden Aufgaben stehen, eine sorgfältige Beschränkung aufzuerlegen. Nur hierdurch konnte Zeit und Raum für das unumgänglich Nöthige gewonnen werden. Dem über diese Grenzen hinaus Strebenden ist ohnehin leicht Gelegenheit gegeben, seine Kenntniss der allgemeinen Dynamik später noch durch den Besuch einer Specialvorlesung über analytische Mechanik oder durch das Studium eines Specialwerkes, etwa des vor Kurzem in deutscher Uebersetzung erschienenen zweibändigen Werkes über Dynamik von Routh oder der Mechanik von Schell oder des Buches von Budde zu ergänzen.

Wegen der Anknüpfung an die Lehren des ersten Bandes dieser Vorlesungen wird es sich empfehlen, zunächst jene Sätze des früheren Vortrags zu bezeichnen, die ich in der Folge am häufigsten verwenden werde und von denen ich daher voraus-

setzen muss, dass sie dem Leser bereits völlig vertraut geworden sind.

In erster Linie steht hier das Trägheitsgesetz, das in der Form

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{P} = 0$$

angeschrieben werden kann, wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, $\mathfrak{P}$ die etwa an ihm angreifende äussere Kraft bedeutet. Hieran schliesst sich unmittelbar die dynamische Grundgleichung in einer der Formen

$$\mathfrak{P} = m\mathfrak{b} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2},$$

wobei m die Masse, $\mathfrak{s}$ die gerichtete Entfernung des materiellen Punktes von einem festen Anfangspunkte, $\mathfrak{b}$ die Beschleunigung ist. Bei Zerlegung in Componenten wird daraus

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dann kommt das Parallelogrammgesetz in der Form

$$\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P},$$

wenn $\mathfrak{R}$ die Resultirende der $\mathfrak{P}$ ist, das sich ebenfalls wieder in Componentengleichungen zerlegen lässt. Ferner sind zu erwähnen die wichtigen Begriffe der Arbeit A und des statischen Momentes $\mathfrak{M}$ einer Kraft

$$A = \mathfrak{P}\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = V\,\mathfrak{P}\mathfrak{r},$$

von denen A als das innere Produkt des Weges $\mathfrak{s}$ mit der Kraft $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ als das äussere Produkt aus Kraft und Hebelarm $\mathfrak{r}$ dargestellt wurde. Die eigentliche Bedeutung dieser Begriffe für die Mechanik liegt in der Gültigkeit der geometrischen Multiplikationssätze

$$\mathfrak{R}\mathfrak{s} = \Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad V\,\mathfrak{R}\mathfrak{r} = \Sigma V\,\mathfrak{P}\mathfrak{r}$$

unter der Voraussetzung $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$. Was früher über diese Produkte und die zugehörigen Multiplikationssätze auseinandergesetzt wurde, muss in diesem Bande überall als wohlbekannt vorausgesetzt werden.

Schliesslich erinnere ich noch an den Satz vom Antriebe und an den Satz von der lebendigen Kraft. Der erste folgte aus der dynamischen Grundgleichung durch eine Integration nach der Zeit in der Form

$$\int \mathfrak{P}\,dt = m\mathfrak{v} - m\mathfrak{v}_0$$

und der andere wird durch eine Verbindung der dynamischen Grundgleichung

$$\mathfrak{P} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

mit der Gleichung

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\,dt$$

gewonnen, indem nach Multiplikation beider Gleichungen mit einander

$$\mathfrak{P}\,d\mathfrak{s} = m\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = m\,d\frac{\mathfrak{v}^2}{2}$$

entsteht, woraus durch Integration

$$\int \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s} = \frac{m\mathfrak{v}^2}{2} - \frac{m\mathfrak{v}_0{}^2}{2}$$

oder, wenn $\mathfrak{s}$ gradlinig und $\mathfrak{P}$ constant ist,

$$\mathfrak{P}\mathfrak{s} = \frac{m\mathfrak{v}^2}{2} - \frac{m\mathfrak{v}_0{}^2}{2}$$

folgt. — Fürs Erste genügt es, diese Sätze in die Erinnerung zurückzurufen. Im zweiten Abschnitte treten dann noch die Lehre von der Bewegung des starren Körpers und der Kräftezusammensetzung an ihm und die Lehre vom Schwerpunkte hinzu.

§ 2. Der Flächensatz.

An allgemeiner Bedeutung und vielfacher Verwendbarkeit steht den vorher von Neuem angeführten Sätzen der Flächensatz, zu dessen Ableitung ich jetzt übergehen will, kaum nach. Er ist auch an sich einfach und leichtverständlich genug, so dass er recht wohl mit unter die ersten Elemente hätte aufgenommen werden können. Das ist aber nicht üblich und ich habe es ebenfalls nicht gethan, weil dieser Satz nur von beschränktem Nutzen für die Dynamik eines einzelnen materiellen Punktes ist und seine volle Bedeutung erst bei der Dynamik

der starren Körper und der Punkthaufen hervortritt, also bei Untersuchungen, die erst in diesem Bande ausführlicher dargestellt werden können. Dagegen muss ich den Satz jetzt schon in diesem Abschnitte, in dem er noch wenig Verwendung finden wird, zur Sprache bringen, um damit die späteren Untersuchungen hierüber auf eine feste Grundlage zu stellen.

Auch der Flächensatz geht aus einer einfachen Umformung der dynamischen Grundgleichung hervor und er reiht sich damit eng an die beiden vorher erwähnten Sätze vom Antriebe und von der lebendigen Kraft an. Man denke sich nämlich einen festen Anfangspunkt gewählt, von dem aus ein Radiusvektor $\mathfrak{r}$ nach dem bewegten materiellen Punkte gezogen wird. Dann ist $\mathfrak{r}$ mit der Zeit veränderlich und man hat für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Erfolgt nun die Bewegung des materiellen Punktes unter dem Einflusse der Kraft $\mathfrak{P}$, so ist nach der dynamischen Grundgleichung

$$\mathfrak{P} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung seien mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$, den wir in diesem Zusammenhange auch als einen Hebelarm bezeichnen können, auf äussere Art multiplicirt. Wir erhalten dann

$$V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = mV\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{r}. \tag{1}$$

Es bedarf jetzt nur noch einer kleinen Umformung der rechten Seite dieser Gleichung, um zum Flächensatze zu gelangen. Bildet man nämlich ausserdem das äussere Produkt aus $m\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$, also mit anderen Worten das statische Moment der Bewegungsgrösse und bestimmt dessen Aenderung in der Zeit, differentiirt es also nach t, so findet man

$$\frac{d}{dt}Vm\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = Vm\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\mathfrak{r} + Vm\mathfrak{v}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Für das letzte Glied auf der rechten Seite kann man aber wegen $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ auch

$$\mathrm{V} m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}$$

schreiben und dies wird zu Null, weil beide Faktoren des äusseren Produkts gleich gerichtet sind, also keine äusseren Componenten zu einander besitzen. Die verausgehende Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{d}{dt}\mathrm{V} m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathrm{V} m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \cdot \mathfrak{r} = m \mathrm{V} \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{r},$$

indem der richtungslose Faktor m auch vor das Zeichen V gestellt werden darf. Hiermit sind wir aber genau zu dem Ausdrucke gelangt, der auf der rechten Seite von Gl. (1) stand. Es ist damit bewiesen, dass man diese Gleichung auch durch die mit ihr identische

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{P}\mathfrak{r} = \frac{d}{dt}\mathrm{V} m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} \tag{2}$$

ersetzen kann und diese Gleichung spricht bereits den Flächensatz für den einzelnen materiellen Punkt in seiner allgemeinsten Form aus. Es ist auch leicht, die Formel in Worten wiederzugeben, denn die in der Gleichung vorkommenden Ausdrücke haben schon früher bestimmte Bezeichnungen erhalten. Links steht das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}$, die die Aenderung der Geschwindigkeit oder der Bewegungsgrösse $m\mathfrak{v}$ hervorbringt und rechts steht die zeitliche Aenderung des statischen Moments dieser Bewegungsgrösse, bezogen auf denselben Momentenpunkt. Während also nach der dynamischen Grundgleichung einfach die Kraft $\mathfrak{P}$ der zeitlichen Aenderung der Bewegungsgrösse gleich gesetzt wird, spricht der Flächensatz aus, dass eine solche Gleichung auch zwischen den statischen Momenten von beiden erfüllt ist. Man kann daher sagen, dass der Flächensatz aus der Verbindung der dynamischen Grundgleichung mit dem Momentenbegriffe hervorgeht.

Die ausführliche Bezeichnung „statisches Moment der Bewegungsgrösse“ für das äussere Produkt aus $m\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$, mit dem wir uns in der Folge noch sehr häufig zu befassen haben werden, ist freilich etwas schwerfällig. Um zu einer kürzeren Fassung zu gelangen, die sich an manchen Stellen als sehr erwünscht herausstellen wird, erlaube ich mir, dafür ausserdem

noch das Wort „Drall“ in Vorschlag zu bringen und es in dieser neuen Auflage des Buches öfters zu gebrauchen. Wem das Wort nicht gefällt, möge es sich überall durch die daneben auch noch beibehaltene umständlichere Bezeichnung „statisches Moment der Bewegungsgrösse“ ersetzt denken. Als ein statisches Moment bezieht sich der Drall immer auf einen bestimmten Momentenpunkt oder auf eine Momentenaxe. In den Formeln wird dafür, wie schon in der ersten Auflage des Buches, der Buchstabe $\mathfrak{B}$ (oder auch B) gebraucht werden. Mit diesen Festsetzungen lässt sich Gl. (2) auch in der Form

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathrm{V}\,\mathfrak{P}\mathfrak{r} \tag{2^a}$$

wiedergeben und in Worten dahin aussprechen, *dass für jeden Momentenpunkt die zeitliche Aenderung des Dralls gleich dem statischen Momente der Kraft ist.*

Die Wichtigkeit des Satzes lässt es erwünscht erscheinen, den Beweis, wenn auch mit einiger Abkürzung, noch einmal nach der Coordinatenmethode zu wiederholen, damit auch jene ein festeres Vertrauen zu ihm gewinnen können, die sich in das Rechnen mit gerichteten Grössen noch nicht hinreichend eingelebt haben. In der That ist zu diesem Zwecke nur nöthig, die vorigen Betrachtungen sinngemäss zu wiederholen, nachdem zuvor die dynamische Grundgleichung in ihre Componenten zerlegt ist. Man geht also aus von

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Als Momentenpunkt ist hier der Coordinatenursprung zu wählen. Man beachte nun, dass die X-Componente des statischen Moments der Kraft X, Y, Z oder, wie man auch sagen kann, das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf die X-Axe nach Gl. (52), Bd. I den Werth

$$M_1 = Yz - Zy$$

hat. Setzt man nun hier für Y und Z ihre Werthe aus der dynamischen Grundgleichung ein, so erhält man

$$Yz - Zy = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}z - \frac{d^2z}{dt^2}y\right).$$

Die rechte Seite ist aber, wie die Ausführung der Differentiation lehrt, gleichbedeutend mit

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}z - m\frac{dz}{dt}y\right)$$

und hiernach wird

$$Yz - Zy = \frac{d}{dt}(mv_2 z - mv_3 y), \tag{3}$$

wenn v_2, v_3 die betreffenden Componenten von $\mathfrak{v}$ sind. Diese Gleichung heisst in Worten: Das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für die X-Axe ist gleich der zeitlichen Aenderung des statischen Moments der Bewegungsgrösse für die gleiche Axe. Natürlich lässt sich für die beiden anderen Coordinatenaxen Gleiches nachweisen. Gl. (3) ist daher nur eine der Componentengleichungen, in die Gl. (2) jederzeit zerlegt werden kann. Die allgemeinere Fassung des Flächensatzes, die die oben angegebene als besonderen Fall mit enthält, lautet daher, wenn zugleich die neue Bezeichnung „Drall" dabei eingeführt wird:

Das statische Moment der einen materiellen Punkt beschleunigenden Kraft in Bezug auf einen beliebig gewählten Momentenpunkt oder auch in Bezug auf eine beliebig gewählte Momentenaxe ist gleich der zeitlichen Aenderung des Dralls für denselben Momentenpunkt oder für dieselbe Momentenaxe.

In etwas geänderter Form lässt sich der Flächensatz auch noch darstellen, wenn man Gl. (2) mit dt multiplicirt und hierauf integrirt. Man erhält dann

$$\int V\mathfrak{P}\mathfrak{r}\,dt = Vm\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} - Vm\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{r}_0, \tag{4}$$

oder in Worten: Das statische Moment des Antriebs der Kraft ist gleich der dadurch bewirkten Aenderung des statischen Moments der Bewegungsgrösse, wobei die Wahl des Momentenpunkts oder der Momentenaxe wiederum freisteht. Bei dieser Fassung des Satzes ist freilich zu beachten, dass der Hebelarm $\mathfrak{r}$, der zu einem Elementarantriebe $\mathfrak{P}dt$ gehört, nicht während der ganzen Dauer des Vorgangs con-

stant ist und dass daher das statische Moment des Antriebs nicht dadurch berechnet werden kann, dass man den ganzen Antrieb mit einem Hebelarme multiplicirt, sondern dass dieses Moment nur aus der Summe der Momente der Elementarantriebe berechnet werden kann. Wenn freilich die beschleunigende Kraft $\mathfrak{P}$ nur während einer sehr kurzen Zeitdauer einwirkt, in der keine merkliche Verschiebung des materiellen Punktes zu Stande kommt, wie bei den Stossvorgängen, lässt sich Gl. (4) auch in der einfacheren Form

$$V\int \mathfrak{P} dt \cdot \mathfrak{r} = V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} - V m \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{r} \tag{5}$$

anschreiben, die aber gegenüber dem Satze vom Antriebe kaum etwas Neues lehrt, da sie aus diesem durch äussere Multiplication aller Glieder mit demselben Hebelarme $\mathfrak{r}$ hervorgeht.

Ich habe bisher noch nicht erklärt, woher die Bezeichnung des Flächensatzes stammt, denn nach dem, was bis jetzt darüber vorgetragen wurde, würde es viel näher liegen, ihn den Satz von den statischen Momenten der Bewegungsgrössen oder auch den Satz vom Dralle zu nennen. In der That ist diese Bezeichnung eigentlich die zutreffendere, denn die Bezeichnung des Flächensatzes rührt nur von einer speciellen Anwendung des Satzes her und ich muss auch hinzufügen, dass viele Schriftsteller unter dem Flächensatze grade nur diese specielle Anwendung und nicht die vorher abgeleitete allgemeine Aussage verstehen. Ein so ungemein wichtiger Satz, wie der, um den es sich hier handelt, muss aber eine kurze Bezeichnung erhalten, die nicht wie die vorher erwähnte, eine Umschreibung der gesammten Aussage des Satzes zu geben sucht, sondern von der es vollständig genügt, wenn sie nur an irgend eine kennzeichnende Eigenschaft des Satzes kurz erinnert. Desshalb gebrauche ich die Bezeichnung Flächensatz für die allgemeinste Aussage des Satzes ebenso, wie für den besonderen Fall, in dem er in der That zur Betrachtung von Flächen führt.

Der besondere Fall, von dem ich hier sprach, tritt ein, wenn das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ zu Null wird, sei es

nun, weil $\mathfrak{P}$ selbst verschwindet, sei es, weil die Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ fortwährend durch den Momentenpunkt geht. Unter dieser Voraussetzung folgt aus Gl. (2)

$$V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C}, \tag{6}$$

worin $\mathfrak{C}$ eine constante gerichtete Grösse, nämlich den anfänglichen Werth des Dralls bedeutet. Gl. (6) spricht zunächst aus, dass die Bewegung im vorliegenden Falle in einer Ebene erfolgt, nämlich in jener Ebene, die rechtwinklig zu $\mathfrak{C}$ durch den Momentenpunkt gezogen ist, wie aus der Definition des statischen Momentes von $\mathfrak{v}$ oder $m\mathfrak{v}$ hervorgeht. Ferner hat das statische Moment von $\mathfrak{v}$ (auf den constanten Faktor m in Gl. (6) kommt es hier nicht weiter an) nach dieser Gleichung auch stets denselben Absolutwerth. Früher habe ich aber auseinandergesetzt, dass der Absolutwerth eines statischen Moments durch die Fläche eines Momentendreiecks zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also an verschiedenen Stellen der Bahn die an diesen eintretenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ in irgend einem Maassstabe nach Grösse und Richtung aufgetragen, so sind die Dreiecke, die diese Strecken als Grundlinien und den Momentenpunkt zur Spitze haben, alle inhaltsgleich. Einfacher wird diese Betrachtung noch, wenn man Gl. (6) nach Division mit m mit dt multiplicirt, so dass

$$V \mathfrak{v} dt \cdot \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{C}}{m} dt \tag{7}$$

entsteht. Unter dt möge dabei eine unendlich kleine Zeitdauer verstanden werden, die ein für alle Mal während der ganzen Betrachtung denselben bestimmt gewählten Werth behält. Dann ist $\mathfrak{v} dt$ der Weg $d\mathfrak{s}$, der während dt zurückgelegt wird und das statische Moment dieses Weges ist ohne Weiteres gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks, dessen Grundlinie $d\mathfrak{s}$ und dessen Spitze der Momentenpunkt ist. Die Gleichung sagt hiernach aus, dass zu gleichen dt während des ganzen Bewegungsvorgangs gleiche Dreiecksflächen gehören.

Der grösseren Deutlichkeit wegen möge dies auch noch in einer Zeichnung zum Ausdrucke gebracht werden, wobei

freilich die unendlich kleinen Wege $d\mathfrak{s}$ durch endliche Strecken angedeutet werden müssen. In Abb. 1 ist vorausgesetzt, dass $\mathfrak{P} = 0$ ist. In diesem Falle bewegt sich der materielle Punkt in einer graden Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Alle $d\mathfrak{s}$, die zu gleichen dt an verschiedenen Stellen der Bahn gehören, sind einander gleich und daraus folgt auch schon aus einfachen planimetrischen Sätzen die Gleichheit der durch Schraffirung hervorgehobenen Dreiecke. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig. — In Abb. 2 ist dagegen angenommen, dass die Kraft $\mathfrak{P}$ nicht verschwindet, dass vielmehr der materielle Punkt eine gekrümmte Bahn durchläuft, dass aber die Kraft $\mathfrak{P}$, wie es die besondere Voraussetzung verlangt, von der wir bei diesen Betrachtungen ausgingen, stets durch den Momentenpunkt O geht. In diesem Falle sind die zu gleichen Zeiten dt gehörigen Wege $d\mathfrak{s}$ an verschiedenen Stellen der Bahn verschieden gross. Dagegen sind auch hier nach Gl. (7) alle Dreiecke, die man von O aus über den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ errichten kann, von gleichem Flächeninhalte.

Abb. 1.

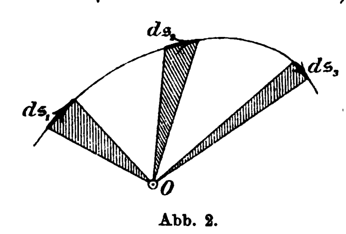


Abb. 2.

Der durch Abb. 1 erläuterte Fall hat kein weiteres Interesse; der Flächensatz wird bei ihm, wie man sagt, trivial. Anders ist es aber mit dem durch Abb. 2 dargestellten Falle, der für viele Betrachtungen von besonderer Bedeutung ist. Eine Bewegung von der hier in Frage kommenden Art wird als eine Centralbewegung bezeichnet. Dabei wird der zum Momentenpunkte gewählte Punkt O in diesem Falle auch das Centrum der Bewegung genannt, weil die am bewegten Punkte wirkende Kraft nach Voraussetzung stets durch O geht und daher auch als von O ausgehend angesehen werden kann.

Besonders hervorzuheben ist übrigens in diesem Zusammen-

hange, dass alle zu den verschiedenen $d\mathfrak{s}$ gehörigen Dreiecksflächen auch umgekehrt nur dann unter sich gleich sein können, wenn das Moment von $\mathfrak{P}$ verschwindet, wie aus der allgemeineren Gl. (2) oder (2ᵃ) sofort geschlossen werden kann. Wenn also die Bewegung eines materiellen Punktes (z. B. eines Himmelskörpers) betrachtet wird und es zeigt sich, dass sie erstens in einer Ebene erfolgt und dass zweitens die zu gleichen Zeittheilchen dt gehörigen und von irgend einem Punkte O aus gezogenen Dreiecke gleiche Flächen haben, so folgt daraus mit Nothwendigkeit, dass an dem bewegten materiellen Punkte eine Kraft angreift, die stets durch O hindurchgeht, und von der wir daher auch sagen können, dass sie von O ausgeht. In der That kann nur auf Grund solcher Anwendungen des Flächensatzes z. B. behauptet werden, dass die Erde bei ihrer Planetenbewegung von der Sonne angezogen wird, denn wir besitzen kein anderes Mittel, die physikalische Existenz dieser Kraft zu erkennen, als die Beobachtung der thatsächlich im Sonnensystem vor sich gehenden Bewegungen.

Für die in den Abb. 1 und 2 schraffirten Dreiecke kann man übrigens noch eine andere sehr treffende Bezeichnung einführen. Die Flächen dieser Dreiecke werden nämlich von dem Radiusvektor, der vom Momentenpunkte O aus nach dem bewegten Punkte gezogen ist, während der Bewegung vollständig bestrichen. Man kann daher den Satz auch in der Form aussprechen:

Bei der Centralbewegung beschreibt der vom Anziehungscentrum nach dem bewegten materiellen Punkte gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Umgekehrt kann jede ebene Bewegung als eine Centralbewegung aufgefasst werden, wenn man in der Bewegungsebene einen Punkt so anzugeben vermag, dass die von ihm gezogenen Radienvektoren in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben. Jener Punkt ist dann das Anziehungs- (oder Abstossungs-) Centrum.

Bei der Aussage dieser Sätze ist nur von gleichen Zeiten

die Rede, ohne dass wie vorher die Beschränkung hinzugefügt wurde, dass diese Zeiten unendlich klein sein sollten. Man sieht nämlich leicht ein, dass die Uebertragung auf endliche Zeiten ohne Weiteres möglich ist. Versteht man unter n eine sehr grosse Zahl, sodass das Produkt ndt einen endlichen Werth erlangt, so werden n Elementardreiecke, die alle von gleicher Grösse sind, während dieser Zeit ndt beschrieben. Alle diese Dreiecke bilden zusammen genommen einen Sektor mit dem Centrum O, der zu dem vom bewegten Punkte inzwischen durchlaufenen Bogen gehört. Daraus folgt, dass auch irgend zwei Sektoren denselben Inhalt haben, falls sie nur gleich viel Elementardreiecke enthalten, d. h. falls sie zu gleichen Zeiten ndt gehören.

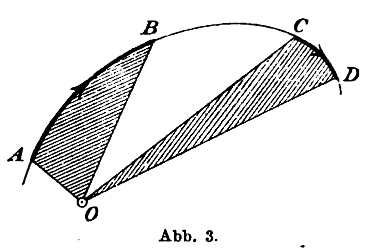


Abb. 3.

Umgekehrt vermag man bei einer Centralbewegung, die etwa die in Abb. 3 angegebene Bahn $ABCD$ durchläuft, sofort zu sagen, dass die zum Durchlaufen von AB erforderliche Zeit ebenso gross ist, als die zu CD gehörige, wenn man weiss, dass die Sektoren AOB und COD gleichen Inhalt haben. Es folgt daraus z. B. sofort, dass sich die Erde in ihrer Planetenbewegung um die Sonne am langsamsten bewegt, wenn sie den grössten Abstand von der Sonne hat, im sogenannten Aphel, und am schnellsten im Perihel, d. h., wenn sie der Sonne am nächsten steht.

Man kann schliesslich noch einen anderen, sehr bezeichnenden Ausdruck für diese Gesetzmässigkeiten wählen, indem man den Begriff der Sektorengeschwindigkeit einführt. Man versteht darunter die Fläche des Sektors, den der vom Bewegungscentrum O gezogene Radiusvektor während der Zeiteinheit überstreicht. Die Aussage des Flächensatzes lautet dann in unserem Falle einfach: Die Sektorengeschwindigkeit ist bei der Centralbewegung constant.

In allen jetzt besprochenen Fällen ist die Bezeichnung „Flächensatz“ offenbar sehr gut gewählt; ich erinnere aber

nochmals daran, dass in der Folge auch der allgemeinere Satz unter dieser Bezeichnung verstanden werden soll, der angiebt, wie sich das statische Moment der Bewegungsgrösse oder mit anderen Worten, wie sich die Sektorengeschwindigkeit oder die in der Zeiteinheit überstrichene Fläche ändert, wenn das statische Moment der äusseren Kraft für den gewählten Momentenpunkt von Null verschieden ist.

§ 3. Das Potential.

Der Begriff des Potentials, zu dessen Erläuterung ich jetzt übergehe, ist zuerst in der Mechanik der Himmelskörper eingeführt worden, um die Untersuchungen über gravitirende Massen zu erleichtern. Später wurde dieser Begriff auch auf andere Gebiete, namentlich auf die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus übertragen. Gerade hier hat er sich so nützlich erwiesen, dass er aus den höheren Theorien, in denen er ursprünglich allein vorkam, allmählich bis in die elementarsten Darstellungen übergegangen ist. Ueber einen aus der Mechanik hervorgegangenen Begriff, der sich auf ein so weit umfassendes Anwendungsgebiet zu erstrecken vermochte, kann ein Lehrbuch der Mechanik nicht allzu flüchtig hinweggehen, wenn auch die unmittelbaren Anwendungen, die hier davon gemacht werden sollen, nicht gerade sehr zahlreich sind.

Das Potential wird zur Untersuchung von Kraftfeldern verwendet. Man stelle sich etwa vor, dass irgendwelche Massen in beliebiger Vertheilung über den Raum gegeben seien, von denen Kräfte nach irgend einem bekannten und der Zeit nach constanten Gesetze auf einen sich in diesem Raume bewegenden materiellen Punkt übertragen werden. Das einfachste Beispiel ist, wie schon erwähnt, das Gravitationsproblem, bei dem diese Massen den bewegten Punkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Das ganze Gebiet, innerhalb dessen sich die Wirkung dieser Massen noch bemerklich macht, wird das Kraftfeld genannt. In dem genannten Beispiele kann die Kraft in jedem Punkte des Feldes als die Resultirende von Elementarkräften angesehen werden, die von den einzelnen Massenelementen aus-

gehen und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind. Solche Kräfte, die im Einzelnen von festen Anziehungs- oder Abstossungscentren ausgehen und als Functionen des Abstandes gegeben sind, bezeichnet man in diesem Zusammenhange ganz allgemein als Centralkräfte.

Das Gravitationsproblem sollte übrigens hier nur als ein besonderes Beispiel angeführt werden, während wir es jetzt weiterhin ganz dahingestellt sein lassen wollen, auf welche Weise das Kraftfeld, dessen allgemeine Eigenschaften wir zu untersuchen beabsichtigen, in Wirklichkeit zu Stande kommt. Vor allem sei nun darauf hingewiesen, dass der Potentialbegriff nicht bei allen beliebig gegebenen Kraftfeldern verwendbar ist oder dass, wie man sich ausdrückt, nicht alle Kraftfelder ein Potential zulassen, oder nach einer anderen Ausdrucksweise, dass nicht alle aus einem Potentiale abgeleitet werden können. Dieser Umstand giebt den wichtigsten Eintheilungsgrund für die verschiedenen Kraftfelder ab, mit denen man sich in der theoretischen Physik zu befassen hat. Jene, die ein Potential zulassen, werden hiernach als wirbelfreie von den übrigen unterschieden, die man im Gegensatze dazu als Wirbelfelder bezeichnet.

Das allgemeine Kennzeichen dafür, dass ein Kraftfeld innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, besteht darin, dass für jede geschlossene Curve, die man innerhalb dieses Bezirks ziehen mag, das über sie erstreckte Linienintegral der Kraft des Feldes gleich Null ist, oder in Zeichen

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, dass man sich einen beweglichen Punkt längs der ganzen Curve herumgeführt denkt und für jedes Wegeelement $d\mathfrak{s}$, das er hierbei beschreibt, das innere Produkt aus diesem Wege und der dort auftretenden Kraft $\mathfrak{P}$ des Feldes berechnet, worauf die Summirung über alle Linienelemente der ganzen Curve zu erstrecken ist. Nun ist aber $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nichts anderes, als die von der Kraft des Feldes bei der gedachten Bewegung geleistete Arbeit. Gl. (8) lässt

sich daher auch dahin aussprechen, dass für das wirbelfreie Kraftfeld die algebraische Summe der an dem bewegten Punkte geleisteten Arbeiten für jede geschlossene Curve zu Null wird.

Wenn $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ von Null verschieden und etwa positiv wäre, könnte man dadurch, dass man die betreffende Bahn wiederholt von dem bewegten Punkte in dem constanten Kraftfelde durchlaufen liesse, beliebig grosse Arbeitsmengen gewinnen, d. h. man wäre im Besitze eines Perpetuum mobile. Wäre $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ negativ, so brauchte man nur den Umlaufssinn entgegengesetzt zu wählen, womit sich die Vorzeichen aller Arbeiten $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ umkehrten und man hätte dann ebenfalls ein Perpetuum mobile vor sich.

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie könnte es hiernach scheinen, als wenn solche Kraftfelder überhaupt physikalisch unmöglich wären. In der That hat man diesen Schluss früher zuweilen gezogen; er wird aber hinfällig, wenn man bedenkt, dass die an dem bewegten Punkte gewonnene Arbeit recht wohl durch eine Energiezufuhr von anderer, nicht mechanischer Form aufgewogen werden kann. Das schlagendste Beispiel dafür ist ein gewöhnlicher electrodynamischer Motor. Wir sehen, wie sich der Anker einer als Motor betriebenen Dynamomaschine fortwährend umdreht und dabei Arbeit nach aussen abgiebt, während das Kraftfeld, in dem er rotirt, constant bleibt. Wenn man sich hier ausschliesslich auf den Boden der Mechanik stellen und die elektromagnetischen Energieströme, die daneben herlaufen, ausser Acht lassen wollte, hätte man in der That ein Perpetuum mobile mit allen mechanischen Eigenschaften vor sich, wie sie die alten Erfinder von einem solchen erwarteten. Wir wissen nun zwar, dass das Gesetz von der Erhaltung der Energie oder von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile im neueren Sinne hierdurch nicht umgestossen wird; aber wir müssen doch diesem Beispiele die Lehre entnehmen, dass in der That Kraftfelder vorkommen, für die $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ nicht gleich Null ist, die also nicht als wirbelfreie zu bezeichnen sind.

Dagegen lässt sich zeigen, dass alle Kraftfelder, die auf Centralkräfte zurückgeführt werden können, im ganzen Raume wirbelfrei sind. Um dies zu beweisen, nehme man zunächst an, dass nur ein einziges Anziehungscentrum vorhanden sei. Wir denken uns um dieses Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Halbmesser beschrieben. Solange sich der angezogene Punkt nur auf der Oberfläche dieser Kugel bewegt, ist die von der Kraft $\mathfrak{P}$ des Feldes geleistete Arbeit stets gleich Null, denn $\mathfrak{P}$ fällt in jedem Augenblicke in die Richtung des Radius und steht daher senkrecht zu jedem Wege, den der bewegte Punkt auf der Kugelfläche beschreiben mag. Lässt man dagegen den Punkt auf eine concentrische Kugelfläche übertreten, deren Halbmesser etwa um dr grösser ist, so ist die von $\mathfrak{P}$ geleistete Arbeit gleich $-Pdr$, wie auch der Uebergang gewählt werden möge, denn von dem beschriebenen Wege kommt immer nur die Projektion dr auf die Richtung des Radius in Betracht. Daraus folgt, dass auch immer dieselbe Arbeit geleistet wird, wenn man den bewegten Punkt von dem Abstande r_1 zum Abstande r_2 vom Anziehungscentrum überführt, ohne Rücksicht auf den Weg, der hierbei im Uebrigen eingeschlagen wird. Für einen Weg, der wieder zum Ausgangspunkte zurückführt, hebt sich hiernach die Summe aller $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ hinweg. — Dies gilt zunächst für ein einzelnes Anziehungscentrum. Hat man beliebig viele Kraftcentren, so beachte man, dass sich $\mathfrak{P}$ als die Resultirende aller von diesen ausgehenden Elementarkräfte auffassen lässt und dass die Arbeit der Resultirenden bei jeder beliebigen Bewegung gleich der algebraischen Summe aller Einzelarbeiten ist. Hiernach zerfällt $\int \mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ in ebenso viele Glieder als Kraftcentren vorhanden sind und jedes dieser Glieder ist nach dem vorhergehenden Beweise für sich gleich Null. Wir können hiernach in der That allgemein behaupten, dass alle Kraftfelder wirbelfrei sind, die aus Centralkräften zusammengesetzt sind und dass es ein ganz vergebliches, früher freilich oft versuchtes Bemühen ist, solche nicht wirbelfreie Kraftfelder, wie das, in dem z. B. der Anker einer Dynamomaschine rotirt, auf Centralkräfte zurückzuführen.

Weiterhin möge nun angenommen werden, dass das Kraftfeld in der That wenigstens innerhalb eines gewissen Bezirks wirbelfrei ist, während es ausserhalb dieses Bezirks immer noch ein Wirbelfeld sein könnte. Ganz allgemein folgt dann aus Gl. (8), dass die Arbeit, die von der Kraft des Feldes geleistet wird, wenn der bewegliche Punkt von einem Punkte O nach einem Punkte A des Bezirks verschoben wird, unabhängig von dem dabei durchlaufenen Wege ist (falls dieser nur ganz innerhalb des Bezirkes selbst liegt).

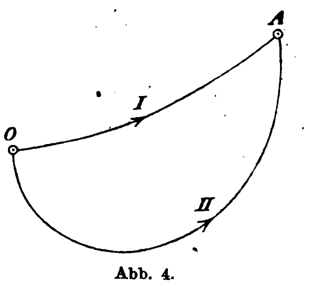


Abb. 4.

Denkt man sich nämlich etwa den Weg I in Abb. 4 im Sinne von O nach A und hierauf den Weg II im umgekehrten Sinne durchlaufen, so entsteht eine geschlossene Curve, für die nach Gl. (8)

$$\overline{\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,I} + \overline{\int_A^O \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II} = 0$$

ist. Die Umkehrung des Bewegungssinnes hat einen Wechsel im Vorzeichen der Arbeitsbeträge zur Folge; hiernach ist

$$\overline{\int_A^O \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II} = -\overline{\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt, folgt in der That

$$\overline{\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,I} = \overline{\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}^{\,II}, \tag{9}$$

was zu beweisen war. Es ist hiernach entbehrlich, den Integrationsweg durch ein besonderes Kennzeichen hervorzuheben, wie es in diesen Formeln geschehen war; im wirbelfreien Kraftfelde hat vielmehr schon der unbestimmter gelassene Ausdruck

$$\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}$$

einen eindeutigen Werth. Der durch ihn angegebene Arbeitsbetrag heisst der **Potentialunterschied** zwischen den Punkten O und A. Hierbei muss ich noch erwähnen, dass keine allgemeine Uebereinstimmung über die Wahl des Vorzeichens dieser Grösse besteht. Um deutlicher hervortreten zu lassen, wie dies zu verstehen ist, gehe ich sofort zu den Potentialen selbst über. Ich definire hiernach das Potential V_A im Punkte A durch die Gleichung

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}. \tag{10}$$

Hierin ist V_O das Potential im Anfangspunkte O, dem man sich einen beliebigen Werth gegeben denken mag. Bis auf die Constante V_O, die willkürlich bleibt, ist hiermit jedem Punkte A des Bezirks ein eindeutig bestimmter Werth, den man das Potential nennt, zugeordnet. Manche Schriftsteller wählen nun anstatt des vor dem Linienintegrale stehenden Minuszeichens ein Pluszeichen und definiren damit eine von der vorigen abweichende Grösse, die ebenfalls als Potential oder Potentialfunction oder auch als Kräftefunction von ihnen bezeichnet wird. Sehr erheblich ist der Unterschied zwar nicht; immerhin hat aber die Vorzeichenwahl, der ich mich angeschlossen habe, einen nicht unerheblichen Vorzug vor der entgegengesetzten. Die Grösse

$$-\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}$$

giebt nämlich den Arbeitsbetrag an, der von aussen her (durch eine der Feldkraft entgegengesetzte Kraft $-\mathfrak{P}$) aufgewendet werden muss, um den beweglichen materiellen Punkt entgegen der Kraft des Feldes von O nach A zu verschieben oder auch, wenn das Vorzeichen des Ausdruckes nach der vollständigen Ausrechnung negativ bleibt, den Arbeitsbetrag, der nach aussen hin während der Bewegung abgegeben werden kann. Hiernach wird V_A kleiner als V_O, wenn bei der Lagenänderung Energie nach aussen hin abgegeben, die Energie des Feldes selbst also

— falls Energieströme von nicht mechanischer Art ausgeschlossen sind — vermindert wird. Nach unserer Wahl des Vorzeichens kann hiernach unter der Voraussetzung, dass die Constante V_O den Einzelbedingungen des besonderen Falles entsprechend gewählt wird, die Grösse V_A selbst geradezu als das Maass der potentiellen Energie des Feldes angesehen werden, die dadurch bedingt wird, dass sich der bewegte materielle Punkt gerade im Punkte A des Feldes befindet. Die Bezeichnung Potential stellt sich hiernach als eine Abkürzung für die Bezeichnung potentielle Energie heraus.

Durch Umkehrung der Integrationsgrenzen lässt sich übrigens ohne Aenderung der hiermit getroffenen Vereinbarung auch ein positives Vorzeichen in Gl. (10) einführen, denn die Gleichung

$$V_A = V_O + \int_A^O \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}$$

ist offenbar mit der früheren identisch.

Der Vortheil, den man mit der Einführung des Potentials in die Untersuchung der Kraftfelder erzielt, besteht darin, dass das Potential als ein Energiebetrag eine Grösse ohne Richtung ist. Mit diesen richtungslosen Grössen lässt sich leichter rechnen, als mit den Kräften des Feldes selbst. Dabei geht diese Vereinfachung der Rechnung keineswegs auf Kosten der Vollständigkeit der Resultate, die man ableiten will, denn sobald das Potential überall im Felde bekannt ist, kennt man damit zugleich auch die Kraft an jeder Stelle des Feldes nach Grösse und Richtung, wie ich sofort zeigen werde.

Abb. 5.

Man denke sich nämlich den beweglichen Punkt von der Stelle A aus, in der er sich vorher befand, nach irgend einem Nachbarpunkte B (Abb. 5) verschoben. Dann ist das Potential V_B im Punkte B nach der vorher dafür gegebenen Definition

$$V_B = V_O - \left[\int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s} + \int_A^B \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}\right] = V_A - \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s},$$

denn für das Linienintegral längs des Weges AB kann, da dieser sehr klein sein sollte, einfach das Element $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ gesetzt werden, wenn hierbei unter $d\mathfrak{s}$ die Strecke AB selbst verstanden wird. Bezeichnet man ferner die Aenderung, die das Potential V erfährt, wenn man von A nach B übergeht, mit dV, so kann die vorige Gleichung auch in der Form

$$dV = -\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$$

angeschrieben werden. Aus dieser kann aber in der That sofort auf die Grösse der in die Richtung von AB fallenden Componente von $\mathfrak{P}$ geschlossen werden, wenn man weiss, wie gross die zu $d\mathfrak{s}$ gehörige Aenderung von V ist. Bezeichnet man jene Feldcomponente, also die Projektion von $\mathfrak{P}$ auf $d\mathfrak{s}$ mit P' so ist nämlich auch

$$dV = -P'ds \quad \text{und daher} \quad P' = -\frac{dV}{ds}. \tag{11}$$

Hiermit allein ist nun zwar $\mathfrak{P}$ noch nicht bestimmt; man beachte aber, dass diese Beziehungen für jede beliebige Verschiebungsrichtung AB gültig bleiben und dass man daher die Projektion der gesuchten Kraft $\mathfrak{P}$ auf jede beliebige Richtungslinie anzugeben vermag, womit auch $\mathfrak{P}$ selbst gefunden werden kann. Am einfachsten ist es, die Projektionen von $\mathfrak{P}$ auf drei rechtwinklig zu einander stehende Coordinatenaxen der xyz nach Gl. (11) zu berechnen. Man erhält dann für die drei Componenten von $\mathfrak{P}$

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad P_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{12}$$

und $\mathfrak{P}$ selbst wird als geometrische Summe dieser Componenten, also mit Benutzung der Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ in der Form

$$\mathfrak{P} = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{13}$$

gefunden. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, $\mathfrak{P}$ anzugeben, wenn V überall bekannt ist und man sieht, dass hiezu nur eine Ausführung von Differentiationen erforderlich ist, die keine besonderen Schwierigkeiten verursachen kann.

Der mit dem negativen Vorzeichen versehene Differentialquotient $-\frac{\partial V}{\partial x}$ giebt an, um wie viel V in der Richtung der X-Axe auf die Längeneinheit des Weges bezogen an der betreffenden Stelle des Feldes abnimmt. Man bezeichnet diese Grösse kürzer als das Potentialgefäll und fasst dann die Gl. (11) und (12) in der Aussage zusammen:

Die Componente der Kraft in irgend einer gegebenen Richtung ist gleich dem Potentialgefälle in dieser Richtung.

Auch die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ selbst lässt sich mit Hülfe dieser Bezeichnung in einfacher Weise angeben. Offenbar wird nämlich die Componente von $\mathfrak{P}$ am grössten für eine Richtung, die mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Hieraus folgt in Verbindung mit der vorigen Aussage:

Die Kraft des Feldes geht in der Richtung des grössten Potentialgefälles und ihr Absolutbetrag ist gleich diesem Gefälle.

Schliesslich erwähne ich noch, dass man Gl. (13) zweckmässig in die abgekürzte Schreibweise

$$\mathfrak{P} = -\nabla V \tag{14}$$

zusammenfassen kann, in der ∇ ein „räumlicher Differentialoperator" ist, nämlich an die Stelle von

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

tritt und hiermit jene Operation durch ein einziges Symbol kennzeichnet, durch die das Gefäll der Grösse V gefunden wird. Als zweckmässig ist übrigens diese Bezeichnung nicht etwa bloss deshalb anzusehen, weil Gl. (14) mit weniger Schriftzeichen geschrieben wird als Gl. (13) oder der damit gleichwerthige Verein der Gl. (12), sondern weil es die Einheit der Vorstellung fördert, wenn einem an sich einfachen Begriffe, der selbst sprachlich durch ein einziges Wort („Potentialgefäll" oder vielmehr noch kürzer „Gefäll" überhaupt) wiedergegeben werden kann, auch in der Rechnung durch ein ein-

faches und nicht weiter zusammengesetztes Zeichen Ausdruck gegeben wird.

Zur besseren Veranschaulichung der vorausgehenden Betrachtungen dient eine sehr bekannte geometrische Construction. Von einem Punkte des Kraftfeldes ausgehend, sucht man nämlich alle Nachbarpunkte auf, in denen das Potential den gleichen Werth besitzt. Alle diese Punkte liegen auf einem Flächenelemente, das senkrecht zur Feldkraft $\mathfrak{P}$ gestellt ist, denn nur für eine Verschiebung $d\mathfrak{s}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}$ wird das zugehörige $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ und hiermit dV zu Null. Geht man hierauf in derselben Weise nach allen Seiten hin weiter fort, so erhält man eine Fläche, die jene Punkte des Feldes mit einander verbindet, für die das Potential denselben Wert V besitzt. Eine solche Fläche wird als eine Aequipotentialfläche oder kürzer als eine Niveaufläche bezeichnet.

Wir wollen annehmen, dass eine ganze Schaar von solchen Niveauflächen im Felde construirt sei und zwar derart, dass sich das Potential von je aufeinanderfolgenden Flächen immer um den gleichen Betrag unterscheidet. Man kann dann jede dieser Niveauflächen als eine Stufenfläche und die Schaar aller Stufenflächen als eine Potentialtreppe bezeichnen. Je steiler diese Treppe ist, d. h. je dichter die Stufenflächen aufeinander folgen, um so grösser ist an der betreffenden Stelle die Kraft des Feldes, die ja, wie wir aus Gl. (14) wissen, gleich dem Potentialgefälle ist. Hiernach kann man aus einer Zeichnung der Potentialtreppe alle Eigenschaften des Kraftfeldes ableiten Der Abstand aufeinanderfolgender Stufenflächen giebt ein der unmittelbaren Abschätzung bequem zugängliches Maass für die Grösse der Kraft und die Richtung der Kraft wird durch die Normale zur Stufenfläche angegeben.

Häufig giebt man, um die Richtung der Kraft des Feldes besser hervortreten zu lassen, an Stelle der Potentialtreppe oder auch neben dieser die Kraftlinien an. Das sind Linien, die von irgend einem Punkte des Feldes ausgehend, weiterhin überall der Richtung von $\mathfrak{P}$ folgen. Die Richtung der Kraft an irgend einer Stelle wird hiernach durch die Tangente an

die Kraftlinie angegeben. Die Kraftlinien schneiden alle Niveauflächen rechtwinklig.

Aus dem Begriffe der Kraftlinie geht auch der Begriff der Kraftröhre hervor. Man versteht darunter den röhrenförmigen Raum, der von allen unmittelbar aufeinanderfolgenden Kraftlinien abgegrenzt wird, die man durch sämmtliche Punkte des Umfangs irgend eines auf einer Niveaufläche enthaltenen Flächenstücks legen kann. Dieses Flächenstück bildet hiernach einen Querschnitt der Kraftröhre. Der Querschnitt bleibt im Allgemeinen nicht constant, sondern zu jeder folgenden Niveaufläche gehört ein anderer Querschnitt. Unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen (nämlich dann, wenn keine „Quellen des Kraftflusses“ in der Kraftröhre enthalten sind) ist die Kraft des Feldes an jeder Stelle dem Querschnitte der Kraftröhre umgekehrt proportional. In solchen Fällen kann man die Grösse der Feldkraft auch danach abschätzen, wie dicht die Kraftlinien an der betreffenden Stelle zusammenrücken. Der Beweis der letzteren Behauptungen würde mich weiter führen, als es hier meine Absicht sein kann; ich erlaube mir daher, den Leser, der sich mit diesen knappen Andeutungen nicht begnügen möchte, auf die im Jahre 1897 von mir veröffentlichte kleine Schrift „Die Geometrie der Wirbelfelder“ zu verweisen.

Das Kraftfeld, mit dem man es in der Mechanik gewöhnlich zu thun hat, ist das Schwerefeld der Erde. Innerhalb eines kleinen Raumes, etwa innerhalb eines Zimmers, kann die Schwerkraft nach Grösse und Richtung gewöhnlich als constant angesehen werden, obwohl ich nicht unerwähnt lassen möchte, dass man besondere Beobachtungsmethoden ausgesonnen hat, die selbst die Aenderungen des Feldes innerhalb so kleiner Räume erkennen lassen. Sehen wir aber davon ab, oder betrachten wir, wie man auch sagt, das Feld als homogen, so sind die Kraftlinien unter sich parallel; ihre Richtung ist die der Lothlinie. Die Niveauflächen sind horizontale Ebenen und jeder kommt ein Potential zu, das um so grösser ist, je höher sie liegt. Die Potentialtreppe ist hier überall gleich steil, da

die einzelnen Stufenflächen in gleichen Abständen über einander liegen.

In einem grösseren Bezirke macht sich aber die Krümmung der Niveauflächen bemerkbar. Streng wissenschaftlich gesprochen versteht man unter der Gestalt der Erde nichts anderes, als die Gestalt jener Fläche gleichen Potentials, die über dem Meere unter normalen Umständen mit der Wasseroberfläche zusammenfällt. Daraus erklärt sich auch die Bezeichnung der Niveauflächen. Jene praktisch besonders wichtige Niveaufläche wird auch als das Geoid bezeichnet. — Hier möge von diesen Dingen nur noch erwähnt werden, dass der Begriff des Höhenunterschiedes zweier Punkte der Erdoberfläche (z. B. die Höhe einer Bergspitze über dem Meere) in der gewöhnlichen Fassung einer strengeren Kritik nicht Stand hält. Eindeutig bestimmbar ist vielmehr nur der Potentialunterschied beider Punkte. In der That wird auch der Höhenunterschied der Punkte, wenn er in gewöhnlicher Weise durch ein genaues Nivellement bestimmt wird, etwas verschieden gefunden (auch abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern) je nach dem Wege, längs dessen das Nivellement erfolgte. Man macht sich am einfachsten auf folgende Weise klar, dass dies gar nicht anders erwartet werden kann. Man denke sich durch beide Punkte, etwa A und B, Abb. 6, deren Höhenunterschied ermittelt werden soll, je eine Niveaufläche gelegt. Ein denkbarer Weg für die Ausführung des Nivellements würde dann darin bestehen, dass man zuerst von B senkrecht in die Höhe steigt, bis B' die Erhebung BB' misst und dann stets horizontal von B' nach A fortschreitet. Der Höhenunterschied von A und B würde dann gleich BB' gefunden. Man sieht aber nun sofort, dass man anstatt dessen auch von B längs der Niveaufläche bis A' fortschreiten und dann erst von hier nach A hinaufsteigen könnte. Im letzten Falle würde der Höhenunterschied gleich AA' gefunden. Im Allgemeinen sind aber AA' und BB' keineswegs gleich miteinander; wenn die

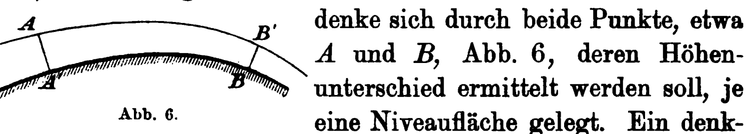


Abb. 6.

Fallbeschleunigung zwischen A und A' kleiner ist, als zwischen B und B', muss, weil $\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ für beide Strecken gleich ist, die Höhe AA' im selben Verhältniss grösser sein, als die bei B gefundene Höhe BB'. — Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen gehört der höheren Geodäsie an.

Die Kraftlinien dürfen übrigens, wie ich hier noch besonders betonen möchte, nicht mit den Bahnen verwechselt werden, die ein im Kraftfelde frei beweglicher materieller Punkt einzuschlagen vermag. Wenn der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit in das Feld gebracht wird, fängt er zwar im ersten Augenblicke seine Bewegung in der Richtung der Kraftlinie an. Aber nur dann, wenn die Kraftlinie gerade ist (wie es genau genug bei der gewöhnlichen Fallbewegung zutrifft), vermag der Punkt ihr dauernd zu folgen; im anderen Falle biegt er aus leicht verständlichen Gründen alsbald von ihr ab.

Durch Verbindung der Gleichung der lebendigen Kraft mit der Definitionsgleichung für das Potential gelangt man schliesslich noch für den im Felde frei beweglichen Punkt zu einem einfachen Resultate. Für die Bewegung von einer Stelle 1 des Feldes nach irgend einer anderen Stelle 2 hat man beim frei beweglichen Punkte nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$\int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = \frac{m\mathfrak{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathfrak{v}_1^2}{2} = L_2 - L_1,$$

wobei zur Abkürzung die lebendige Kraft mit L bezeichnet wurde. Andererseits ist aber nach Gl. (10)

$$V_2 = V_1 - \int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen mit einander folgt

$$V_2 + L_2 = V_1 + L_1, \tag{15}$$

d. h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie bleibt während der Bewegung constant.

§ 4. Die harmonische Schwingung.

Ein materieller Punkt sei einer Centralkraft unterworfen, die der Entfernung vom Anziehungscentrum direct proportional ist. So lange er mit dem Anziehungscentrum selbst zusammenfällt, fehlt jeder Anlass zu einer Bewegung. Sobald er aber durch irgend eine äussere Ursache aus dieser Gleichgewichtslage entfernt und hierauf sich selbst überlassen wird, führt er Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus, die man als harmonische oder auch als einfache Sinusschwingungen bezeichnet und deren Gesetze hier näher untersucht werden sollen.

Vorher möge indessen noch darauf hingewiesen werden, dass die Bedingungen für das Eintreten solcher Bewegungen sehr häufig gegeben sind. Vor allem sind es elastische Kräfte, unter deren Einfluss harmonische Schwingungen zu Stande kommen. Denkt man sich etwa einen Körper, der als materieller Punkt aufgefasst werden kann, durch elastische Bänder an einer bestimmten Stelle festgehalten, so vermag man ihn immer noch ein wenig aus dieser Ruhelage zu entfernen. Dabei werden die elastischen Bänder, durch die er festgehalten war, etwas angespannt und diesen Formänderungen entsprechen elastische Kräfte, die unter Voraussetzung des Hooke'schen Gesetzes der Verschiebung des materiellen Punktes proportional und nach dem Anfangspunkte hin gerichtet sind. Hiermit ist also in der That das Auftreten einer der Entfernung direct proportionalen Centralkraft physikalisch verwirklicht.

Gewöhnlich kann man freilich einen Körper, von dem man sagt, dass er harmonische Schwingungen ausführe, nicht ohne Weiteres als materiellen Punkt ansehen. Vielmehr treten unter den verschiedensten Umständen Schwingungen auf, die ihren Wirkungsgesetzen nach vollständig mit den harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes zusammenfallen und die man daher auch selbst als harmonische bezeichnet. Dies trifft z. B. bei den sehr häufig vorkommenden Drehschwingungen eines Körpers um eine festliegende Axe, also

etwa eines Körpers zu, der am unteren Ende eines Drahtes aufgehängt ist und unter dem Einflusse der Torsionselasticität des Drahtes schwingt (Torsionspendel, Drehwaage). Auch selbst Vorgänge, die ganz ausserhalb des Bereichs der Mechanik liegen, bezeichnet man als harmonische Schwingungen, weil sie den gleichen zeitlichen Verlauf nehmen, so dass die in der Dynamik des materiellen Punktes dafür abgeleiteten Formeln bei entsprechender Deutung der darin vorkommenden Buchstabengrössen ohne Weiteres auf jene Fälle angewendet werden können. Dies trifft namentlich bei gewissen elektrischen Schwingungen zu. So kommt es, dass die harmonischen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes nur das einfachste Beispiel für eine Reihe verschiedener Schwingungsvorgänge bilden, bei deren Untersuchung von den hier durchzuführenden Betrachtungen mit geringen Aenderungen immer wieder Gebrauch gemacht wird.

Nach diesen Bemerkungen, die mir erforderlich schienen, um die grosse Tragweite hervorzuheben, die ihm zukommt, wende ich mich jetzt zur Behandlung des einfachen Falles, um den es sich hier handelt. Dabei möge zunächst ausserdem noch angenommen werden, dass die Schwingungen gradlinig erfolgen. Dies wird sicher geschehen, wenn der materielle Punkt etwas aus der Gleichgewichtslage verrückt und hierauf ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen wurde, denn Kraft und Geschwindigkeit sind dann während der ganzen Bewegung stets längs derselben Geraden gerichtet, auf der die Bewegung erfolgt.

Es wird nützlich sein, über das Kraftfeld, in dem sich die Schwingung vollzieht, einige mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Begriffen zusammenhängende Erörterungen vorauszuschicken. Die Kraftlinien sind hier sämmtlich gradlinig und nach dem Anfangspunkte gerichtet. Die Niveauflächen sind concentrische Kugelflächen. Die Stufenflächen der Potentialtreppe liegen um so enger zusammen, je weiter man sich vom Anfangspunkte entfernt. Wählt man die Constante V_O in Gl. (10), wenn O den Anfangspunkt bedeutet, gleich Null, so

wird das Potential V_A im Abstande a nach jener Gleichung

$$V_A = \int_0^a cx \cdot dx = c\frac{a^2}{2}.$$

Hierbei ist nämlich die Kraftlinie als Integrationsweg gewählt; c ist ein Proportionalitätsfaktor, durch dessen Multiplikation mit x die Kraft im Abstande x gefunden wird, also mit anderen Worten die Intensität des Feldes im Abstande 1 vom Anfangspunkte. Das in Gl. (10) vor dem Integrale stehende Minuszeichen fällt hier weg, denn in unserem Falle ist $\mathfrak{P}$ nach dem Anfangspunkte gerichtet und $d\mathfrak{s}$ ist, weil wir von O nach A hin integriren, entgegengesetzt gerichtet. Für $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ erhält man daher hier $-cx \cdot dx$.

Der Ausdruck für das Potential V giebt zugleich die elastische Formänderungsarbeit jener Bänder oder Theile an, die den materiellen Punkt in die Ruhlage zurückzuführen suchen. In der That ist im vorliegenden Falle das Potential nur eine andere Bezeichnung für die in der Festigkeitslehre unter dem Namen Formänderungsarbeit so häufig benutzte Grösse.

Je weiter wir uns vom Anfangspunkte entfernen, desto grösser wird V. Im Verlaufe der Bewegung eines sich selbst überlassenen Punktes bleibt aber nach Gl. (15) die gesammte Energie $V + L$ constant. Daraus folgt, dass der Punkt immer innerhalb jener kugelförmigen Niveaufläche bleiben muss, deren Potential grade gleich dieser Gesammtenergie ist. Schon hieraus folgt, dass die Bewegung jedenfalls in einer Schwingung bestehen muss.

Die dynamische Grundgleichung liefert sofort die Differentialgleichung der Bewegung. Ich wähle die Gerade, längs der die Schwingung erfolgt, zur X-Axe, bezeichne die Masse des materiellen Punktes mit m, den Proportionalitätsfaktor, der die Intensität des Feldes beschreibt und der als gegeben zu betrachten ist, wie vorher schon mit c; dann lautet die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx. \tag{16}$$

Durch das Minuszeichen ist dem Umstande Rechnung getragen, dass die Kraft nach dem Ursprunge geht, während die Abscisse x nach aussen hin wächst. — Von Gl. (16) kennt man die allgemeinste, also mit zwei Constanten versehene Lösung; sie lautet

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \tag{17}$$

worin A und B die willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten, α aber eine Constante ist, die aus Gl. (16) gefunden wird. Differentiirt man nämlich x zweimal nach t, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t),$$

also vom Minuszeichen abgesehen, das α^2-fache von x. Nach Gl. (16) soll dagegen $\frac{d^2x}{dt^2}$ das $-\frac{c}{m}$-fache von x sein. Daraus folgt, dass jedenfalls

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{18}$$

gesetzt werden muss. Wenn dies geschieht, befriedigt aber Gl. (17) die Differentialgleichung (16) identisch.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Integrationsconstanten A und B aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke möge festgesetzt werden, dass die Zeit t von einem Augenblicke an gerechnet werden soll, in dem x gleich Null war. Dazu muss nach Gl. (17) das den Cosinus der Zeit enthaltende Glied verschwinden, also $B = 0$ sein. Es bleibt hiernach

$$x = A \sin \alpha t \tag{19}$$

und die hier noch vorkommende Integrationsconstante A hat eine einfache und leicht ersichtliche Bedeutung. Sie stellt nämlich den grössten Werth dar, den x im Verlaufe der Zeit periodisch immer wieder annimmt, wenn der Sinus gleich der Einheit wird. Hiernach ist A der grösste Schwingungsausschlag oder die Amplitude der Schwingung. Diese muss entweder direct gegeben sein oder sie muss sich aus den Anfangsbedingungen, die bekannt sein müssen, wenn man im Stande sein soll, den weiteren Verlauf der Bewegung voraus-

zusagen, berechnen lassen. Wäre z. B. die Geschwindigkeit v_0 bekannt, mit der der Punkt zu Anfang der Zeit durch den Gleichgewichtspunkt ging, so hätte man aus Gl. (19)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t, \quad \text{also} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha A$$

und hieraus folgte

$$A = \frac{v_0}{\alpha} \quad \text{und schliesslich} \quad x = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t.$$

Der Werth x in Gl. (19) nimmt öfters wieder die früheren Werthe an. Dies geschieht jedenfalls immer dann wieder, wenn der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um eine volle Umdrehung oder um 2π gewachsen ist. Auch in der Zwischenzeit nimmt der Sinus noch einmal den anfänglichen Werth an. Je nach der Lage, von der man hierbei ausgeht, dauert es aber bis dahin verschieden lang. Man achtet daher nicht auf diese erste Wiederkehr des Punktes in die vorige Lage, sondern erst auf die folgende, die stets nach Zuwachs des Winkels αt um 2π erfolgt und von der ab sich nachher beim weiteren Verlaufe der Zeit der Bewegungsvorgang genau wieder in derselben Weise wiederholt. Man nennt die Zeit, die während dessen verstreicht, also jene Zeit, die einem Anwachsen von αt um 2π entspricht, die Dauer einer vollen Schwingung. Wählt man dafür den Buchstaben T, so hat man

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}\,. \tag{20}$$

Besonders zu beachten ist hierbei, dass T ganz unabhängig von A, also von der Amplitude der Schwingung ist. Die Schwingungsdauer hängt vielmehr nur von der Masse des schwingenden Punktes und von der durch den Faktor c ausgedrückten Stärke der elastischen Kraft ab, die ihn nach der Gleichgewichtslage hinzieht. Man nennt solche Schwingungen, deren Dauer unabhängig von der Grösse des Schwingungsausschlags ist, isochron und die hiermit ausgedrückte Eigenschaft ist als die wichtigste der harmonischen Schwingungen zu betrachten.

Zuweilen zieht man es vor, die Schwingung nur während der Zeit zu betrachten, in der die ganze Schwingungsbahn einmal in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird, also die Rückkehr des Punktes gar nicht abzuwarten und als Schwingungsdauer nur jene Zeit zu rechnen, in der $\sin \alpha t$ von -1 bis $+1$ wächst. Dabei nimmt der Winkel αt um π zu und diese einfache Schwingungsdauer, wie man sie zum Unterschiede von der vorigen nennt, ist genau die Hälfte von T.

Bisher war nur von der gradlinigen harmonischen Schwingung die Rede. Der allgemeinere Fall, zu dem ich jetzt übergehe, lässt sich aber in ganz ähnlicher Weise erledigen. Er liegt immer dann vor, wenn der bewegliche Punkt zu irgend einer Zeit einmal eine Geschwindigkeit hatte, deren Richtungslinie nicht durch den Anfangspunkt ging, und weiterhin ohne äussere Einwirkung den Kräften des Feldes überlassen wurde. In Abb. 7 bedeutet O das Kraftcentrum (oder die Gleichgewichtslage des beweglichen Punktes), A die Lage, die der Punkt zur Zeit t einnimmt und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit. Die elastische Kraft kann hier nach Grösse und Richtung durch den Ausdruck

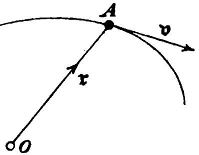


Abb. 7.

$$-c\mathfrak{r}$$

dargestellt werden, wenn c dieselbe Bedeutung hat wie vorher. Durch das Minuszeichen wird ausgedrückt, dass die Kraft dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Die dynamische Grundgleichung lautet jetzt

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -c\mathfrak{r}$$

und deren allgemeine Lösung ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A} \sin \alpha t + \mathfrak{B} \cos \alpha t,$$

wenn wiederum $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Integrationsconstanten bedeuten, die aber jetzt als gerichtete Grössen aufzufassen sind, während α dieselbe Bedeutung wie vorher hat, also gleich dem durch Gleichung (18) angegebenen Werthe zu setzen ist. In der

That überzeugt man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung leicht, dass diese durch ihn für jede beliebige Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllt ist. — Zu Anfang der Zeit t möge $\mathfrak{r}$ gleich $\mathfrak{a}$ und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleich $\mathfrak{v}_0$ gewesen sein. Hierdurch bestimmen sich die Integrationsconstanten zu

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}_0}{\alpha},$$

so dass nach Einsetzen des Werthes von α die vollständig bestimmte Lösung lautet

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + \mathfrak{a} \cos t \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{21}$$

Auch diese Bewegung ist eine periodische, denn sobald der Winkel $t\sqrt{\frac{c}{m}}$ um 2π gewachsen ist, wiederholen sich in derselben Reihenfolge wieder alle Werthe des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ von Neuem. Der bewegliche Punkt durchläuft demnach in steter Reihenfolge unbegrenzt oft eine in sich geschlossene Curve. Die Zeit, die er zu einem vollen Umlaufe braucht, nennen wir wieder die Dauer einer vollen Schwingung und bezeichnen sie wiederum mit T. Dabei wird T aus der Bedingung

$$T\sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi, \quad \text{also} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

gefunden. Dieser Werth stimmt aber genau mit dem in Gl. (20) für die geradlinige Schwingung gefundenen überein. Wir erkennen hieraus, dass die Schwingungen auch noch im allgemeinsten Falle isochron sind, d. h. dass die Schwingungsdauer nicht nur von der Grösse des Ausschlags, sondern auch von der besonderen Gestalt der Bahn unabhängig ist.

Es fragt sich jetzt noch, welche Form die Bahn besitzt. Auch diese Frage kann mit Hülfe von Gl. (21) sofort beantwortet werden. Diese Gleichung bildet nämlich in der Sprache der Vektorenrechnung schon von selbst die Gleichung der Bahn und zwar stellt sie die Gleichung einer Ellipse dar, deren

Mittelpunkt mit dem Kraftcentrum O zusammenfällt. Da aber die analytische Geometrie heutzutage an Stelle der Vektoren stets mit deren Componenten oder Coordinaten rechnet, bleibt mir noch übrig, Gl. (21) in zwei Componenten zu zerlegen, um damit auf die übliche Darstellungsform zu kommen. Um diesen Uebergang auf möglichst einfache Art bewirken zu können, nehme ich an, dass als Anfangspunkt der Zeitrechnung, auf den sich auch die zusammengehörigen Werthe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}_0$ beziehen, ein Augenblick gewählt worden sei, in dem sich der bewegliche Punkt gerade im grössten oder auch im kleinsten Abstande vom Kraftcentrum befand. Dann steht in diesem Augenblicke die Bewegungsrichtung rechtwinklig zum Radiusvektor, d. h. es ist $\mathfrak{v}_0 \perp \mathfrak{a}$. Hiermit entsprechen die beiden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (21) schon von selbst den beiden rechtwinkligen Componenten von $\mathfrak{r}$. Wenn wir dann noch die Richtung von $\mathfrak{a}$ zur Richtung der X-Axe wählen und die Y-Axe in die Richtung von $\mathfrak{v}_0$ legen, erhalten wir aus Gl. (21) für die Componenten x und y von $\mathfrak{r}$, d. h. für die Coordinaten des beweglichen Punktes die Gleichungen

$$x = a \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}; \qquad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin t \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminiren wir den veränderlichen Winkel mit Hülfe einer sehr bekannten Umformung, indem wir

$$\sin^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} + \cos^2 t \sqrt{\frac{c}{m}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}}\right)^2 = 1$$

setzen. Damit sind wir aber in der That zu der gewöhnlichen Form der Mittelpunktsgleichung einer Ellipse gelangt, deren Halbaxen gleich a und gleich $v_0 \sqrt{\frac{m}{c}}$ sind. Diese Ellipse bildet die gesuchte Bahn des beweglichen Punktes.

Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass auch bei der harmonischen Schwingung der vom Kraftcentrum gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, da diese

Eigenschaft, wie früher bewiesen wurde, allen Centralbewegungen zukommt.

§ 5. Gedämpfte Schwingungen.

Die bisher untersuchten Schwingungsbewegungen müssten, wenn sie einmal angeregt wären und dann vor allen äusseren Störungen geschützt werden könnten, unbegrenzt lange andauern, ohne jemals zu erlöschen oder sich auch nur irgendwie zu verändern. In Wirklichkeit beobachten wir aber stets, dass eine einmal angeregte Schwingung allmählich „abklingt“, d. h. dass die Schwingungsausschläge allmählich immer kleiner werden, bis sie sich zuletzt jeder Wahrnehmung entziehen. Der Grund dafür ist in besonderen Bewegungswiderständen, wie Reibung, Luftwiderstand, unvollkommene Elasticität u. s. w. zu suchen, die bisher vernachlässigt wurden. Um uns dem wirklichen Vorgange mehr zu nähern, wollen wir jetzt annehmen, dass ausser der elastischen Kraft des Feldes auch noch ein „dämpfender Widerstand“ von irgend einer Art auf den beweglichen Punkt einwirke, der in jedem Augenblicke der Bewegung des Punktes entgegen wirkt. Zugleich müssen wir aber, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, noch eine nähere Voraussetzung über das Wirkungsgesetz dieses Widerstandes einführen. Es steht nun zwar frei, die Rechnung unter verschiedenen Annahmen dieser Art durchzuführen und sich im gegebenen Falle dann für jenes Widerstandsgesetz zu entscheiden, bei dessen Wahl die Rechnungsergebnisse am besten mit der Beobachtung übereinstimmen. Man begnügt sich aber fast stets mit der einfachsten Annahme, die sich machen lässt, nämlich dass der Widerstand in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sei. Wenn der dämpfende Widerstand in der Hauptsache im Luftwiderstande besteht und die Geschwindigkeiten der Schwingungsbewegung nicht sehr erheblich sind, trifft diese Annahme, wie aus der Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Formeln mit den Beobachtungen zu schliessen ist, in der That ziemlich genau zu. Noch besser ist die Voraussetzung erfüllt, wenn die Däm-

pfung etwa dadurch erfolgt, dass ein Magnet in der Nähe einer Kupfermasse schwingt, wobei die elektrischen Ströme, die durch die Bewegung in dem Kupferkörper inducirt werden, einen sehr kräftigen dämpfenden Widerstand auf die Schwingungsbewegung ausüben. Dieser Fall liegt bei vielen physikalischen Messinstrumenten vor.

Wie dies aber auch sei, jedenfalls werde ich mich hier auf die Untersuchung des Falles beschränken, dass der dämpfende Widerstand genau genug als proportional der Geschwindigkeit angesehen werden kann. Wenn ausserdem zunächst der Einfachheit wegen vorausgesetzt wird, dass es sich um eine gradlinige Schwingung handle, nimmt die dynamische Grundgleichung hier die Gestalt an

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - cx - k \frac{dx}{dt} \cdot \tag{22}$$

Sie unterscheidet sich von der früheren nur dadurch, dass das Glied $k \frac{dx}{dt}$ auf der rechten Seite neu hinzugetreten ist. Dieses Glied entspricht aber seinem Baue nach der Annahme, die wir für den dämpfenden Widerstand machten, denn es stellt das Produkt aus einem constanten Faktor k, der die Grösse der Dämpfung im gegebenen Falle misst und der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ dar. Wenn man $k = 0$ setzt, geht die Gleichung wieder in jene für die ungedämpfte harmonische Schwingung über.

Das negative Vorzeichen, mit dem das Dämpfungsglied in die Gleichung eingeführt ist, rechtfertigt sich damit, dass für einen positiven Werth von $\frac{dx}{dt}$, wenn sich also der Punkt, wie man sagen kann, auf der Ausreise befindet, der Widerstand sich dieser Bewegung widersetzt, also nach dem Coordinatenursprunge hin oder entgegengesetzt zur Richtung der positiven x gerichtet ist. Bei der Rückreise des Punktes ist $\frac{dx}{dt}$ an sich negativ; damit wird das Dämpfungsglied positiv und es zeigt eine Kraft an, die im Sinne der positiven x geht, die sich also auch hier der Bewegung widersetzt. Man erkennt hieraus, dass die Glei-

chung in der angeschriebenen Form in der That jederzeit die Bedingungen der Bewegung richtig wiedergiebt.

Um Gl. (22) zu integriren, setze man

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung ein, so geht sie über in

$$m(\alpha^2 Ae^{\alpha t} + \beta^2 Be^{\beta t}) + c(Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}) + k(A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige Werthe von A und B identisch erfüllt sein soll, zerfällt sie in die beiden Gleichungen

$$Ae^{\alpha t}(m\alpha^2 + c + k\alpha) = 0,$$
$$Be^{\beta t}(m\beta^2 + c + k\beta) = 0,$$

die für jeden Werth von t und für beliebige Werthe von A und B erfüllt sein müssen. Hiernach müssen, wenn der für x angegebene Ausdruck die richtige Lösung der Gl. (22) bilden soll, α und β so bestimmt werden, dass die beiden Klammerwerthe zu Null werden, d. h. α und β sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$mz^2 + c + kz = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung liefert

$$z = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}},$$

also, wenn wir den hierin vorkommenden Wurzelwerth zur Abkürzung mit γ bezeichnen,

$$\alpha = -\frac{k}{2m} + \gamma; \qquad \beta = -\frac{k}{2m} - \gamma.$$

Die Werthe von α und β könnten zwar auch mit einander vertauscht werden, womit aber an der allgemeinen Form des Ausdruckes von x nichts geändert würde, da auch A und B vorläufig nur zwei ebenfalls mit einander vertauschbare Symbole für ganz beliebig zu wählende Werthe sind. — Die allgemeine Lösung von Gl. (22) ist demnach von der Form

$$x = Ae^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{\gamma t} + Be^{-\frac{k}{2m}t} e^{-\gamma t}. \tag{23}$$

Hier sind nun zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem der mit γ bezeichnete Wurzelwerth reell oder imaginär ist. Im ersten Falle, den wir zunächst voraussetzen wollen, kann die Lösung in der Form von Gl. (23) unmittelbar beibehalten werden. Diese Lösung stellt aber überhaupt keine Schwingung mehr dar, weil x hier als eine nichtperiodische Function der Zeit gefunden ist. Nehmen wir, um die fernere Untersuchung zu vereinfachen an, dass zu Anfang der Zeit t der Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 durch den Ursprung gegangen sei, so erhalten wir für die Constanten A und B die beiden Grenzbedingungen

$$0 = A + B \quad \text{und} \quad v_0 = A\left(-\frac{k}{2m} + \gamma\right) + B\left(-\frac{k}{2m} - \gamma\right),$$

woraus man durch Auflösen nach A und B findet

$$A = \frac{v_0}{2\gamma} \quad \text{und} \quad B = -\frac{v_0}{2\gamma}.$$

Durch Einsetzen der hiermit bestimmten Werthe in Gl. (23) geht diese über in

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t}\left(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}\right). \tag{24}$$

Dieser Ausdruck kann sein Vorzeichen bei wachsendem t nicht ändern, denn $e^{-\gamma t}$ ist für ein positives t immer ein echter Bruch, während $e^{\gamma t}$ stets grösser als Eins bleibt. Der Punkt bleibt also, wenn er diese Bewegung ausführt, vom Augenblicke $t = 0$ an stets auf derselben Seite der Coordinatenaxe. Für $t = \infty$ liefert Gl. (24) wieder $x = 0$, denn aus der Definition von γ folgt, dass $\frac{k}{2m}$ jedenfalls grösser ist als γ. Der grösste Ausschlag, den der Punkt erreicht, und die Zeit, zu der dies geschieht, kann nach der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima aus Gl. (24) ermittelt werden, womit ich mich aber jetzt nicht aufhalten will. Jedenfalls ist durch die bisherigen Auseinandersetzungen der allgemeine Verlauf der Bewegung bereits hinreichend gekennzeichnet. Eine solche Bewegung heisst eine a p e r i o d i s c h e; sie ist dann zu erwarten, wenn die Dämpfung sehr stark ist (z. B. beim sogenannten

ballistischen Galvanometer). Jedenfalls muss der Dämpfungsfaktor k mindestens den Werth

$$k = 2\sqrt{mc}$$

erhalten. Sobald k kleiner ist, wird der mit γ bezeichnete Wurzelwerth imaginär und dann treten wieder Schwingungen ein, die wir jetzt weiter untersuchen wollen.

In diesem Falle ist die Wurzel

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

ein reeller Werth und für γ können wir in den vorausgehenden Entwickelungen

$$\gamma = i\gamma'$$

setzen. Hiermit geht Gl. (24) über in

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \frac{e^{i\gamma' t} - e^{-i\gamma' t}}{2i}.$$

Nach einer bekannten Formel der Analysis ist aber für den hier als letzter Faktor auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck kürzer $\sin \gamma' t$ zu setzen. Wir erhalten so für die gedämpften Schwingungen die fertige Lösung

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \gamma' t. \tag{25}$$

Uebrigens steht es auch frei, wenn man diesen Uebergang von den imaginären zu den reellen Werthen vermeiden will, die Richtigkeit von Gl. (25) unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung (22) und Vergleich mit den vorgeschriebenen Grenzbedingungen nachzuweisen.

Der Hauptunterschied zwischen Gl. (25) und der die ungedämpften harmonischen Schwingungen darstellenden Gl. (19)

$$x = A \sin \alpha t$$

besteht in dem Hinzutreten der Exponentialfunction $e^{-\frac{k}{2m}t}$ als Faktor. Solange noch wenig Zeit von Beginn der Bewegung an verstrichen ist, unterscheidet sich dieser Faktor nur wenig von der Einheit; die Bewegung erfolgt bis dahin fast ebenso wie eine ungedämpfte. Wenn die Dämpfung k sehr klein ist,

kann schon eine ganze Anzahl von Schwingungen verstreichen, bevor sich eine Aenderung des Schwingungsausschlags bemerklich macht. Sobald aber t einmal so gross geworden ist, dass der Exponentialfaktor erheblich von 1 verschieden ist, nimmt dann innerhalb Zeiten, die mit dieser vergleichbar sind, der Schwingungsausschlag sehr schnell ab. War z. B. für eine gewisse Zeit t_1 der Exponentialfaktor gleich $\frac{1}{2}$, so ist er nach $2t_1$ gleich $\frac{1}{4}$, nach $3t_1$ gleich $\frac{1}{8}$ und nach $10t_1$ schon gleich $\frac{1}{1024}$, also in den meisten Fällen schon ganz unmerklich geworden. Dieses rapide Erlöschen ist ja überhaupt die hervorstechendste Eigenschaft der mit Hülfe einer Exponentialfunction beschriebenen physikalischen Gesetzmässigkeiten.

Die Definition einer vollen Schwingung muss hier anders gefasst werden, als bei der ungedämpften Bewegung. Wir wollen darunter eine Bewegung aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite, die Rückkehr von da, dann den Ausschlag nach der anderen Seite, bis schliesslich der Punkt abermals in der Gleichgewichtslage angelangt ist, verstehen. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass auch die gedämpfte Schwingung isochron ist. In die Gleichgewichtslage ist nämlich der Punkt immer dann wieder zurückgekehrt, wenn $\sin \gamma' t$ zu Null wird. Dies trifft zu, wenn der Winkel $\gamma' t$ wieder um π oder ein Vielfaches davon gewachsen ist. Zur Dauer T einer vollen Schwingung gehört demnach ein Zuwachs des Winkels um 2π und daraus folgt

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}}. \tag{26}$$

Dieser Ausdruck ist in der That ganz unabhängig von der Zeit, die seit Beginn der Bewegung verstrichen ist oder von dem Werthe, auf den sich der Schwingungsausschlag seitdem vermindert hat. Wenn die Schwingungsausschläge kleiner werden, nehmen auch die Geschwindigkeiten entsprechend ab, so dass zum Durchlaufen der kleineren Wege immer noch ebensoviel Zeit gebraucht wird, als vorher bei den grösseren.

Dagegen ist die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung grösser als die der ungedämpften. — Wenn man $k = 0$ setzt, geht Gl. (26) wieder in Gl. (20) über.

Die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes folgt aus Gl. (25) durch Differentiation nach der Zeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \left(\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t\right).$$

Die Geschwindigkeit wird jedesmal zu Null bei einer Umkehr aus einer Bewegungsrichtung in die andere. Für die Umkehrzeiten hat man daher die Bedingung

$$\gamma' \cos \gamma' t - \frac{k}{2m} \sin \gamma' t = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma' t = \frac{2m\gamma'}{k} = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{k}.$$

Diesen Werth nimmt die Tangente von $\gamma' t$ immer von Neuem wieder an, wenn der Winkel $\gamma' t$ um π, 2π, 3π u. s. f. gewachsen ist. Daraus folgt aber, dass die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten immer gleich gross und, wie aus Gl. (26) hervorgeht, gleich der Hälfte einer vollen Schwingungsdauer ist.

Aus der $\operatorname{tg} \gamma' t$ berechnen wir zunächst $\sin \gamma' t$ nach der goniometrischen Formel

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

also in unserem Falle nach Einsetzen des für $\operatorname{tg} \gamma' t$ gefundenen Werthes

$$\sin \gamma' t = \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}}. \tag{27}$$

Wir brauchen nur diesen Werth in Gl. (25) einzusetzen, um danach die Grösse des Schwingungsausschlags oder x_{max} zu berechnen. Diese Schwingungsamplitude sei mit a bezeichnet und ferner, um sie mit den vorausgegangenen oder den folgenden vergleichen zu können, mit a_n, wobei n angeben soll, der wievielte Schwingungsausschlag seit Beginn der Zeit t grade vorliegt. Wir erhalten dann

$$a_n = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4mc}},$$

oder, wenn man hier ausserdem noch den Werth von γ' einführt,

$$a_n = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m}t}. \tag{28}$$

Den genaueren Werth von t muss man sich aus Gl. (27) berechnet und in den Exponentialfaktor eingesetzt denken. Beim nächsten Schwingungsausschlage, der nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wird ebenso

$$a_{n+1} = v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot e^{-\frac{k}{2m}t'}$$

gefunden, denn die Bedingung (27) für die Zeiten der Bewegungsumkehr gilt für alle Schwingungsausschläge in derselben Weise. Geändert hat sich daher in a_{n+1} gegenüber a_n nur der Exponentialfaktor, indem an Stelle von t die Zeit t' getreten ist. Nun ist aber, wie vorher schon bemerkt wurde,

$$t' = t + \frac{T}{2} = t + \frac{2\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}},$$

hiernach kann a_{n+1} auf einfache Weise aus a_n abgeleitet werden, indem man

$$a_{n+1} = a_n \cdot e^{-\frac{k}{4m}T} = a_n \cdot e^{-\frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}}} \tag{29}$$

setzt. Das Verhältniss $a_{n+1} : a_n$ ist hiernach constant, d. h. die aufeinanderfolgenden Schwingungsamplituden bilden eine geometrische Reihe. Geht man zu den natürlichen Logarithmen über, so erhält man aus (29)

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{kT}{4m}. \tag{30}$$

Die Logarithmen aufeinanderfolgender Schwingungsausschläge unterscheiden sich demnach immer um den gleichen Werth. Dieser wird das logarithmische Decrement der Schwingung genannt. Es kann gewöhnlich leicht durch unmittelbare Be-

obachtung der Bewegung ermittelt werden und Gl. (30) dient dann dazu, den Dämpfungsfaktor k zu berechnen.

Beobachtet man nur Ausschläge, die nach derselben Seite gehen, so ist das logarithmische Decrement, wie aus Gl. (30) sofort folgt, doppelt so gross als dort angegeben. Ferner kann man anstatt der Ausschläge auch die Längen der aufeinanderfolgenden ganzen Schwingungsbahnen mit einander vergleichen. Für ein solches Verhältniss hat man nach der Bedeutung von a den Ausdruck

$$\frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2} + a_{n+3}}.$$

Bezeichnet man nun vorübergehend zur Abkürzung das Verhältniss zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen mit μ, so wird $a_{n+1} = \mu a_n$ u. s. f. und für den vorausgehenden Bruch erhält man

$$\frac{1 + \mu}{\mu^2 + \mu^3} = \frac{1}{\mu^2},$$

d. h. das Verhältniss von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungsbahnen ist ebenso gross als das Verhältniss von zwei nach derselben Seite hin gehenden Ausschlägen und das logarithmische Decrement ist hierfür doppelt so gross, als der in Gl. (30) dafür angegebene Werth.

Der Vergleich dieses Gesetzes der Abnahme der Schwingungsweiten mit der Beobachtung bietet ein einfaches Mittel, um die über den dämpfenden Widerstand gemachte Annahme auf ihre Richtigkeit oder ihre Genauigkeit in einem gegebenen Falle zu prüfen.

Anmerkung. Schliesslich sei noch bemerkt, dass man auch die krummlinige gedämpfte Schwingung in ganz ähnlicher Weise behandeln kann, indem man an Stelle von Gl. (22) allgemeiner

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = - c \mathfrak{r} - k \frac{d \mathfrak{r}}{dt}$$

setzt. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet wiederum

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} \cdot e^{\beta t},$$

wobei für α und β dieselben Werthe wie im früheren Falle einzu-

setzen sind. Auch sonst lassen sich die früheren Betrachtungen sinngemäss wiederholen, was als nützliche Uebung hier empfohlen werden möge.

§ 6. **Erzwungene Schwingungen.**

Bisher war zuerst angenommen worden, dass die elastische Kraft oder die „Kraft des Feldes“ allein auf den beweglichen Punkt einwirke und dann, dass neben ihr noch ein dämpfender Widerstand zu berücksichtigen sei. Jetzt wollen wir unsere Betrachtung noch auf den allgemeineren Fall ausdehnen, dass ausserdem zugleich noch eine andere, unmittelbar gegebene Kraft an dem materiellen Punkte angreife. Die in diesem Falle zu Stande kommenden Schwingungen werden als „erzwungene“ bezeichnet, im Gegensatze zu den „freien“ oder, wie man gewöhnlich sagt, zu den „Eigenschwingungen“ des Punktes.

Die Lehre von den erzwungenen Schwingungen ist, wie ich zuvor bemerken möchte, nach verschiedenen Richtungen hin von grosser Bedeutung für die Erklärung physikalischer Vorgänge. Dabei handelt es sich freilich auch hier wieder meist um Fälle, bei denen das einfache Bild des materiellen Punktes zur vollständigen Beschreibung des Vorgangs nicht genügt. Das hindert aber nicht, dass sich der zeitliche Verlauf der Schwingungen in allen wesentlichen Punkten mit jenem deckt, der bei einem einzelnen materiellen Punkte zu erwarten wäre. Um mit dem Gegenstande vertraut zu werden, thut man daher am besten, diese Schwingungserscheinungen unter Voraussetzung möglichst einfacher Verhältnisse, also am einzelnen materiellen Punkte zu studiren. Man kann sich dabei immerhin vorbehalten, das Anwendungsgebiet dieser Betrachtungen unter entsprechender Berücksichtigung der Besonderheiten des einzelnen Falles später weiter auszudehnen. So ist es auch zu verstehen, wenn ich jetzt zur Erläuterung der physikalischen Bedeutung der uns hier beschäftigenden Untersuchung einige Fälle erzwungener Schwingungen als Beispiele anführe.

Wenn man zwei Stimmgabeln von ungefähr gleicher Ton-

höhe auf einem Tische aufstellt und die eine anschlägt, geräth auch die andere ins Tönen. In diesem Falle sind es die von der ersten Stimmgabel ausgehenden Schallwellen, die beim Auftreffen auf die zweite Stimmgabel an dieser periodisch wechselnde Kräfte ausüben, die zu den elastischen Kräften dieser Stimmgabel selbst und zu ihrem dämpfenden Widerstande hinzutreten und eine Schwingungsbewegung zuerst einleiten und deren weiteren Verlauf regeln. In solchen Fällen nennt man die Bewegung der zweiten Stimmgabel auch oft ein „Mitschwingen“ und die ganze Erscheinung führt den Namen „Resonanz“. In anderen Fällen wird der erste Körper, von dem der Anstoss ausgeht, als der „Erreger“, der andere als der „Empfänger“ bezeichnet. So kommt bei den bekannten Hertz'schen Versuchen mit elektrischen Schwingungen ein Erreger oder „Oscillator“ vor, von dem die elektrischen Wellen ausgesendet werden und ein Resonator oder Empfänger, in dem erzwungene Schwingungen entstehen, die durch die an ihnen beobachteten Erscheinungen einen Rückschluss auf die Wellenzüge im Luftraume zulassen.

Als ferneres Beispiel führe ich die Schwingungen eines Schiffes an. Wenn dieses im ruhigen Wasser aus der Gleichgewichtslage gebracht und dann sich selbst überlassen wird, führt es pendelnde Bewegungen aus, die im grossen Ganzen den für die gedämpften Schwingungen abgeleiteten Gesetzen folgen. Sobald nun das Wasser selbst in Wellenbewegungen begriffen ist, kommen hierzu äussere Anstösse, die zu erzwungenen Schwingungen führen. Diese können sehr gefährlich werden, wenn die Schwingungsdauer der Wasserwellen zufällig ziemlich genau mit der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen des Schiffes zusammenfällt. In diesem Falle spricht man wieder von einer Resonanz der Schwingungen, womit hiernach ein besonderer Fall der erzwungenen Schwingungen gekennzeichnet wird. — Auch im ruhigen Wasser kann übrigens das Schiff in erzwungene Schwingungen versetzt werden, wenn eine Maschine in ihm umläuft, deren Massen nicht so ausgeglichen sind, dass periodisch wechselnde Anstösse auf

den Schiffskörper vermieden werden. Hierher gehören ferner auch die durch taktmässiges Marschiren einer Menschenmasse über eine Brücke hervorgerufenen erzwungenen Schwingungen*) und noch manche andere Erscheinungen von verwandter Art.

Um die erzwungenen Schwingungen näher untersuchen zu können, muss man natürlich zuvor wissen, welchem Gesetze die äussere Kraft folgt, die diese Schwingungen hervorbringt. Wie aus den zuvor angeführten Beispielen hervorgeht, handelt es sich dabei gewöhnlich um periodisch der Richtung nach wechselnde Kräfte. Das einfachste Gesetz eines solchen periodischen Wechsels wird durch eine Sinus- (oder, was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, durch eine Cosinus-) Function der Zeit ausgesprochen. Ich werde daher jetzt annehmen, dass auf den beweglichen materiellen Punkt ausser der elastischen Kraft und dem dämpfenden Widerstande noch eine Kraft von aussen her einwirkt, die gleich

$$P \sin \eta t$$

ist, worin P, d. h. der grösste Absolutbetrag dieser Kraft, ebenso wie die Constante η, von der die Schwingungsdauer der Erregungsschwingung abhängt, beliebig gegeben sein mögen.

---

*) In einer Abhandlung „Zur Dynamik des Fachwerks" von H. Reissner, Zeitschr. f. Bauwesen 1899, S. 478 wird z. B. der Versuch gemacht, die Schwingungen von Brückenträgern auf erzwungene Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes zurückzuführen. Hierzu dient die Annahme, dass in jedem Augenblicke während der Schwingung, die durch einen Stoss an irgend einer Stelle hervorgebracht wurde, die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte aus der Gleichgewichtslage stets derart mit einander zusammenhängen, dass dasselbe System von Verschiebungen auch durch eine an der Stossstelle angreifende, geeignet gewählte Einzellast beim ruhenden Träger hervorgebracht werden könnte. Natürlich ist diese Annahme keineswegs genau richtig, da die Gestalten, die das schwingende Fachwerk der Reihe nach durchläuft, namentlich auch von der Art der Massenvertheilung abhängig sein müssen, auf die hier gar nicht geachtet wird. Zur Gewinnung einer ersten Annäherung ist die Annahme aber immerhin vielleicht ganz gut verwendbar.

An Stelle von Gl. (22) ist mit Berücksichtigung des neu hinzutretenden Gliedes jetzt zu schreiben

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx + k\frac{dx}{dt} = P\sin\eta t \tag{31}$$

und alle Eigenschaften der erzwungenen Schwingungen sind aus dem Integrale dieser Differentialgleichung abzuleiten.

Die allgemeine Lösung der Gl. (31) ist bekannt; sie setzt sich aus drei Gliedern zusammen, von denen die beiden ersten mit den willkürlichen Integrationsconstanten behaftet, aber von P und η unabhängig sind. Diese beiden Glieder bleiben übrig, wenn man P gleich Null setzt, d. h. sie entsprechen für sich genommen, den Eigenschwingungen des Punktes. Dazu kommt dann noch ein drittes Glied, das P und η, aber keine willkürliche Integrationsconstante enthält. Dieses Glied bleibt übrig, wenn die Integrationsconstanten in Folge der Anfangsbedingungen gleich Null sind, d. h. es bildet ein partikuläres Integral der Gl. (31).

Es erleichtert die Uebersicht über die Rechnungen, wenn man dieses dritte Glied, das hiernach für sich genommen, die Gleichung schon befriedigen muss, für sich betrachtet. Es möge mit x_2 bezeichnet werden; dann ist

$$x_2 = C\sin(\eta t + \varphi), \tag{32}$$

worin aber nun die beiden neu eingeführten Constanten C und φ nicht willkürlich sind, sondern durch Einsetzen von x_2 in die Gl. (31) so bestimmt werden müssen, dass diese Gleichung erfüllt wird. Man hat aus (32)

$$\frac{dx_2}{dt} = C\eta\cos(\eta t + \varphi),$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -C\eta^2\sin(\eta t + \varphi)$$

und Gl. (31) liefert daher beim Einsetzen dieser Werthe

$$-mC\eta^2\sin(\eta t + \varphi) + cC\sin(\eta t + \varphi) + kC\eta\cos(\eta t + \varphi) = P\sin\eta t.$$

Diese Gleichung soll für beliebige Werthe der Veränderlichen t erfüllt sein. Das ist aber nur möglich, wenn zwischen den

Constanten gewisse Beziehungen bestehen, zu deren Ableitung wir den Sinus und den Cosinus der Winkelsumme nach bekannten goniometrischen Formeln entwickeln. Bei passender Zusammenfassung der Glieder nimmt dann die Gleichung die Form an

$$\sin \eta t \{ -mC\eta^2 \cos \varphi + cC \cos \varphi - kC\eta \sin \varphi - P \}$$
$$+ \cos \eta t \{ -mC\eta^2 \sin \varphi + cC \sin \varphi + kC\eta \cos \varphi \} = 0.$$

Damit diese Gleichung für jeden Werth von t bestehe, muss jeder der beiden in den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke, die nur constante Grössen enthalten, für sich gleich Null sein. Damit haben wir die beiden Bedingungsgleichungen gewonnen, aus denen die Constanten C und φ berechnet werden können. Setzt man zunächst die zweite Klammer gleich Null, so folgt (da C nicht gleich Null sein kann, wenn P von Null verschieden ist) zunächst für φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{m\eta^2 - c}. \tag{33}$$

Hiermit ist φ als bekannt anzusehen. Aus der Bedingung, dass auch die erste Klammer verschwinden muss, folgt für C

$$C = \frac{P}{\cos \varphi \, (c - m\eta^2) - k\eta \sin \varphi}, \tag{34}$$

worin der Winkel φ auf Grund der vorhergegangenen Bestimmung als gegeben zu betrachten ist.

Mit diesen Werthen von C und φ stellt Gl. (32) eine mögliche Form der erzwungenen Schwingungen dar, die auch zur wirklichen wird, wenn die Anfangsbedingungen passend gewählt werden. Da ausserdem die beiden anderen Glieder, die in der allgemeinen Lösung noch hinzutreten, für sich dem Falle $P = 0$ entsprechen, also als Eigenschwingungen gedeutet werden können, die sich den durch Gl. (32) angegebenen hinzufügen, so beansprucht grade diese particuläre Lösung unser besonderes Interesse und sie soll daher zunächst weiter erörtert werden.

Gl. (32) stellt eine einfache ungedämpfte harmonische Schwingung dar. Ihre Schwingungsdauer ist nur von η ab-

hängig, also unabhängig von der Schwingungsdauer der Eigenschwingungen und auch unabhängig von der Masse des beweglichen Punktes, von der Grösse der elastischen Kraft und der Grösse des dämpfenden Widerstandes. Der grösste Ausschlag tritt aber nicht zur selben Zeit ein, in der die erregende Kraft ihren grössten Werth P annimmt, denn x hängt nach Gl. (32) von $\sin(\eta t + \varphi)$ anstatt von $\sin \eta t$ ab. Im Uebrigen durchläuft aber $\sin(\eta t + \varphi)$ dieselbe Werthereihe wie $\sin \eta t$, wobei zu gleichen Werthen immer derselbe Zeitunterschied von der Grösse $\frac{\varphi}{\eta}$ gehört. Man drückt dies dahin aus, dass zwischen der erzwungenen und der sie erregenden Schwingung des Werthes von P ein Phasenunterschied besteht. Der zugehörige Winkel φ, der aus Gl. (33) zu ermitteln ist, wird der Phasenverschiebungswinkel genannt. Aus dieser Gleichung folgt ferner, dass die Phasenverschiebung im Allgemeinen klein wird, wenn die Dämpfung k sehr gering ist; wenn sich die Dämpfung ganz vermeiden liesse, würde mit ihr auch der Phasenunterschied verschwinden. *Ein* Fall ist indessen hierbei gesondert ins Auge zu fassen, nämlich der, dass η grade einen solchen Werth hat, um den Nenner in Gl. (33) zum Verschwinden zu bringen.

Dies trifft zu, wenn

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (18) in § 4, so erkennt man, dass η in diesem Falle gleich der dort mit α bezeichneten Grösse wird, d. h. dass die erregende Schwingung gleiche Schwingungsdauer mit der Eigenschwingung des beweglichen Punktes ohne Dämpfung hat. In diesem Falle (d. h. im Falle der Resonanz, wie ich hier gleich hinzufügen will) wird $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, der Phasenverschiebungswinkel also ein rechter. Wollte man auch jetzt $k = 0$ setzen, so würde $\operatorname{tg} \varphi$ freilich in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftreten. Da aber eine Dämpfung thatsächlich niemals ganz vermieden werden kann, ist von

diesem Falle abzusehen. Vielmehr müssen wir für den Fall sehr geringer Dämpfung sagen, dass bei kleiner Schwingungsdauer der erregenden Schwingung, also bei grossem η, der Phasenverschiebungswinkel φ positiv und wenig von Null verschieden ist. Erst wenn die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung grösser gewählt wird, so dass sie der Eigenschwingungsdauer des beweglichen Punktes nahe rückt, fängt der Winkel φ plötzlich stark zu wachsen an, bis er für $\eta = \alpha$ zu einem rechten geworden ist. Wird die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung noch grösser gewählt, so wird $\operatorname{tg} \varphi$ negativ und nimmt bei hinreichendem Unterschiede zwischen η und α bald wieder bis nahezu auf Null ab.

Schon aus dieser Betrachtung erkennt man die grosse Bedeutung des besonderen Falles, dass η gleich oder nahezu gleich mit α wird. Sie tritt aber noch mehr hervor, wenn wir uns jetzt zur Besprechung der Constanten C wenden, die nach Gl. (32) die Amplitude der erzwungenen Schwingung darstellt. Zunächst lehrt Gl. (34), dass unter sonst gleichen Umständen C proportional mit P, der Schwingungsausschlag also proportional der erregenden Kraft wächst. Ausserdem hängt aber C auch von der Grösse des Nenners und hiermit ganz wesentlich von η, also von der Schwingungsdauer der erregenden Kraft ab.

Für $\eta = \alpha$, also im Falle der Resonanz, wie ich diesen vorher schon nannte, wird der Winkel φ zu einem rechten, $\sin \varphi$ also gleich der Einheit und $\cos \varphi$ gleich Null. Für C erhält man daher, vom Vorzeichen, das hier gleichgültig ist, abgesehen,

$$C_{\eta=\alpha} = \frac{P}{k\eta} = \frac{P}{k}\sqrt{\frac{m}{c}} \tag{35}$$

Dies wird aber für den Fall eines hinreichend kleinen Dämpfungsfaktors k ein sehr grosser Werth und wir sind damit zur Erklärung der bekannten Erfahrungsthatsache gelangt, dass sehr grosse Schwingungen namentlich dann erzwungen werden, wenn die erregende Ursache genau oder nahezu in denselben Intervallen periodisch auftritt, wie sie den Eigenschwingungen

des erregten Körpers entsprechen. Auch dann, wenn η nicht genau gleich α ist, wird C noch verhältnissmässig gross sein. Bei einem grösseren Unterschiede zwischen η und α wird aber C bald sehr viel kleiner; auf diese weitere Diskussion der Formeln kann ich jedoch verzichten.

Ich komme jetzt zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung (31), also zum allgemeinsten Falle der erzwungenen gradlinigen Schwingungen. Jene Glieder, die zur partikulären Lösung x_2 in Gl. (32) hinzutreten, um die allgemeine Lösung für die gradlinige Schwingung herzustellen, seien zu x_1 zusammengefasst, so dass also

$$x = x_1 + x_2$$

zu setzen ist. Um zu erkennen, welche Bedingungen von x_1 erfüllt werden müssen, setze ich $x_1 + x_2$ an Stelle von x in die Differentialgleichung (31) ein. Diese geht dann über in

$$\left[m\frac{d^2x_1}{dt^2} + cx_1 + k\frac{dx_1}{dt}\right] + \left[m\frac{d^2x_2}{dt^2} + cx_2 + k\frac{dx_2}{dt} - P\sin\eta t\right] = 0.$$

Da aber x_2 die Differentialgleichung schon selbst erfüllte, fallen die in der zweiten Klammer zusammengefassten Glieder gegen einander fort und man behält

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + cx_1 + k\frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Differentialgleichung (22) für die gedämpften Eigenschwingungen vollständig überein und es ist damit die schon vorher aufgestellte Behauptung bewiesen, dass der Bewegungsantheil, der durch x_1 dargestellt wird, aus Eigenschwingungen besteht.

Die allgemeine Lösung von Gl. (22) wurde in Gl. (23) in Exponentialform angegeben. Da aber der Exponent γ in unserem Falle als imaginär zu betrachten ist, führt man die Exponentialfunctionen besser sofort auf trigonometrische Functionen zurück. Mit Hülfe der Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \text{und} \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

erhält man aus Gl. (23)

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t}\{A(\cos\gamma' t + i\sin\gamma' t) + B(\cos\gamma' t - i\sin\gamma' t)\}$$
$$= e^{-\frac{k}{2m}t}\{(A+B)\cos\gamma' t + (A-B)\, i\sin\gamma' t\}.$$

Damit dieser Ausdruck reell wird, muss man sich unter den willkürlichen Constanten A und B jetzt zwei complexe Werthe denken, deren reelle Bestandtheile gleich und deren imaginäre Bestandtheile von gleicher Grösse aber entgegengesetztem Vorzeichen sind. An Stelle der Summe und der mit i multiplicirten Differenz von beiden führt man dann besser zwei neue Bezeichnungen A_1 und B_1 ein, die zwei neue ganz willkürliche reelle Constanten bedeuten. Für x_1 hat man dann

$$x_1 = e^{-\frac{k}{2m}t}\{A_1 \sin\gamma' t + B_1 \cos\gamma' t\} \tag{36}$$

und hiermit wird auch die vollständige Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen bekannt, nämlich

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t}\{A_1 \sin\gamma' t + B_1 \cos\gamma' t\} + C\sin(\eta t + \varphi). \tag{37}$$

Dass die Lösung vollständig ist, geht daraus hervor, dass sie die beiden willkürlichen Integrationsconstanten A_1 und B_1 enthält, womit man die Bewegung jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anzupassen vermag.

Aus Gl. (37) ist nun sofort ein wichtiger Schluss zu ziehen. Man denke sich den Anfangszustand beliebig gegeben und bestimme hiernach A_1 und B_1. Dann wird beim weiteren Fortschreiten der Zeit der Einfluss des ersten Gliedes wegen des Faktors $e^{-\frac{k}{2m}t}$, mit dem es behaftet ist, immer kleiner, während die Beiträge, die das letzte Glied zu den Ausschlägen liefert, constant bleiben, da sich C nicht ändert, so lange die erregende Ursache unverändert bestehen bleibt. Man erkennt hieraus, dass wegen der Dämpfung die Eigenschwingungen allmählich abklingen und dass der Punkt, nachdem er dem Einflusse der erregenden Ursache hinreichend lange überlassen war, schliesslich nur noch die durch das partikuläre Integral x_2 angegebene Bewegung ausführt.

Wir wollen ferner noch den Fall ins Auge fassen, dass der Punkt zur Zeit $t = 0$ in Ruhe war und erst von da an durch die erregende Ursache zum Schwingen gebracht wurde. Die Integrationsconstanten A_1 und B_1 sind dann aus den Bedingungen zu bestimmen, dass für $t = 0$, sowohl x als $\frac{dx}{dt}$ gleich Null zu setzen sind. Die erste Bedingung liefert die Gleichung

$$0 = B_1 + C \sin \varphi.$$

Für $\frac{dx}{dt}$ hat man ferner

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-\frac{k}{2m}t} \left\{ \sin \gamma' t \left(\frac{k}{2m} A_1 + \gamma' B_1 \right) + \cos \gamma' t \left(\frac{k}{2m} B_1 - \gamma' A_1 \right) \right\} \\ + C\eta \cos (\eta t + \varphi)$$

und für $t = 0$ hat man daher die Bedingung

$$0 = -\frac{k}{2m} B_1 + \gamma' A_1 + C\eta \cos \varphi.$$

Die Auflösung nach den beiden Unbekannten liefert

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -C \left(\frac{\eta}{\gamma'} \cos \varphi + \frac{k}{2m\gamma'} \sin \varphi \right) \\ B_1 &= -C \sin \varphi \end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Nach Einsetzen dieser Werthe in Gl. (37) kann man aus dieser sämmtliche Erscheinungen des Schwingungsverlaufs ableiten. Um nicht zu weitläufig zu werden, möchte ich dies jetzt nur unter der Voraussetzung thun, dass die Dämpfung sehr gering ist, so dass sie für den ersten Anfang vernachlässigt werden kann. Mit $k = 0$ vereinfacht sich dann Gl. (37) nach Einsetzen von A_1 und B_1 aus Gl. (38) zu

$$x = C \left\{ -\frac{\eta}{\gamma'} \cos \varphi \sin \gamma' t - \sin \varphi \cos \gamma' t + \sin (\eta t + \varphi) \right\}.$$

Zugleich ist aber für den Fall $k = 0$ aus den Gleichungen (33) und (34) zu entnehmen

$$\operatorname{tg} \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = 0 \quad \text{und} \quad C = \frac{P}{c - m\eta^2}.$$

Setzt man auch diese Werthe ein, so wird

$$x = \frac{P}{c - m\eta^2}\left\{-\frac{\eta}{\gamma'}\sin\gamma' t + \sin\eta t\right\}. \tag{39}$$

Beachtet man noch, dass für $k = 0$

$$\gamma' = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

gesetzt werden kann und führt man für diesen Werth wieder die frühere Bezeichnung α ein, so erhält man

$$x = \frac{P}{m(\alpha^2 - \eta^2)}\left\{\sin\eta t - \frac{\eta}{\alpha}\sin\alpha t\right\}.$$

Die Bewegung setzt sich hiernach aus zwei einfachen harmonischen Schwingungen zusammen, von denen die eine in der Schwingungsdauer mit den Eigenschwingungen, die andere mit den erregenden Schwingungen übereinstimmt. Die beiden einfachen Schwingungen interferiren, wie man sich ausdrückt, mit einander.

Um zum Falle der Resonanz überzugehen, nehme ich nun weiter an, dass η und α nur wenig von einander verschieden seien. In diesem Falle wird der Faktor vor der Klammer sehr gross. Zugleich wird freilich unmittelbar nach Beginn der Bewegung auch der Ausdruck in der Klammer sehr klein. Wenn die Zeit t fortschreitet, ändert sich dies aber und es kommen dann abwechselnd sehr grosse und sehr kleine Schwingungsausschläge zu Stande. Differentiirt man nämlich x nach t und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so erhält man als Bedingung für ein Maximum oder Minimum (d. h. für einen Schwingungsausschlag nach der positiven oder negativen Seite der X-Axe)

$$\cos\eta t = \cos\alpha t.$$

Diese Gleichung hat zur Folge, dass

$$\sin\eta t = \pm \sin\alpha t$$

sein muss. Wählt man das obere Vorzeichen, so gelangt man nur zu kleinen Werthen des Schwingungsausschlags. Für solche Werthe von t, bei denen das untere Vorzeichen zutrifft, kommen dagegen, falls hier zugleich $\sin\alpha t$ oder $\sin\eta t$ einen der Einheit nahen Absolutwerth hat, die grossen Ausschläge

zu Stande. Diese abwechselnden Anschwellungen und Verminderungen der Schwingungsausschläge (oder der Tonstärke, wenn es sich um Schallwellen handelt) werden in der Akustik als die „Schwebungen" der erzwungenen Schwingung bezeichnet.

Wenn die Dämpfung k nicht klein genug ist, muss natürlich auf die genauere Gl. (37) zurückgegriffen werden. Ebenso muss dies auch bei kleinem k immer dann geschehen, wenn die Zeit schon so weit fortgeschritten ist, dass sich $\frac{kt}{2m}$ merklich von Null unterscheidet. Die Schwebungen können sich daher immer nur zu Anfang der Erregung bemerklich machen; späterhin erlöschen die Eigenschwingungen und es bleibt nur die Schwingung von der Schwingungsdauer (oder der Tonhöhe) der Erregungsquelle zurück.

Anmerkung. Auch für den Fall der erzwungenen Schwingungen kann man (ebenso wie am Schlusse von § 5 bei den gedämpften Schwingungen) von der gradlinigen Schwingung, die hier vorläufig überall vorausgesetzt wurde, ohne Weiteres zu den Schwingungen in krummlinigen Bahnen übergehen. Die Differentialgleichung der Schwingung geht dann in eine Vektorgleichung über, ohne dass sich sonst etwas Wesentliches änderte. An Stelle von Gl. (31) hat man hier

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} + c\mathfrak{r} + k \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{P} \sin \eta t$$

zu schreiben und die partikuläre Lösung x_2 in Gl. (32) geht über in

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{C} \sin(\eta t + \varphi),$$

wobei für φ ebenfalls der Werth in Gl. (33) einzusetzen, $\mathfrak{C}$ dagegen als gerichtete Grösse aufzufassen ist, die parallel zu $\mathfrak{P}$ geht und deren absoluter Werth mit dem früheren C in Gl. (34) übereinstimmt.

Ebenso tritt an Stelle von x_1 hier $\mathfrak{r}_1$ und zwar in Uebereinstimmung mit der Lösung für die krummlinige gedämpfte Schwingung

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{A} e^{\alpha t} + \mathfrak{B} e^{\beta t}$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die als gerichtete Grössen auftretenden Integrationsconstanten bedeuten. Natürlich kann man bei kleiner Dämpfung, die zu imaginären Werthen von α und β führt, wieder von den

Exponentialfunctionen zu den trigonometrischen Functionen übergehen.

Ferner erkennt man aus der allgemeinen Lösung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2\,,$$

dass die Bahn der krummlinigen erzwungenen Schwingung im Allgemeinen eine Curve von doppelter Krümmung bildet. Nur wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{P}$ zufällig in eine Ebene fallen, ist die Bahn eine ebene Curve. Nach Erlöschen der Eigenschwingungen geht aber die erzwungene Schwingung auch in diesem allgemeineren Falle in eine gradlinige über.

§ 7. Die Planetenbewegung.

Von Kepler waren auf Grund der Beobachtung die drei Gesetze aufgestellt worden: 1) Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht, 2) der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, 3) die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Axen ihrer Bahnen. Diese Sätze genügten zur Beschreibung der Planetenbewegung; sie waren aber rein kinematisch und erst Newton hat eine mechanische Erklärung für diese Bewegungen gegeben, indem er sie auf die Wirkung von Anziehungskräften zurückführte. Wir wollen uns hier dieselbe Aufgabe stellen, wie sie Newton vorlag.

Zunächst können wir auf Grund des Flächensatzes schliessen, dass nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze die Bewegung eines Planeten durch eine Centralkraft erklärt werden kann, die von der Sonne auf den Planeten ausgeübt wird. Das erste Kepler'sche Gesetz muss uns dann dazu dienen, das Gesetz zu ermitteln, nach dem diese Kraft von der Entfernung des Planeten von der Sonne abhängt. Das dritte Kepler'sche Gesetz endlich lehrt uns, in welcher Beziehung die Kräfte zu einander stehen, die von der Sonne auf verschiedene Planeten übertragen werden.

Jedenfalls können wir einstweilen die Kraft $\mathfrak{P}$, die an einem Planeten angreift, in der Form

$$\mathfrak{P} = -\,\mathfrak{r} f(r) \tag{40}$$

darstellen, in der $f(r)$ eine vorläufig unbekannte Function der Entfernung r ist, deren Ermittelung unsere nächste Aufgabe bildet. Die Gleichung spricht einstweilen nur aus, dass $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke nach dem Anziehungscentrum hin gerichtet ist.

Wir brauchen zunächst eine auf den Brennpunkt bezogene Gleichung der Ellipse. Es wird besser sein, wenn ich diese nicht einfach aus der analytischen Geometrie übernehme, sondern sie auf Grund den bekannten Construction der Ellipse aus den beiden Brennpunkten mit Hülfe eines Fadens selbst ableite. In Abb. 8 ist S die Sonne, B der andere Brennpunkt, A ein beliebiger Punkt der Ellipse, $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor SA. Der Vektor BA vom anderen Brennpunkte nach A folgt aus dem Dreiecke ABS

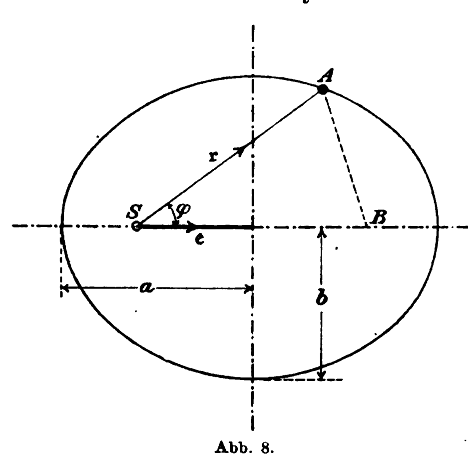


Abb. 8.

zu $\mathfrak{r} - 2\mathfrak{e}$, wobei auch die Excentricität $\mathfrak{e}$, wie aus der Abbildung zu entnehmen, als gerichtete Grösse eingeführt ist. Andererseits hat aber AB die Länge $2a - r$, denn der ganze Faden SAB ist gleich $2a$. Um dies auszudrücken, quadrire ich den Vektor BA, wodurch ich zu einer richtungslosen Grösse gelange, die nur noch das Quadrat der absoluten Länge angiebt. Ich setze also

$$(\mathfrak{r} - 2\mathfrak{e})^2 = (2a - r)^2$$

und erhalte nach Ausführung der Quadrirung, Wegheben von r^2 und Division mit 4

$$-\mathfrak{e}\mathfrak{r} + e^2 = a^2 - ar.$$

Wenn man A am Ende des senkrechten Halbmessers wählt, erkennt man aber, dass

$$a^2 - e^2 = b^2$$

ist und die vorige Gleichung kann daher einfacher

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r} = ar - b^2 \tag{41}$$

geschrieben werden. Das ist die Ellipsengleichung, die ich ableiten wollte. Ehe ich weiter gehe, möchte ich indessen noch darauf hinweisen, dass $\mathfrak{e}\mathfrak{r}$ auch gleich $er \cos \varphi$ geschrieben werden kann, so dass man durch Auflösen von Gl. (41) auch die gewöhnliche Gleichung der Ellipse in Polarcoordinaten

$$r = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi}$$

erhält, die an Stelle der Benutzung der Vektoren auch sehr leicht aus dem Cosinussatze für das Dreieck SAB abgeleitet werden kann. Für die weitere Rechnung ist es aber bequemer, die Gleichung in der Form (41) zu benutzen.

Mein nächstes Ziel ist jetzt die Aufstellung eines Ausdruckes für die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$, die der Planet erfährt. Dazu differentiire ich Gl. (41). Die einmalige Differentiation liefert

$$\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = a\frac{dr}{dt},$$

denn $\mathfrak{e}$ und b sind constant. Durch nochmalige Differentiation erhalte ich

$$\mathfrak{e}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = a\frac{d^2r}{dt^2}$$

oder nach Multiplikation mit m

$$\mathfrak{e} \cdot m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = am\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Für das Produkt aus Masse und Beschleunigung kann man auf der linken Seite die Kraft $\mathfrak{P}$ setzen und wenn man hierfür den in Gl. (40) gegebenen Ausdruck einführt, geht die Gleichung über in

$$-\mathfrak{e}\mathfrak{r}f(r) = am\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Damit sind wir auf der linken Seite zu dem inneren Produkte aus $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}$ zurückgelangt, für das man nach der

Ellipsengleichung (41) seinen Werth einsetzen kann. Man erhält so

$$f(r)\,(b^2 - ar) = am\,\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{42}$$

Hiermit sind wir zu einer Gleichung gelangt, die neben der unbekannten Function $f(r)$ noch den gleichfalls unbekannten Differentialquotienten $\frac{d^2r}{dt^2}$ enthält. Diese Gleichung allein reicht daher zur Ermittelung von $f(r)$ noch nicht aus. Wir müssen vielmehr noch eine Betrachtung zu Hülfe nehmen über das Gesetz, nach dem der Planet auf seiner Bahn im Verlaufe der Zeit fortschreitet.

Zu diesem Zwecke sei der Satz von der lebendigen Kraft benützt. Die lebendige Kraft des Planeten ist zunächst

$$L = \frac{1}{2}\,m\mathfrak{v}^2$$

oder, wenn wir uns die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in zwei Componenten zerlegt denken, von denen eine in die Richtung des Radiusvektors fällt und die andere dazu senkrecht steht,

$$L = \frac{1}{2}\,m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (ur)^2\right).$$

Hierin ist u die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Radiusvektor dreht. Für diese kann aber auf Grund des zweiten Kepler'schen Gesetzes ein einfacher Ausdruck angegeben werden. Im Zeitelemente dt wird nämlich der Sektor

$$\frac{1}{2}\,r^2u\,dt$$

überstrichen und das Produkt $\frac{1}{2}r^2u$ ist demnach eine Constante, die ich mit c bezeichnen will; sie ist nichts anderes als die „Sektorengeschwindigkeit". Ihr Werth folgt übrigens sofort aus der Umlaufsdauer T des Planeten und dem Flächeninhalte der Ellipse, d. h. aus der Gleichung

$$cT = \pi ab \quad \text{zu} \quad c = \frac{\pi ab}{T}.$$

Einstweilen sei aber dafür die einfachere Bezeichnung c beibehalten. Man hat nun

$$u = \frac{2c}{r^2}$$

und wenn man dies einsetzt, geht der Ausdruck für die lebendige Kraft über in

$$L = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{4c^2}{r^2} \right).$$

Die Aenderung der lebendigen Kraft ist nun gleich der von der Kraft $\mathfrak{P}$ geleisteten Arbeit. Um dies in Form einer Gleichung auszusprechen, differentiire ich L nach t und erhalte

$$\frac{dL}{dt} = m \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \frac{dr}{dt} \right).$$

Die von $\mathfrak{P}$ im Zeitelemente dt geleistete Arbeit ist gleich

$$-\mathfrak{r} f(r) \cdot d\mathfrak{r} \quad \text{oder gleich} \quad -r f(r) dr,$$

denn dr ist die Projektion von $d\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{r}$. Nach Division mit dt muss dieser Werth gleich dem Differentialquotienten von L sein. Hebt man bei der Gleichung, die so entsteht, noch den gemeinsamen Faktor $\frac{dr}{dt}$ auf beiden Seiten weg, so bleibt

$$m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \right) = -r f(r). \tag{43}$$

Das ist nun eine zweite Gleichung, die grade wie Gleichung (42) ausser $f(r)$ nur noch den unbekannten Werth von $\frac{d^2r}{dt^2}$ enthält. Wir können daher beide Gleichungen nach diesen Unbekannten auflösen. Es genügt, wenn ich hier nur den Werth von $f(r)$ anschreibe, der hierbei erhalten wird. Multiplicirt man Gl. (43) mit a und addirt sie zu Gl. (42), so entsteht

$$f(r)\,(b^2 - ar) - am \frac{4c^2}{r^3} = -ar f(r)$$

und hieraus

$$f(r) = am \frac{4c^2}{b^2 r^3}.$$

Schliesslich setzen wir noch den vorher ermittelten Werth der Sektorengeschwindigkeit c ein und finden

$$f(r) = \frac{4\pi^2 a^3 m}{r^3 T^2}. \tag{44}$$

Hiermit ist unsere Aufgabe im Wesentlichen gelöst. Denn die Kraft $\mathfrak{P}$ wird jetzt durch den Ausdruck

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{45}$$

genau nach Grösse und Richtung angegeben. Ich habe diesen Ausdruck sofort in drei Faktoren zerlegt. Nur der erste Faktor ist veränderlich. Da $\mathfrak{r}$ ebenfalls die Grösse r besitzt und nur daneben noch die Richtung zum Ausdrucke bringt, erkennen wir, dass die Grösse von $\mathfrak{P}$ dem Quadrate des Abstandes von der Sonne umgekehrt proportional ist. Der zweite Faktor ist die Masse m des Planeten. Die Bedeutung des dritten Faktors bedarf noch einer besonderen Besprechung.

Zu diesem Zwecke ziehen wir nun auch noch das dritte Kepler'sche Gesetz heran. Nach diesem ist für alle Planeten das Verhältniss $\frac{a^3}{T^2}$ constant. Nach Gl. (45) heisst dies, dass alle Planeten, wenn sie in gleiche Abstände von der Sonne gebracht würden, gleiche Anziehung in Bezug auf die Masseneinheit erfahren müssten. Hiernach sind alle Planeten aus Stoffen zusammengesetzt, die in Bezug auf die Eigenschaft der Gravitation gleichwerthig untereinander sind. Oder mit anderen Worten: Gleichen trägen Massen auf den verschiedenen Planeten entsprechen auch gleiche gravitirende Massen.

An dieser Stelle ist nämlich darauf hinzuweisen, dass die Bezeichnung Masse, die bei allen übrigen Anwendungen der Mechanik stets in dem Sinne gebraucht wird, den ich im I. Bande dieser Vorlesungen auseinandergesetzt habe, in der Mechanik der Himmelskörper noch auf einen anderen Begriff übertragen wird, der aber von jenem scharf auseinander zu halten ist. Dies ist im vorhergehenden Satze dadurch geschehen, dass in ihm zwischen trägen und zwischen gravitirenden Massen unterschieden ist. Die trägen Massen sind jene, die auf Grund der Trägheitserscheinungen der Materie erkannt und gemessen werden können, also jene, mit denen wir uns früher ausschliesslich beschäftigten. Der Begriff der „gravi-

tirenden“ Massen ist dagegen neu eingeführt. Es sind jene Massen, die nach dem Newton'schen Gesetze anziehend aufeinander wirken und deren Grösse auf Grund der Gravitationserscheinungen abgeschätzt wird. An und für sich wäre es durchaus möglich, dass man zu ganz verschiedenen Werthen für gegebene Massen gelangte, jenachdem man sie auf die eine oder auf die andere Art abschätzte. Erst das dritte Kepler-sche Gesetz lehrt uns, dass wenigstens innerhalb der Planeten kein solcher Unterschied besteht, dass vielmehr die nach den Anziehungskräften, die sie aufeinander ausüben, abgeschätzten Massen ebenso gross (oder im gleichen Verhältnisse zu einander) gefunden werden, als wenn man diese Massen auf Grund des Trägheitsgesetzes ermittelt. Hiermit erklärt es sich, dass man gewöhnlich keinen Unterschied zwischen der trägen und der gravitirenden Masse macht.

Zugleich weise ich noch darauf hin, dass es keineswegs im Widerspruche mit den allgemeinen Grundsätzen der Mechanik wäre, wenn etwa plötzlich auf unserer Erde irgend ein Stoff (vielleicht ein seltenes Metall o. dgl.) entdeckt würde, von dem sich herausstellte, dass das Verhältniss zwischen gravitirender Masse und träger Masse bei ihm anders wäre, als bei allen übrigen uns seither bekannten Körpern. Wir wollen uns zunächst überlegen, woran man ein abweichendes Verhalten dieser Art erkennen könnte und um mich dabei bestimmter ausdrücken zu können, will ich etwa annehmen, der Körper heisse X und seine gravitirende Masse wäre im Verhältnisse zur trägen doppelt so gross, als bei anderen Stoffen. Ich denke mir zunächst auf einer Waage 1 kg dieses Stoffes abgewogen. Hierbei kommt die gravitirende Masse in Frage, denn das Gewicht, das am Waagebalken mit dem Gewichte eines 1 kg-Stücks im Gleichgewichte steht, kommt von der Anziehung her, die die Erde auf den Körper X ausübt und diese erfolgt nach dem Gesetze der allgemeinen Massenanziehung.

Nun denke man sich das abgewogene Stück des Körpers X gleichzeitig mit dem gleich schweren eisernen Gewichts-

stücke, das zum Abwägen diente, dem freien Falle überlassen. An beiden wirkt die gleiche Kraft, aber nach der Voraussetzung, die wir über die Sonderstellung des Stoffes X gemacht haben, ist die träge Masse des X-Stückes nur halb so gross, als die träge Masse des gleich schweren Eisenstücks. Die träge Masse ist es aber, die in der dynamischen Grundgleichung auftritt. Wir schliessen, dass die Beschleunigung des Stoffes X doppelt so gross sein müsse, als die des Eisenstücks oder als die aller übrigen irdischen Körper, die man bisher darauf hin untersucht hat. In der That ist es also die durch die Beobachtung festgestellte Thatsache der gleichen Fallbeschleunigung am gleichen Orte für alle Körper, die uns das gleiche Verhältniss zwischen träger und gravitirender Masse für die irdischen Körper verbürgt. Das dritte Kepler'sche Gesetz dehnt diese Erfahrung auf den Raum des Planetensystems aus.

Newton war sich übrigens, als er das Gravitationsgesetz aufstellte, offenbar recht wohl bewusst, dass träge und gravitirende Massen nicht ohne Weiteres mit einander verwechselt werden dürfen, dass vielmehr eine besondere Prüfung erforderlich sei, inwieweit beide mit einander proportional sind. In der That hat er auch eine Reihe von Fallversuchen mit verschiedenen Körpern ausgeführt, um sich zu überzeugen, ob die Fallbeschleunigung in Wirklichkeit bei allen genau gleich gross sei. Was Newton nöthig erschien, wird heute meist als entbehrlich angesehen. Man hat in dem jetzt zu Ende gelangten Jahrhundert manches neue Element entdeckt und sobald ein solcher Fund gelungen war, hat man sich beeilt, alle übrigen physikalischen Constanten des neuen Ankömmlings zu erforschen. Einen Nachweis, dass auch die Fallbeschleunigung des neuen Körpers mit dem Werthe g übereinstimme, hat man aber wohl in keinem Falle für nöthig gehalten. Es ist freilich auch höchst unwahrscheinlich — wenn auch keineswegs unmöglich —, dass man einmal eine Abweichung von dem Gesetze der Constanz von g für alle Körper entdecken könnte.

Ob das Verhältniss zwischen trägen und gravitirenden Massen auch noch ausserhalb unseres Sonnensystems den gleichen Werth hat, als bei uns, vermag Niemand zu sagen. Man nimmt dies freilich stillschweigend gewöhnlich an, aber nur rein hypothetisch, denn Niemand vermag eine Beobachtung anzugeben, die zum Beweise dafür dienen könnte. Ich habe sogar früher einmal darauf hinweisen können (in einer Abhandlung, die in den Berichten der Bayer. Akad. d. Wissensch., Bd. 27, 1897 erschien), dass dieses Verhältniss zwischen beiden Arten von Massen ausserhalb des Sonnensystems gelegentlich sogar das Vorzeichen wechseln könnte, so dass sich gewisse Massen nicht anzögen, sondern abstiessen, ohne dass diese Voraussetzung auf einen Widerspruch mit den vorhandenen Beobachtungen am Fixsternhimmel zu stossen brauchte, während sich zugleich gewisse Wahrscheinlichkeitsgründe anführen lassen, die einer solchen Vermuthung günstig sind.

Innerhalb unseres Sonnensystems kann aber die Proportionalität zwischen trägen und gravitirenden Massen im Allgemeinen als sicher festgestellt betrachtet werden. Wenn wir nach dieser Erkenntniss zur Deutung von Gl. (45) zurückkehren, kann kein Zweifel mehr darüber bestehen, was für eine Rolle der für das ganze Planetensystem constante letzte Faktor in dem dort gefundenen Ausdrucke für die Anziehungskraft spielt. Offenbar hängt nämlich diese Anziehung nicht nur von dem Planeten, dessen Masse m schon als Faktor in der Formel auftritt, sondern auch von den Eigenschaften der Sonne ab. Wenn wir annehmen, dass auch die Sonne aus Stoffen besteht, die in dieser Hinsicht jenen der Planeten gleichen, müssen wir schliessen, dass die Kraft $\mathfrak{P}$ auch der Sonnenmasse proportional sein muss. Der letzte Faktor, dessen Bedeutung wir noch suchten, stellt daher entweder die Sonnenmasse selbst oder ein Vielfaches derselben vor. Wenn wir die Sonnenmasse mit M bezeichnen, lässt sich demnach Gl. (45) auch in der Form

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \cdot K \cdot mM \qquad (46)$$

anschreiben und damit haben wir das Newton'sche Gravitationsgesetz. Der Faktor K ist eine Constante, die eine besondere, aus Gl. (46) leicht festzustellende physikalische Dimension hat und deren Zahlenwerth daher von den gewählten Fundamentaleinheiten abhängt. In astronomischen Rechnungen pflegt man, unter Uebergehung der in der irdischen Physik üblichen Fundamentaleinheiten die Maasseinheiten so zu wählen, dass die Constante K in Gl. (46) den Zahlenwerth 1 annimmt. Man schreibt dann Gl. (46) auch in der Form

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \cdot Mm,$$

muss aber dabei wohl beachten, dass diese Gleichung nicht mehr homogen in den Dimensionen ist und nur für das specielle Maasssystem gültig bleibt. Legt man aber dieses zu Grunde, so folgt nun auch

$$M = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}, \tag{47}$$

womit die Sonnenmasse berechnet werden kann. Diese Gleichung wird auch benutzt, um die Masse von Fixsternen zu berechnen, die einen Begleiter haben, dessen Bahn sich beobachten lässt. Nach dem, was ich vorher hierüber bemerkte, findet man aber hierbei nur die gravitirende Masse und es bleibt zweifelhaft, ob die träge Masse jenes fernen Centralkörpers dazu in dem uns gewohnten Verhältnisse steht.

Im Wesentlichen bin ich jetzt mit der Untersuchung, die ich über die Planetenbewegung mitzutheilen gedachte, zu Ende gelangt. Es bleibt mir nur noch übrig, ein paar kurze ergänzende Bemerkungen nachzutragen.

Zunächst erwähne ich, dass man die Aufgabe natürlich auch umkehren, also die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes voraussetzen und danach die Planetenbahnen berechnen kann. Man findet dann als bemerkenswerthe Ergänzung, dass ein in den Anziehungsbereich der Sonne gekommener Körper auch eine Hyperbel oder Parabel als Bahn beschreiben kann. In dieser Form macht die Lösung der Aufgabe etwas mehr Schwierigkeiten, weil es sich dabei um eine

Integration handelt, während wir nur mit Differentationen zu thun hatten. In der That rührt auch die Lösung dieser umgekehrten Aufgabe gar nicht von Newton selbst her, sondern diese Ergänzung der Newton'schen Theorie gelang erst Bernoulli.

Ebenfalls erst nach Newton (zuerst von Euler) wurde darauf hingewiesen, dass eine Verbesserung der Theorie unter Berücksichtigung des Gesetzes der Aktion und Reaktion erforderlich sei. Wenn nämlich die Sonne eine Kraft auf den Planeten ausübt, so muss umgekehrt auch der Planet die Sonne mit einer ebenso grossen Kraft anziehen. Daher kann auch die Sonne nicht in Ruhe bleiben. In Ruhe bleibt vielmehr der Schwerpunkt beider Körper und beide bewegen sich in Ellipsen um den Schwerpunkt. Wegen der viel grösseren Masse der Sonue ist indessen die von der anziehenden Kraft an ihr hervorgebrachte Beschleunigung weit geringer als beim Planeten und es genügt daher in erster Annäherung, die Sonne als feststehend zu betrachten.

Auch diese erweiterten Untersuchungen machen heute gar keine Schwierigkeiten mehr. Dagegen ist es bisher noch nicht gelungen, das berühmte Problem der drei Körper zu lösen. Es handelt sich dabei um die Aufgabe, die Bewegungen von drei materiellen Punkten anzugeben, die nach dem Newton'schen Gesetze auf einander wirken, wenn die Anfangslagen und die Anfangsgeschwindigkeiten beliebig gegeben sind. Die Schwierigkeit der Lösung ist indessen nicht in Mängeln der Mechanik begründet, sondern von rein mathematischer Art. Die dynamische Grundgleichung liefert nämlich sofort die Differentialgleichungen der Bewegung, aber die Integration der Gleichungen ist bisher nicht geglückt, trotz aller Anstrengungen, die seit langer Zeit von den hervorragendsten Mathematikern auf die Lösung dieses Problems verwendet wurden. Bei der Theorie der Mondbewegung und der Störungstheorie, wo es sich um die Berücksichtigung der von mehr als einem beweglichen Anziehungscentrum ausgehenden Kräfte handelt, muss man sich daher mit Annäherungen begnügen, die besonders dadurch

ermöglicht werden, dass eine Kraft gegenüber den anderen weit überwiegt.

Anmerkung. Schliesslich soll noch eine zweite Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen gegeben werden, die vor der vorigen den Vorzug hat, dass sie allgemeiner, nämlich auch auf andere Arten der Centralbewegung anwendbar ist und dass sie zugleich erkennen lässt, wie die umgekehrte Aufgabe gelöst werden kann, die Bahn des bewegten Punktes zu bestimmen, wenn das Anziehungsgesetz gegeben ist. — Zuerst schliesst man wieder nach dem Flächensatze auf Grund des zweiten Kepler-schen Gesetzes, dass die beobachtete Bewegung durch eine Centralkraft zu erklären ist. Die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ des bewegten Punktes fällt daher jedenfalls in die Richtungslinie des vom Anziehungscentrum nach ihm gezogenen Radiusvektors. In dieser Richtung sei ferner noch ein Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ gezogen, so dass

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_1$$

gesetzt werden kann. Daraus erhält man durch Differentationen nach der Zeit

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = r\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \mathfrak{r}_1\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = r\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \mathfrak{r}_1\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Da der letzte Werth in die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ fällt, erhalten wir seinen absoluten Betrag, wenn wir ihn auf $\mathfrak{r}_1$ projiciren, d. h. wenn wir den Ausdruck auf der rechten Seite gliedweise mit $\mathfrak{r}_1$ auf innere Art multipliciren. Wir finden

$$\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} + 2\,\mathfrak{r}_1\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet, da $\mathfrak{r}_1$ der Grösse nach constant und nur der Richtung nach veränderlich ist, daher

$$\mathfrak{r}_1 \perp \frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}$$

steht und das innere Produkt aus beiden gleich Null ist. Für das erste Glied erhält man durch einfache Umformung

$$\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right) - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}$$

oder, da das erste Glied der rechten Seite nach der vorhergehenden Bemerkung verschwindet,

$$\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} = -\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} = -\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\left(r\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \mathfrak{r}_1\frac{dr}{dt}\right) = -r\left(\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right)^2.$$

Setzt man dies ein, so findet man

$$\mathfrak{r}_1 \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -r\left(\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right)^2 + \frac{d^2r}{dt^2}$$

Der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}$ giebt seiner Grösse nach die Winkelgeschwindigkeit u an, mit der sich der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r}_1$ dreht und da es bei dem Quadrate nur auf die absolute Grösse ankommt, erhalten wir daher schliesslich für die Beschleunigung des bewegten Punktes den einfachen Ausdruck

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2\right). \qquad (47a)$$

Diese Gleichung gilt für jede Centralbewegung, also für jede Bewegung, von der wir entweder aus der Beobachtung wissen, dass die Sektorengeschwindigkeit constant ist oder bei der von vornherein vorausgesetzt wird, dass sie durch eine Centralkraft hervorgebracht wird.

Um auf die Planetenbewegung zu kommen, nehme man die schon vorher erwähnte Gleichung der Ellipse in Polar-Coordinaten

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi}$$

hinzu, aus der durch Differentation nach der Zeit zunächst

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{b^2}{(a - e\cos\varphi)^2}\cdot e\sin\varphi\cdot u = -\frac{r^2}{b^2}ue\sin\varphi$$

folgt. Hierbei ist aber noch zu beachten, dass r^2u nach dem Flächensatze constant ist und gleich dem Doppelten $2c$ der Sektorengeschwindigkeit c gesetzt werden kann. Man hat daher auch

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2ce}{b^2}\sin\varphi$$

und daraus durch nochmalige Differentation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2ce}{b^2}\cos\varphi\cdot u$$

oder, indem man für $\cos\varphi$ seinen Werth aus der Ellipsengleichung einsetzt und u in c ausdrückt,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2c}{b^2}\cdot\frac{ar - b^2}{r}\cdot\frac{2c}{r^2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. (47a) ein und drückt auch dort u in c aus, so erhält man

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(-\frac{4c^2}{b^2}\cdot\frac{ar - b^2}{r^3} - \frac{4c^2}{r^3}\right) = -\mathfrak{r}_1\cdot\frac{4c^2a}{b^2r^2} = -\mathfrak{r}_1\cdot\frac{4\pi^2a^3}{T^2r^2}$$

wenn zuletzt noch für c der früher schon dafür aufgestellte Werth eingesetzt wird. Multiplicirt man noch mit der Masse m des Pla-

neten, so erhält man wieder die früher schon auf anderem Wege abgeleitete Formel (45) für das Gravitationsgesetz.

Um ferner die umgekehrte Aufgabe zu lösen, die zu einem angegebenen Anziehungsgesetze gehörige Bahn des bewegten Punktes zu finden, geht man ebenfalls von Gl. (47a) aus, indem man sie mit dem für das Anziehungsgesetz gegebenen Ansatze verbindet. Für das Newton'sche Gravitationsgesetz z. B. ist

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\mathfrak{r}_1 \cdot \frac{k}{r^2},$$

wenn k eine von den Massen (und den gewählten Einheiten) abhängige Constantè bedeutet. In Verbindung mit Gl. (47a) folgt daraus

$$-\frac{k}{r^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r u^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3}. \tag{47b}$$

Hiermit hat man schon eine Differentialgleichung, die r als Funktion der Zeit darstellt. Um daraus die Differentialgleichung der Bahn zu finden, betrachte man den Winkel φ als die unabhängige Veränderliche, von der t und r unbekannte Funktionen sind. Aus

$$\frac{d\varphi}{dt} = u = \frac{2c}{r^2}$$

folgt dann zunächst

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{2c} \quad \text{oder auch} \quad r^2 = 2c\frac{dt}{d\varphi}$$

und wenn man dies in Gl. (47b) einsetzt,

$$-k = 2c\frac{dt}{d\varphi}\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r},$$

wofür auch

$$2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right) + k = \frac{4c^2}{r}$$

oder auch

$$2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) + k = \frac{4c^2}{r}$$

und schliesslich auch

$$2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{2c}{r^2}\right) + k = \frac{4c^2}{r} \tag{47c}$$

geschrieben werden kann. Hiermit ist die Zeit eliminirt und man hat die Differentialgleichung der Bahn, durch die r als Funktion von φ dargestellt wird, vor sich. Die Integration kann leicht ausgeführt werden. Man führe dazu eine neue Variable z ein, indem man

$$z = \frac{1}{r}$$

setzt, wobei z ebenso wie r als Funktion von φ zu betrachten ist. Dann folgt

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

und Gl. (47c) vereinfacht sich hiermit zu

$$-4c^2\frac{d^2z}{d\varphi^2} + k = 4c^2z, \tag{47d}$$

deren allgemeines Integral

$$z = \frac{k}{4c^2} + A\sin\varphi + B\cos\varphi \tag{47e}$$

lautet, worin A und B die aus den Anfangsbedingungen zu ermittelnden Integrations-Constanten bedeuten. Die Gleichung der Bahn lautet daher

$$r = \frac{1}{\frac{k}{4c^2} + A\sin\varphi + B\cos\varphi} \tag{47f}$$

und dies ist allgemein die Gleichung eines Kegelschnitts. Die weitere Diskussion der Gleichung hätte an dieser Stelle keinen Zweck.

§ 8. Näherungstheorie für das einfache Pendel.

An einem Faden, der als gewichtslos und unausdehnbar betrachtet werden kann, hänge ein kleiner schwerer Körper herab, den man als materiellen Punkt ansehen kann. Man soll die Bewegung angeben, die dieser Punkt unter dem Einflusse der Schwere, aber ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes und anderer Nebenumstände ausführt, wenn er aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und nach Ertheilung einer mit den Bedingungen der Aufhängung verträglichen, sonst aber beliebigen Geschwindigkeit sich selbst überlassen wird.

Auch das durch die erwähnten Voraussetzungen vereinfachte Problem der Pendelbewegung macht noch erhebliche Schwierigkeiten. Diese verringern sich aber bedeutend, wenn man sich ferner noch auf die Untersuchung unendlich kleiner Pendelschwingungen beschränkt. Wirklich unendlich kleine Schwingungen können nun freilich keinen Gegenstand der Beobachtung bilden und überhaupt keinen Anspruch auf physikalische Bedeutung machen. Sehr häufig sind aber die Schwingungsbahnen wenigstens ziemlich klein gegenüber der

Länge des Aufhängefadens und man gelangt dann zu einer angenäherten Lösung der Aufgabe, die um so besser zutrifft, je kleiner jenes Verhältniss in Wirklichkeit ist. Desshalb sollen die Schwingungen hier unter der Voraussetzung untersucht werden, dass sie als unendlich klein angesehen werden könnten.

Schliesslich soll zunächst ausserdem noch angenommen werden, dass die Pendelschwingungen in einer durch den Aufhängepunkt gelegten lothrechten Ebene erfolgen. Dass eine solche Bewegung überhaupt möglich ist, sieht man sofort ein; sie muss immer dann zu Stande kommen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes in der durch den Faden gelegten lothrechten Ebene enthalten ist.

Die Bahn des Punktes ist ein unendlich kleiner Kreisbogen, der durch die tiefste Lage geht, die der Punkt überhaupt einnehmen kann und sie wird unter dem Einflusse von zwei Kräften, nämlich dem Gewichte des Punktes und der Fadenspannung beschrieben. Der Punkt erfährt beim Durchlaufen der Bahn neben Horizontalverschiebungen auch Hebungen und Senkungen, die aber von höherer Ordnung unendlich klein sind. Man kann daher von der Vertikalbewegung des Punktes absehen, falls man sich überall nur mit der Untersuchung der von der ersten Ordnung unendlich kleinen Grössen begnügt. Freilich darf man dann z. B. den Satz von der lebendigen Kraft nicht heranziehen, denn da auch die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke unendlich klein bleibt, ist die lebendige Kraft, die von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt, ebenfalls unendlich klein von der zweiten Ordnung.

Zunächst schliessen wir, dass die Resultirende aus Gewicht und Fadenspannung keine Vertikalcomponente von endlicher Grösse haben kann. Die Horizontalcomponente ist gleich $F \sin \varphi$ (Abb. 9) und daher mit φ unendlich klein von der ersten Ordnung. Die Fadenspannung F kann hiernach von dem Gewichte Q nur unendlich wenig verschieden sein, so dass wir an Stelle von $F \sin \varphi$ auch $Q \sin \varphi$ schreiben können, oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von φ auch

$$Q\frac{x}{l},$$

wenn l die Fadenlänge bedeutet. Die Horizontalbewegung des Punktes erfolgt unter dem Einflusse dieser Horizontalcomponenten der Resultirenden aus F und Q. Wir sehen, dass die Kraft proportional mit dem Ausschlage x und nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet ist. Aus § 4 wissen wir aber, dass eine Kraft, die dieses Gesetz befolgt, zu einer einfachen harmonischen Schwingung führt. Wir können daher die Lehren jenes Paragraphen ohne Weiteres auf den uns jetzt beschäftigenden Fall übertragen. Dabei ist nur an Stelle der dort mit c bezeichneten Constanten hier

$$c = \frac{Q}{l}$$

zu setzen und die Masse m im Gewichte Q auszudrücken. Für die Dauer einer vollen Schwingung erhält man daher nach Gl. (20)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Abb. 9.

Freilich wird grade bei Pendelschwingungen sehr häufig nach einfachen Schwingungen oder „Pendelschlägen" gerechnet. So versteht man unter einem Sekundenpendel ein Pendel, das die ganze Schwingungsbahn einmal in einer Sekunde zurücklegt, ohne die zum Durchlaufen der Schwingungsbahn auf dem Rückweg erforderliche Zeit mitzurechnen. Unter der Dauer eines Pendelschlages ist daher die Hälfte des in Gl. (48) angegebenen Werthes zu verstehen.

Die Pendelschwingungen sind hiernach, solange sie überhaupt nur als unendlich klein angesehen werden können, isochron, also unabhängig von dem besonderen Werthe des unendlich kleinen Ausschlags. Auch die früheren Betrachtungen über gedämpfte und erzwungene Schwingungen lassen sich sofort auf die unendlich kleinen Pendelschwingungen übertragen.

Ferner können wir jetzt auch die Voraussetzung fallen lassen, dass die Pendelbewegung eine ebene sei. Sofern nur

die Entfernung aus der Gleichgewichtslage stets unendlich klein bleibt, ist die Resultirende aus F und Q nach der Gleichgewichtslage hin gerichtet und der Entfernung von ihr proportional. Die Horizontalprojektion der Bahn des beweglichen Punktes beschreibt demnach, wie wir aus § 4 wissen, eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit der Gleichgewichtslage zusammenfällt und die Schwingungsdauer ist ebenso gross wie im Falle der ebenen Schwingungen.

§ 9. Genauere Theorie der ebenen Pendelschwingungen.

Die vorigen Betrachtungen reichen zwar gewöhnlich für die Anwendungen aus. Bei grossen Ausschlägen werden sie aber unzuverlässig und es ist daher eine Ergänzung nöthig, die jedoch nur für den einfacheren und praktisch besonders wichtigen Fall der ebenen Schwingungen gegeben werden soll.

Wir müssen hier vor Allem auf die Wege achten, die der materielle Punkt in lothrechter Richtung zurücklegt. In Abb. 10 sei α der Ausschlag des Pendels, φ gebe die augenblickliche Stellung an. Der Höhenunterschied beider Lagen ist in der Abbildung mit z bezeichnet. Er ist gleich dem Unterschiede zwischen den Vertikalprojektionen der Fadenlänge l in beiden Lagen und daher

$$z = l(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Abb. 10.

Wir wenden jetzt den Satz von der lebendigen Kraft an. Die Fadenspannung F leistet keine Arbeit, da sie in jedem Augenblicke senkrecht zur Bewegungsrichtung steht und die Arbeit von Q ist für eine Bewegung aus der Lage α in die Lage φ (oder umgekehrt) gleich Qz (oder $-Qz$). In der Lage α ist die Geschwindigkeit und mit ihr die lebendige Kraft gleich Null. Wenn also von Bewegungswiderständen abgesehen wird, muss die lebendige Kraft in der Lage φ gleich Qz sein. Wir haben also

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = Qz$$

und berechnen daraus die Geschwindigkeit v in der Lage φ zu

$$v = \sqrt{2gz} = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}. \tag{49}$$

Der Weg im Zeitelemente dt ist vdt. Wir können dafür auch $ld\varphi$ schreiben, so dass also $d\varphi$ die zur Zeit dt gehörige Richtungsänderung des Fadens bedeutet. Hiermit erhalten wir

$$ld\varphi = dt\sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Diese Gleichung lösen wir nach dt auf, da es uns vor Allem darauf ankommen muss, die Zeit zu berechnen, die während der Bewegung aus einer Lage in die andere verstreicht. Wir finden

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}. \tag{50}$$

Die ganze Zeit, die der Punkt braucht, um etwa aus der Lage φ in die Lage α zu gelangen, folgt hieraus durch eine Integration zwischen den Grenzen φ und α. Man wird sich besonders für die Zeit interessiren, die zum Durchlaufen des halben Schwingungsbogens von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$ erforderlich ist. Wir bezeichnen diese Zeit mit t; sie ist der vierte Theil der Dauer einer vollen Schwingung. Denn es ist klar, dass bei der Bewegung in umgekehrter Richtung (von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = 0$) ebensoviel Zeit vergeht als auf dem Hinwege, da die Geschwindigkeit in jeder Stellung nur von z abhängt und daher in beiden Fällen gleich gross ist. Das Gleiche gilt auch für die Bewegung auf der anderen Seite der Gleichgewichtslage. Für t haben wir also

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}. \tag{51}$$

Die einzige Schwierigkeit der genaueren Theorie der Pendelbewegung besteht nun darin, dass dieses Integral nicht auf die gewöhnlichen einfachen Functionen zurückgeführt werden

kann, sondern ein elliptisches ist. Da jedoch Tafeln der elliptischen Integrale berechnet und in vielen Formelbüchern abgedruckt sind, ist darauf nicht viel Gewicht zu legen. Es wird sich nur darum handeln, das Integral so umzuformen, dass sein Zahlenwerth in einem gegebenen Falle ohne Weiteres in den Tabellen aufgeschlagen werden kann. Ein Techniker, der für theoretische Untersuchungen dieser Art gut veranlagt ist, thut auch wegen mancher anderen Anwendungen der elliptischen Integrale gut daran, sich an ihren Gebrauch etwa ebenso zu gewöhnen, wie an den der trigonometrischen Functionen oder der Logarithmen.

Zum Zwecke der vorzunehmenden Umformung mache ich zunächst von der goniometrischen Formel

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Gebrauch. Mit ihrer Hülfe geht Gl. (51) über in

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{52}$$

An Stelle der Veränderlichen φ wird jetzt eine neue Veränderliche ψ eingeführt mit Hülfe der Substitution

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi. \tag{53}$$

Hiermit wird φ zu α, wenn ψ ein rechter Winkel ist. Um $d\varphi$ in $d\psi$ ausdrücken zu können, differentiiren wir die Gleichung und erhalten.

$$\frac{1}{2}\,d\varphi\cos\frac{\varphi}{2} = d\psi\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi$$

und hieraus, wenn wir $\cos\frac{\varphi}{2}$ in $\sin\frac{\varphi}{2}$ ausdrücken und Gl. (53) berücksichtigen,

$$d\varphi = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}\,d\psi.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in Gl. (52) geht diese über in

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\psi}{\sqrt{\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 - \sin^2\psi)}}\, d\psi.$$

Hier hebt sich aber $\cos\psi$ im Zähler gegen den gleichwerthigen Faktor im Nenner weg u. s. f. und man behält

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}. \tag{54}$$

Damit ist die verlangte Umformung vollzogen, denn das hier noch vorkommende Integral kann bei gegebenem α ohne Weiteres in den Tafeln aufgeschlagen werden. Es wird nach Legendre, von dem auch die erste Berechnung der Tafeln herrührt, die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung genannt und mit dem Buchstaben F bezeichnet, wobei man den Werth von $\sin\frac{\alpha}{2}$ und die obere Grenze $\frac{\pi}{2}$, die andeutet, dass das Integral ein vollständiges ist, in Klammern beifügt. An Stelle von Gl. (54) kann daher auch

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, F\left(\sin\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{55}$$

geschrieben werden, wobei noch zu bemerken ist, dass in manchen Tafeln an Stelle von $\sin\frac{\alpha}{2}$ kürzer ein einziger Buchstabe, gewöhnlich ε geschrieben ist. Es wird gut sein, wenn ich hier auszugsweise wenigstens eiu paar Werthe der Function F anführe. Man hat für

$\frac{\alpha}{2} =$	0^0	$2{,}5^0$	5^0	10^0	20^0
$F\left(\sin\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =$	1,5708	1,5715	1,5738	1,5828	1,6200
$=$	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0.
$=$	1,6858	1,8541	2,1565	2,7681	∞

Man erkennt hieraus, dass die Pendelbewegung bei grösseren Ausschlägen nicht mehr isochron ist. Wenn der Ausschlag α nur 5^0 beträgt $\left(\text{also } \frac{\alpha}{2} = 2{,}5^0\right)$, ist zwar F nur etwa um $\frac{1}{2000}$ des Werthes, den es für $\alpha = 0^0$ annimmt, vergrössert; nachher wächst aber F viel rascher und mit ihm die Schwingungsdauer.

Die Dauer einer vollen Schwingung ist übrigens, wie schon vorher bemerkt wurde, das Vierfache von t, also

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F\left(\sin\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{56}$$

Für unendlich kleine Schwingungen stimmt dies mit Gl. (48) des vorigen Paragraphen zusammen, denn F geht in diesem Falle, wie auch aus der kleinen Tabelle entnommen werden kann, in $\frac{\pi}{2}$ über.

Für solche Fälle schliesslich, bei denen α zwar noch ziemlich klein ist (vielleicht zwischen 5^0 und 30^0), bei denen man sich aber mit der Genauigkeit der Annäherungsformel (48) nicht begnügen kann, benutzt man häufig eine andere Formel, die eine viel grössere Annäherung gewährt und die Benutzung einer Tabelle über die Function F entbehrlich macht. Diese soll jetzt auch noch abgeleitet werden. Hierzu knüpfe ich an Gl. (54) an und mache darauf aufmerksam, dass der unter dem Wurzelzeichen im Nenner stehende Ausdruck $\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi$ stets ein ziemlich kleiner echter Bruch bleibt. Höchstens kann nämlich dieser Bruch den Werth $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ annehmen und wenn z. B. der Ausschlag α selbst 30^0 beträgt, so ist doch $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ nur etwa 0,067, also jedenfalls gering gegenüber dem andern Gliede 1 unter dem Wurzelzeichen. In solchen Fällen kann man mit geringem Fehler die Wurzel durch einen einfacheren Werth ersetzen. Ist nämlich m eine Grösse, die klein ist von der ersten Ordnung, so ist bis auf Grössen von der zweiten Ordnung genau

$$\sqrt{1-m} = 1 - \frac{m}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1-m}} = 1 + \frac{m}{2},$$

wovon man sich am einfachsten durch Ausquadriren überzeugt. Sonst kann man aber auch sagen, dass es sich hierbei nur um eine Reihenentwickelung nach dem binomischen Lehrsatze für gebrochene und negative Exponenten handelt, die wegen des an und für sich schon kleinen Werthes von m sehr schnell convergiert, so dass man schon mit dem zweiten Gliede abbrechen kann. Zugleich erkennt man hieraus auch, dass sich die Reihe ohne Weiteres fortsetzen liesse, wenn etwa noch eine höhere Genauigkeit, als wir sie jetzt anstreben, verlangt werden sollte.

Machen wir von dieser Näherungsformel Gebrauch, so erhalten wir an Stelle von Gl. (54)

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi\right) d\psi.$$

Diese Integration kann aber sofort ausgeführt werden; dabei ist zu beachten, dass

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \, d\psi = \frac{\pi}{4}$$

ist, eine Formel, die auch sonst so häufig (namentlich in der Elektrotechnik, bei der Lehre von den Wechselströmen) gebraucht wird, dass man gut thut, sie sich besonders zu merken. Sie sagt aus, dass der durchschnittliche Werth von Sinusquadrat für alle Winkel von Null bis zu einem rechten gleich $\frac{1}{2}$ ist, und dass dies so sein muss, erkennt man sofort, wenn man beachtet, dass der Cosinus in diesem Intervalle, wenn auch in umgekehrter Reihenfolge, doch dieselbe Werthreihe durchläuft, wie der Sinus und dass daher der durchschnittliche Werth von Cosinusquadrat ebenso gross sein muss als der von Sinusquadrat. Da nun die Summe aus Cosinusquadrat und Sinusquadrat stets 1 liefert, folgt, dass jeder von beiden Mittelwerthen gleich $\frac{1}{2}$ sein muss. Um das obenstehende

Integral zu erhalten, braucht man nun blos den Mittelwerth $\frac{1}{2}$ mit dem ganzen Bogen $\frac{\pi}{2}$, nach dem integrirt wird, zu multipliciren, um das Resultat $\frac{\pi}{4}$ zu finden. Mit dieser Begründung, die ohne Rechnung angestellt werden kann, merkt man sich die Formel am besten, denn wenn man auch vergessen haben sollte, wie viel das Integral ausmacht, kann man dies nach kurzem Besinnen auf Grund der vorausgehenden Ueberlegung sofort wieder angeben.

Führen wir nun die Integration aus, so erhalten wir

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Wenn α nicht zu gross, $\frac{\alpha}{2}$ hiermit erst recht nicht gross ist, kann man an Stelle des Sinus, wenn man will, auch den Bogen setzen. Nimmt man ausserdem noch das Vierfache, so erhält man für die Dauer einer vollen Schwingung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \tag{57}$$

Das letzte Glied in der Klammer bildet das Correctionsglied der mehr angenäherten Formel gegenüber der gewöhnlich gebrauchten einfachen Formel (48).

§ 10. **Schwingungen auf der Cycloide.**

Beim Pendel ist der bewegliche Punkt genöthigt, auf einem Kreise zu bleiben. Man gelangt zu Bewegungen, die den Pendelschwingungen ganz nahe verwandt sind, wenn man den Kreisbogen durch irgend eine andere Curve ersetzt. Von besonderem Interesse ist hier namentlich die Bewegung auf der Cycloide.

Man untersucht diese genau nach derselben Methode wie die Pendelbewegung. Zunächst sei eine Gleichung der Cycloide abgeleitet, wobei von der bekannten Erzeugungsweise der Cycloide durch Rollen eines Kreises auf einer Geraden ausgegangen werden soll. Der Winkel φ, den die Tangente mit

der X-Axe bildet (siehe Abb. 11), ist gleich dem Winkel, den die Sehne vom Berührungspunkte des Erzeugungskreises nach dem Cycloidenpunkte mit der Y-Axe bildet, denn diese Sehne geht durch den augenblicklichen Drehpunkt des Erzeugungskreises und steht daher senkrecht auf dem Wege des erzeugenden Punktes, also senkrecht auf der Tangente. Hieraus folgt

Abb. 11.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{2r - y},$$

wobei die dem Winkel φ gegenüberliegende Kathete einstweilen mit u bezeichnet ist. Für u selbst findet man nach dem Satze über die Proportionen der Abschnitte von Kreissehnen, die sich schneiden

$$u = \sqrt{y(2r - y)}$$

und hiermit erhält man als Differentialgleichung der Cycloide

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}, \tag{58}$$

mit deren Integration wir uns hier nicht aufzuhalten brauchen.

Ich nehme jetzt an, dass ein materieller Punkt (selbstverständlich ohne Reibung!) von einem Punkte in der Höhe h herabrolle oder auch — was für die Vorstellung gewöhnlich bequemer ist, weil dann die Coordinaten mit der Zeit wachsen —, dass der Punkt auf der Cycloide hinaufrolle und dass h die grösste Höhe sei, die er hierbei erreicht. Dann kann nach dem Satze von der lebendigen Kraft die Geschwindigkeit v in der Höhe y genau wie beim Pendel

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

gesetzt werden und die Zeit dt, die beim Durchlaufen eines Bogens ds verstreicht, ist

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2g(h-y)}} = dy \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(h-y)}}$$

oder wenn man den reciproken Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus Gl. (58) einsetzt

$$dt = dy \sqrt{\frac{r}{gy(h-y)}}.$$

Die Zeit, die der Punkt braucht, um die halbe Schwingungsbahn von $y = 0$ bis $y = h$ einmal zurückzulegen, sei wieder mit t bezeichnet. Dann ist

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y(h-y)}}. \tag{59}$$

Hier ist aber das Integral viel leichter auszuführen, als bei den Pendelschwingungen. Allgemein ist nämlich

$$\int \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = -\arcsin \frac{\frac{h}{2} - y}{\frac{h}{2}},$$

wovon man sich durch Ausführung der Differentiation leicht überzeugt. Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 0 und h, so erhält man

$$-\arcsin(-1) + \arcsin(+1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

und hiermit geht Gl. (59) über in

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Die Dauer einer vollen Schwingung auf dem Cycloidenbogen ist das Vierfache hiervon, wofür man schreiben kann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}. \tag{60}$$

Zunächst erkennt man hieraus, dass die Schwingungsdauer auch für Ausschläge von beliebiger endlicher Grösse streng isochron ist, während dies bei den Pendelschwingungen nur für kleine

Schwingungen annähernd zutraf. Ferner lehrt der Vergleich mit Gl. (48), dass die Pendellänge, die bei kleinen Schwingungen zu dem gleichen Werthe der Schwingungsdauer führt, wie die Schwingung auf der Cycloide, $l = 4r$ gewählt werden muss. Es ist aber eine hier als bekannt vorauszusetzende Eigenschaft der Cycloide, dass der Krümmungshalbmesser im Scheitel gleich dem Vierfachen vom Radius des Erzeugungskreises ist. Dies zeigt uns, dass wir nur so lange auf einen Isochronismus der Pendelschwingungen rechnen können, als wir uns den Kreisbogen durch einen kleinen Cycloidenbogen vom gleichen Krümmungsradius ersetzt denken können. Je grösser der Ausschlag des Pendels wird, um so mehr weichen die Cycloide und ihr Krümmungskreis von einander ab, und um so ungenauer wird es, wenn wir die eigentlich nur für die Cycloide gültige Formel für die Schwingungsdauer auch bei der Pendelbewegung als gültig betrachten.

Es sei noch erwähnt, dass man einen schweren Punkt leicht zwingen kann, auf einer Cycloide zu schwingen, wenn man ihn an einem Faden aufhängt, der sich beim Schwingen an zwei beiderseits vom Aufhängepunkte angebrachte Backen anlegt, die nach der Evolute der Curve begrenzt sind. Versuche mit solchen Cycloidenpendeln werden häufig in Vorlesungen über Experimentalphysik vorgeführt, um durch den Versuch nachzuweisen, dass die Schwingungsdauer unabhängig von der Grösse des Ausschlags ist.

Wegen der seither besprochenen Eigenschaft pflegt man die Cycloide auch als die Tautochrone zu bezeichnen. Sie hat aber zugleich noch eine andere Eigenschaft, zu deren Besprechung ich jetzt übergehen will und der sie den Namen Brachistochrone verdankt. Sie ist nämlich jene Curve, auf der ein Punkt in kürzerer Zeit als auf jeder anderen von einer gegebenen Stelle zu einer anderen gegebenen Stelle, die tiefer liegt als die erste, hinabrollt.

Um die Aufgabe in möglichst anschaulicher Form vorzubringen, erinnere ich an den Rücklauf, den man bei Kegelbahnen anwendet, um die Kugeln den Spielern wieder zu-

6*

zuführen. Man könnte diesen Rücklauf zunächst gradlinig anordnen; dabei würde es aber ziemlich lange dauern, bis die Kugel den Weg zurückgelegt hätte. Desshalb pflegt man den Rücklauf im Anfange viel steiler anzulegen und ihn nachher flacher verlaufen zu lassen. Der Gewinn, den man hierdurch erzielt, liegt ohne jede Rechnung auf der Hand. Wenn die Kugel nämlich schon zu Anfang ihrer Bahn um ein grosses Stück der verfügbaren Höhe herabsinkt, so erlangt sie sehr bald eine verhältnissmässig grosse Geschwindigkeit, mit der sie dann die ganze weitere Bahn durcheilt, während sie bei gradlinigem Rücklaufe eine so grosse Geschwindigkeit erst gegen Ende ihrer Bahn erlangen könnte.

Soweit es sich nur um die Kegelbahn handelt, ist damit die Sache im Wesentlichen schon erledigt. Man wird gut thun, dem flacheren Theile der Bahn ein solches Gefäll zu geben, dass die Bewegungswiderstände dadurch ungefähr aufgehoben werden und den hiernach verfügbaren Rest des Gefälles am Anfange des Rücklaufes in einer steilen Curve, auf deren besondere Form praktisch nicht viel ankommt, zusammenzudrängen. So wird es auch in der Regel ungefähr gemacht.

Man wird sich aber auf Grund dieser Ueberlegungen sofort die weitere Frage stellen, welche Gestalt man der Curve des Rücklaufs geben müsste, um bei Vernachlässigung von Bewegungswiderständen u. dgl. die allerkürzeste Zeit für die Rücklaufbewegung zu erhalten. Dabei bemerke ich noch, dass hierbei auch von der Rotation, die die Kugel in Wirklichkeit erlangt, abgesehen werden soll, damit wir sie mit Recht als materiellen Punkt ansehen können. Wenn die Kugel niemals auf der Unterlage gleiten könnte, würde die günstigste Form der Curve hiervon freilich nicht beeinflusst, da das Verhältniss zwischen Rotations- und Translationsenergie immer denselben Werth hätte und die Zeitdauer der Rücklaufbewegung in jedem Falle nur im Ganzen in einem entsprechenden constanten Verhältnisse vergrössert würde. Das ist aber, wie schon aus Bd. I, Aufg. 29, S. 277 der 2. Aufl. hervorgeht, im Allgemeinen keineswegs zu erwarten. Desshalb schon müssen sich zwischen

der „theoretischen“ Lösung des unter den einfachsten Bedingungen behandelten Problems und den auf die Nebenumstände wenigstens schätzungsweise Rücksicht nehmenden „praktischen“ Erwägungen Unterschiede einstellen, die den Werth der theoretischen Untersuchung stark einschränken. Desshalb pflege ich auch in den Vorlesungen selbst diese Betrachtung nicht mit vorzubringen; ich denke aber, dass es gut sein wird, wenn ich wenigstens in dem gedruckten Buche die Aufgabe löse, da sich doch wohl der Eine oder der Andere dafür interessiren dürfte.

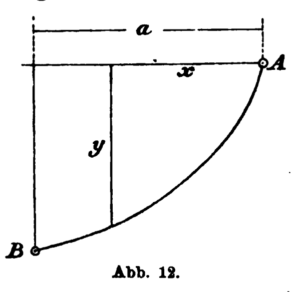


Abb. 12.

In Abb. 12 sei also A die Stelle, in der der materielle Punkt seinen Lauf ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt und B sei der Punkt, nach dem er in möglichst kurzer Zeit längs der Curve AB hinabgleiten soll. Die Geschwindigkeit im Punkte xy ist, wie wir schon wissen,

$$v = \sqrt{2gy},$$

die Zeit, die zum Durchlaufen eines Bahnelementes ds gebraucht wird,

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}$$

und die ganze Zeit für das Durchlaufen der Curve AB wird

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}}\, dx, \tag{61}$$

wenn a die Abscisse des Punktes B ist. Dieser Ausdruck soll nun durch eine geeignete Wahl der Curvenform zu einem Minimum gemacht werden. Die nothwendige Bedingung dafür besteht darin, dass die Variation des Werthes von t, die zu einer willkürlichen unendlich kleinen Aenderung der Curven-

form gehört, zu Null wird. Wenn wir uns die Curve AB durch irgend eine benachbarte ersetzt denken, wird sich jede Ordinate y um ein kleines Stück δy ändern und wir haben zunächst einen Ausdruck für die Aenderung aufzustellen, die dadurch in dem Werthe von t herbeigeführt wird. Zunächst ist klar, dass die Gesamtänderung des Integrals gleich der Summe der Aenderungen aller seiner einzelnen Elemente ist. Wir bilden also zunächst die Variation

$$\delta \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}}.$$

Der Ausdruck, der sich verändert, ist aber eine bekannte Function von y und $\frac{dy}{dx}$ und wir können daher die Aenderung des ganzen Ausdrucks nach den Regeln der Differentialrechnung in den Variationen von y und $\frac{dy}{dx}$ ausdrücken. Allgemein gesagt ist

$$\delta F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \delta\,\frac{dy}{dx}$$

und wenn wir dies auf den vorliegenden Fall anwenden, erhalten wir

$$\delta \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}} = -\frac{1}{2}\,y^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \delta y + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\,\delta\,\frac{dy}{dx}.$$

Nun ist aber nach dem Begriffe der Veränderung, um die es sich hier handelt,

$$\delta\,\frac{dy}{dx} = \frac{d(y+\delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx}.$$

Wir haben daher jetzt für die Variation von t vorläufig den Ausdruck

$$\delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[-\frac{1}{2\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \delta y + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \frac{d\delta y}{dx} \right] dx. \tag{62}$$

Um ihn weiter umzugestalten, nehmen wir am zweiten Gliede in der Klammer eine partielle Integration vor. Dies kommt darauf hinaus, dass wir nach dem Satze über die Differentiation eines Produkts setzen

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \delta y\right] - \delta y \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right]$$

und nun auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und a integriren. Wir erhalten dann

$$\int_0^a \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

$$= \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \delta y\right]_0^a - \int_0^a \frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right] \cdot \delta y \cdot dx. \tag{63}$$

Beim ersten Gliede auf der rechten Seite liess sich nämlich

die Integration sofort ausführen und das bestimmte Integral ist gleich der Differenz der Klammerwerthe für $x = 0$ und $x = a$. Nun sind aber die Punkte A und B der Curve fest gegeben; wie wir also auch die Gestalt der Curve sonst ändern mögen, an diesen beiden Stellen ist jedenfalls $\delta y = 0$.

Da nun δy in dem Klammerwerthe als Faktor vorkommt, erkennen wir, dass dieser Werth an der oberen Grenze $x = a$ jedenfalls verschwindet. An der unteren Grenze ist dieser Schluss freilich nicht ohne Weiteres zulässig, weil hier auch y im Nenner zu Null wird. Für den unbestimmten Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ setzen wir daher nach bekannten Regeln

$$\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\delta y\right)}{\frac{d}{dx}\sqrt{y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right]_{x=0}.$$

Nun ist aber

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\delta y\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{dy}{dx}\,\delta\,\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\sqrt{y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right]_{x=0} = \left[\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}\cdot\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}}\right]_{x=0}.$$

Das Verhältniss beider Werthe wird daher

$$\left[2\delta\frac{dy}{dx}\cdot\sqrt{\frac{y}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right]_{x=0}$$

und dies liefert wegen des Faktors y jedenfalls Null. In der That fällt also das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (63) vollständig fort und das auf der linken Seite stehende Integral kann ohne Weiteres durch das Integral im zweiten Gliede der rechten Seite ersetzt werden. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir daher jetzt an Stelle von Gl. (62)

$$\delta t = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^a \left[\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right)\right]\delta y\,.\,dx. \tag{64}$$

Dieser Ausdruck soll nun für die Curve, die wir suchen, zu Null werden. Dabei ist δy sonst ganz beliebig wählbar und nur an die Bedingung gebunden, dass es an beiden Grenzen verschwindet. Das Integral kann daher nur dann für jede Wahl von δy zu Null werden, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer selbst Null ist. Denn wäre dies nicht an jeder Stelle der Curve der Fall, so könnte man δy überall so wählen, dass es gleiches Vorzeichen mit dem Ausdrucke in der eckigen Klammer hätte und dann würde das Integral als eine Summe von lauter positiven Gliedern jedenfalls nicht zu Null. Für die durch diese Verschiebungen δy neugewonnene Nachbarcurve wäre dann δt jedenfalls negativ, d. h. die zuerst gegebene Curve beanspruchte eine längere Fallzeit t als die neugefundene. Als nothwendige Bedingung für die Brachistochrone haben wir daher

$$\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right) = 0.$$

Durch Ausführung der Differentiation im zweiten Gliede und nach einer Reihe elementarer algebraischer Umformungen des zunächst ziemlich weitläufig herauskommenden Ausdrucks auf der linken Seite geht die Gleichung über in

$$\frac{2y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\sqrt{y^3\cdot\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}} = 0.$$

Da sie für alle Werthe von x gültig sein soll, kann dies nur dadurch geschehen, dass der Zähler überall zu Null wird. —

Wir haben also für die gesuchte Curve die Differentialgleichung

$$2y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0. \tag{65}$$

Um sie zu integriren, multipliciren wir zunächst mit $\frac{dy}{dx}$ und erhalten

$$2y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{dy}{dx}=0.$$

Die beiden ersten Glieder der linken Seite lassen sich nun zu einem einzigen Differentialquotienten nach x zusammenfassen, so dass die Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(y\left(\frac{dy}{yx}\right)^2\right)+\frac{dy}{dx}=0$$

geschrieben werden kann. Die Integration liefert

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=C,$$

also bei Auflösung nach dem Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{C-y}{y}}. \tag{66}$$

Der Vergleich mit Gl. (58), die wir früher als Differentialgleichung der Cycloide ermittelt hatten, zeigt schon, dass die gesuchte Curve eine Cycloide ist. Man muss dabei nur auf die jetzt etwas anders gewählte Bezeichnung achten. Schreibt man an Stelle von $C-y$ kürzer z, so geht Gl. (66) über in

$$\frac{dz}{dx}=\mp\sqrt{\frac{z}{C-z}}$$

und diese Gleichung für die von unten her gezählte Ordinate z stimmt nun ganz mit Gl. (58) überein, wenn man $C=2r$ setzt. Die Integrationsconstante C giebt hiernach den Durchmesser des Rollkreises an, durch den man sich die Cycloide erzeugt denken kann.

Auch die endliche Gleichung der Cycloide kann aus Gl. (66) sofort durch eine einfache Quadratur gefunden werden. Man schreibt die Gleichung in der Form

$$dx=dy\sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

und erhält hieraus durch Integration

$$x = K - \sqrt{Cy - y^2} - \frac{C}{2} \arcsin \frac{C - 2y}{C}. \qquad (67)$$

Die neu auftretende Integrationsconstante K folgt aus der Bedingung, dass die Curve durch den Punkt A gehen soll. Für $x = 0$ muss daher auch $y = 0$ sein, also

$$0 = K - \frac{C}{2} \arcsin (1)$$

und hieraus

$$K = \frac{\pi}{4} C.$$

Durch zwei Punkte A und B kann man unendlich viele Cycloidenbögen mit senkrechter Axe legen. Unter diesen besitzt aber nur ein einziger die von uns verlangte Minimumseigenschaft, denn auch die andere Integrationsconstante C wird durch die Bedingung bestimmt, dass die Curve durch den Punkt B gehen soll. Anstatt aber die Coordinaten von B in die Cycloidengleichung einzusetzen und die sich hieraus ergebende transcendente Gleichung nach C aufzulösen, bedenkt man einfacher, dass nach Gl. (66) für $y = 0$ jedenfalls $\frac{dy}{dx} = \infty$ werden muss, d. h. dass die Tangente der Curve dort in lothrechter Richtung geht. Der materielle Punkt beginnt daher seine Fallbewegung auf der Curve zuerst lothrecht nach abwärts. Oder mit anderen Worten: die Horizontale durch A ist die Gerade, auf der der Erzeugungskreis vom Durchmesser C rollen muss, um die Cycloide zu beschreiben. Denkt man sich nun alle Cycloiden, die dieser Bedingung genügen, vom Punkte A aus gezogen, so sind alle ähnliche und ähnlich liegende Curven und nur eine von ihnen geht durch den Punkt B. Man findet aber diese sofort heraus, wenn man zuerst nur irgend eine Cycloide construirt und dann die Verbindungsgerade AB zieht (vgl. Abb. 13 a. f. S.), deren Schnittpunkt mit der Cycloide B' heissen möge. Wenn etwa AB' kleiner ist als AB, muss man hierauf die Cycloide im Verhältnisse $AB : AB'$ vergrössern (vom Aehnlichkeitscentrum A aus), worauf die gesuchte Brachistochrone gefunden wird.

Wenn die horizontale Entfernung beider Punkte erheblich grösser ist als die vertikale (wie bei der Kegelbahn) erlangt die Brachistochrone die in Abb. 13 angegebene Gestalt. Die Kugel sinkt zuerst viel tiefer, erlangt dadurch eine erheblich grössere Geschwindigkeit und kann daher den etwas grösseren Weg doch in kürzerer Zeit zurücklegen, als bei einer flacheren Form des Rücklaufs. Die Zeit die nun mindestens nöthig ist, um den Punkt auf der günstigsten Curve blos durch den Einfluss der eigenen Schwere von A nach B gelangen zu lassen, folgt leicht aus Gl. (59). Für die in Abb. 13 angegebenen Verhältnisse wird diese Zeit

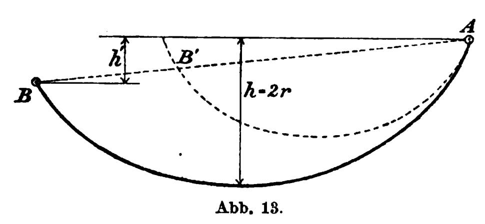


Abb. 13.

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + \text{arc sin} \frac{r-h'}{r} \right\},$$

wobei h' direct gegeben und r aus der vorher beschriebenen Construction zu entnehmen ist.

Ein Zahlenbeispiel möge dies noch näher erläutern. Die horizontale Entfernung der Punkte A und B sei 10 m, der Höhenunterschied 1 m. Dann ist die zum Durchlaufen einer gradlinigen Bahn zwischen A und B erforderliche Zeit, wenn auf Bewegungswiderstände und auf die durch das Rollen der Kugel herbeigeführte langsamere Bewegung wie seither schon keine Rücksicht genommen wird, gleich 4,52 sec. Verbindet man dagegen A und B durch eine Kreisbahn, die in B eine horizontale Tangente hat, so wird die Zeit gleich 3,57 sec. Für die Brachistochrone endlich berechnet sich die Zeit auf 2,06 sec.

Will man die rollende Bewegung berücksichtigen, nimmt aber dafür an, dass in keinem Falle ein Gleiten der Kugel vorkäme, so beachte man, dass zur Geschwindigkeit v des Kugelmittelpunktes eine Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{\varrho}$ gehört, wenn ϱ den Kugelradius bedeutet. Die ganze lebendige Kraft L der Kugel ist daher

$$L = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\,\frac{v^2}{\varrho^2}$$

oder, wenn man für das Trägheitsmoment Θ der Kugel seinen Werth

$$\Theta = \frac{2}{5}\frac{Q}{g}\varrho^2$$

einsetzt (vgl. Bd. I, S. 278, 2. Auflage), so folgt

$$L = 0{,}7\,\frac{Q}{g}v^2.$$

Die lebendige Kraft ist gleich der von der Schwere geleisteten Arbeit, also ebenso gross als die lebendige Kraft des materiellen Punktes sein würde, wenn er nur gleitete und nicht rollte. Daher wird v jetzt überall gegenüber dem früher vorausgesetzten Falle im Verhältnisse $\sqrt{\frac{5}{7}}$ verkleinert und die Zeit zum Durchlaufen der Bahn in allen vorher betrachteten Fällen im Verhältnisse $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1{,}183$ vergrössert.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die Cycloide ihre Eigenschaft als Brachistochrone auch zwischen irgend zwei beliebig auf ihr ausgewählten Punkten behält, wie schon daraus hervorgeht, dass es sonst möglich sein müsste, auch bei der ganzen vorher betrachteten Bahn durch eine Abänderung der Curve zwischen diesen beiden Punkten eine kürzere Fallzeit herbeizuführen. Man muss nur beachten, dass in diesem Falle der materielle Punkt, wenn er in den Anfangspunkt des betrachteten Curvenstücks gelangt, schon eine gewisse Geschwindigkeit besass, während seither immer vorausgesetzt wurde, dass die Bewegung vom oberen Punkt A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnen sollte.

Wird also die Aufgabe gestellt, eine Brachistochrone zwischen zwei Punkten A und B anzugeben, unter der Voraussetzung, dass der bewegliche Punkt mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 in A auf die Bahn gebracht wird, so berechne man zunächst

$$h'' = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Diese Grösse h'' giebt an, um wie viel die Abscissenaxe oder mit anderen Worten die Gerade, auf der der Erzeugungskreis der Cycloide rollt, über dem Punkte A liegt. Dann hat man eine hierzu gehörige Cycloide durch die Punkte A und B zu legen; diese ist die verlangte Brachistochrone. Die Aufgabe ist durch die genannten Angaben eindeutig bestimmt und kann auf constructivem Wege mit Berücksichtigung des Umstandes, dass alle Cycloiden einander ähnlich sind, leicht gelöst werden.

Aufgaben.

1. Aufgabe. Was folgt aus dem Flächensatze, wenn man ihn auf den schiefen Wurf eines Steines im luftleeren Raume anwendet?

Lösung. Als äussere Kraft wirkt an dem Steine nur die Schwere. Wir können uns diese vom „Mittelpunkte" der Erde ausgehend denken und sie sonach als eine Centralkraft auffassen. Dann muss für diesen Punkt als Momentenpunkt das statische Moment der Bewegungsgrösse constant sein. Um dieses Moment für irgend eine Stelle der Wurfbahn zu berechnen, denken wir uns den Hebelarm dahin gezogen und die dazu senkrechte Componente der Geschwindigkeit mit ihm multiplicirt. Gegenüber dem Erdhalbmesser sind aber die Erhebungen der Wurfbahn nur sehr klein und wir können daher die Hebelarme für alle Stellen der Wurfbahn als gleich gross ansehen. Daher muss auch der andere Faktor des statischen Moments constant sein, d. h. die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit wird während des Wurfes nicht geändert.

Hiermit sind wir freilich nur zu einem Resultate gelangt, das vorher schon aus einfacheren Betrachtungen bekannt war. Wie schon früher bemerkt wurde, zeigt sich aber der Nutzen des Flächensatzes erst bei Aufgaben über Punkthaufen oder über starre Körper im rechten Lichte. Bei der Dynamik des einzelnen materiellen Punktes kann er gewöhnlich leicht entbehrt werden.

Wenn die Wurfbahn als sehr hoch im Vergleiche zum Erdhalbmesser vorausgesetzt wird, ist es freilich nicht mehr zulässig, den Hebelarm überall als gleich gross anzusehen. In der That wird aber auch dann die ganze Bewegung geändert. Der Stein (z. B. ein Meteorstein, der in die Nähe der Erdoberfläche gelangt) bewegt sich dann im Allgemeinen nicht mehr in einer Parabel, sondern längs eines elliptischen Bogens, wie es bei der Planetenbewegung besprochen wurde (oder auch längs einer Hyperbel). Die Wurfbahn darf daher immer nur so lange als Parabel auf-

gefasst werden, als ihre Abmessungen wirklich als klein gegenüber dem Erdhalbmesser vernachlässigt werden können.

2. *Aufgabe. Von einem Anziehungscentrum geht eine Kraft aus, die im Abstande a die Grösse P_a hat und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Wie gross ist das Potential des Kraftfeldes im Abstande x, wenn die willkürliche Constante, die darin vorkommt, so gewählt wird, dass das Potential in unendlicher Ferne zu Null wird?*

Lösung. Wir wählen als Integrationsweg eine vom Anziehungscentrum ausgehende Gerade und als Anfangspunkt O den unendlich fernen Punkt dieser Geraden. Dann ist in Gl. (10)

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}$$

die Constante V_O gleich Null zu setzen. Wir haben daher

$$V = -\int_\infty^x \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s} = \int_x^\infty \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}.$$

Hier sind $\mathfrak{P}$ und $d\mathfrak{s}$ entgegengesetzt gerichtet. Im Abstande z ist

$$P = P_a \frac{a^2}{z^2}$$

und, wenn wir für $d\mathfrak{s}$ jetzt dz schreiben, erhalten wir

$$V = -\int_x^\infty P_a \frac{a^2}{z^2}\, dz = P_a a^2 \left[\frac{1}{z}\right]_x^\infty = -P_a \frac{a^2}{x}.$$

Für den Fall der Abstossung anstatt der Anziehung, wie er bei elektrostatischen Untersuchungen vorliegt, wird dagegen V positiv. Es giebt dann sofort die potentielle Energie an, die dadurch bedingt wird, dass sich der bewegliche Punkt im Abstande x von dem Abstossungscentrum befindet. In diesem Falle wird nämlich die potentielle Energie bei unendlicher Entfernung des beweglichen Punktes zu Null und dadurch wird die Wahl, die für die willkürliche Constante getroffen wurde, gerechtfertigt. Für den Fall der Anziehung dagegen wird die potentielle Energie um so grösser, je mehr der Abstand wächst und das mit derselben Wahl der Constanten berechnete V kann daher nicht mehr als Ausdruck für die potentielle Energie angesehen werden. Immerhin ist es auch in diesem Falle gebräuchlich, das Potential derart zu bestimmen, dass es in unendlicher Entfernung verschwindet.

3. *Aufgabe. Man soll für beliebig vertheilte gegebene Massen, die nach dem Gravitationsgesetze auf einen anderen Massenpunkt einwirken, das Potential des von ihnen erzeugten Gravitationsfeldes berechnen.*

Lösung. Ein Volumenelement der Massenvertheilung sei mit $d\tau$ bezeichnet (Abb. 14), die Dichte der Massenvertheilung an dieser Stelle mit μ und ihr Abstand von dem Punkte A, für den man das Potential V berechnen soll, mit r. Dann ist nach der Lösung der vorigen Aufgabe das von der Masse $\mu d\tau$ für sich herrührende Potential bekannt und man braucht nur die Summe aller dieser Werthe für die einzelnen Massenelemente zu nehmen, um V zu erhalten. — Rechnet man ferner mit astronomischen Masseneinheiten, so wird für die Masse 1 im Abstande $a = 1$ das von ihr herrührende P_a zu 1 und man kann in der Lösung der vorigen Aufgabe die Faktoren $P_a a^2$ streichen, wogegen die Masse $\mu d\tau$, die an Stelle der Masse 1 tritt, als neuer Faktor beizufügen ist. Man erhält daher

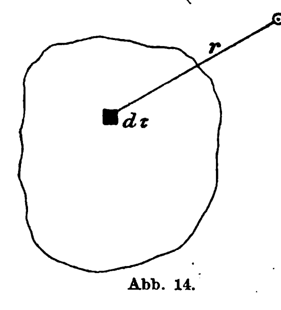


Abb. 14.

$$V = -\int \frac{\mu d\tau}{r},$$

wobei sich die durch das Integralzeichen angedeutete Summirung über den ganzen von Massen erfüllten Raum zu erstrecken hat. — Bei elektrostatischen Aufgaben kehrt sich auch hier das Vorzeichen des Potentials um, da sich elektrische Massen gleichen Vorzeichens abstossen.

4. *Aufgabe. Drei feste Punkte A, B, C, die mit den Massen m_1, m_2, m_3 behaftet sind, üben auf einen in derselben Ebene liegenden beweglichen Punkt Centralkräfte aus, die den Massen proportional, von den Entfernungen aber unabhängig sind. Man soll das Potential dieser Kräfte berechnen und ferner ermitteln, an welcher Stelle es zu einem Minimum wird.*

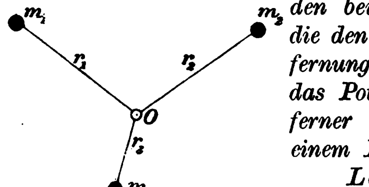


Abb. 15.

Lösung. Wir berechnen zunächst das Potential, das von einer einzigen Masse m_1 herrührt. Den Anfangspunkt O des Integrationswegs lassen wir mit m_1 zusammenfallen und integriren von da aus längs einer graden Linie weiter bis zum Abstande r_1. In der Formel

$$V_1 = V_O - \int_0^{r_1} \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

ist jetzt $\mathfrak{P}$ constant und die Summe aller $d\mathfrak{s}$ liefert r_1. Hierbei ist nur zu beachten, dass $\mathfrak{P}$ und $d\mathfrak{s}$ entgegengesetzt gerichtet sind, das Produkt $\mathfrak{P} d\mathfrak{s}$ daher negativ ist. Ferner ist $\mathfrak{P}$ proportional mit m_1. Hierbei würde noch ein Proportionalitätsfaktor auftreten, den wir uns aber durch eine passende Wahl der Masseneinheit der Einfachheit halber vermieden denken wollen. Die Anziehung, die von jedem m ausgeht, soll also unmittelbar durch den Werth von m selbst angegeben werden. Dann wird

$$V_1 = V_O + m_1 r_1.$$

Das Potential des von allen drei Massen herrührenden Kraftfeldes ist gleich der Summe von drei nach diesem Muster gebildeten Gliedern. Die Summe der drei willkürlichen Constanten V_O können wir uns hierbei zu einer einzigen willkürlichen Constanten C zusammengefasst denken. Wir erhalten demnach

$$V = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + C,$$

wobei wir der willkürlichen Constanten C schliesslich auch zur weiteren Vereinfachung den Werth Null beilegen können.

Um schliesslich zu ermitteln, wo V zu einem Minimum wird, beachten wir, dass an dieser Stelle für jede Verschiebung in irgend einer Richtung $dV = 0$ sein muss. Zugleich giebt aber dV die Summe der von allen Kräften herrührenden Arbeitsleistungen an, die zu dieser Verschiebung gehören. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten schliessen wir daher, dass die von den drei Massen ausgehenden Kräfte sich an dem beweglichen Punkte in der gesuchten Stelle im Gleichgewichte halten müssen. Auf Grund dieser Betrachtung lässt sich der Ort des Potentialminimums leicht ermitteln. Die Grösse der Kräfte ist nämlich gegeben und damit auch die Gestalt des Kräftedreiecks, zu dem sie sich zusammensetzen lassen müssen. Nur die Richtungen der Seiten sind einstweilen unbekannt. Wir construiren aber einstweilen das Dreieck in irgend einer Lage. Dadurch erfahren wir, welche Winkel die Kraftrichtungen am Orte des Potentialminimums mit einander bilden müssen. Die Winkel der Verbindungslinien $r_1 r_2 r_3$ des gesuchten Punktes mit den Massenpunkten $m_1 m_2 m_3$ sind die Supplemente der Dreieckswinkel. Man braucht also nur über den Verbindungslinien von je zwei Massenpunkten einen Kreisbogen zu schlagen, der den seiner Grösse nach bekannten Winkel als Peripheriewinkel fasst.

Dann schneiden sich alle drei Kreisbögen im Orte des Potentialminimums.

In Abb. 16 ist diese Construction unter der Voraussetzung ausgeführt, dass sich $m_1 : m_2 : m_3$ wie $2:3:4$ verhalten. O ist der Ort des Potentialminimums.

Aus der Construction erkennt man zugleich, dass das Potential im vorliegenden Falle nur an einer Stelle zu einem Minimum werden

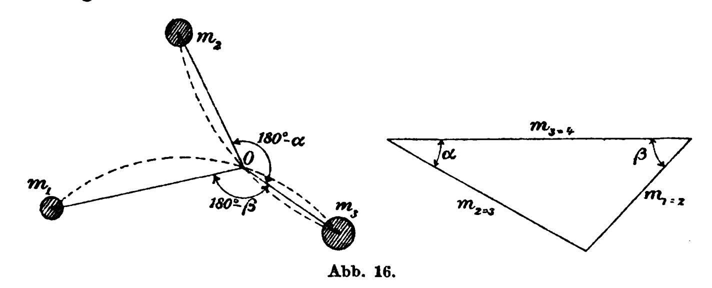


Abb. 16.

kann. Ferner kann O auf dem angegebenen Wege nur dann gefunden werden, wenn jede Masse kleiner ist, als die Summe der beiden anderen. Im entgegengesetzten Falle nimmt das Potential seinen kleinsten Absolutwerth dort an, wo sich die grösste Masse befindet.

Anmerkung. Centralkräfte, die unabhängig von der Entfernung sind, kommen in den zur Mechanik gehörigen Anwendungen der Potentialtheorie kaum in Wirklichkeit vor. Man kann aber ein sehr treffendes Beispiel anführen, das sich den vorausgehenden Betrachtungen eng anschliesst und das schon deshalb von Nutzen ist, weil es den wichtigen Begriff des Potentials von einer neuen Seite her zeigt, die geeignet ist, ihn dem Anfänger vertrauter und verständlicher zu machen. In diesem Sinne sind die nachfolgenden Betrachtungen aufzufassen.

Unter den Massen m stelle man sich jetzt die Einwohnerzahlen von drei Dörfern vor, die die durch Abbildung 15 oder 16 gegebene Lage zu einander haben. Das Gelände sei vollständig eben und an Stelle des beweglichen Punktes stelle man sich das Projekt für irgend ein Gebäude vor, das den Bedürfnissen aller drei Ortschaften dienen soll, also etwa den Bahnhof einer neu zu erbauenden Bahn, der mit gleicher Leichtigkeit an jeder Stelle des in Frage kommenden Geländes errichtet werden könnte und um dessen genauere Lage sich die Einwohner der drei Dörfer streiten sollen. Jedes Dorf will den Bahnhof so nahe als möglich haben und die Einwohnerschaft sucht auf die Behörde, von der die end-

gültige Entscheidung über den Bauplatz abhängt, im Sinne der Interessen ihres Dorfes durch die in solchen Fällen gebräuchlichen Mittel einzuwirken. Die Behörde wird sich bemühen, einen billigen Ausgleich zwischen den sich widerstreitenden Interessen der verschiedenen Dörfer zu finden. — Man kann hier in der That in einem übertragenen Sinne von den Kräften sprechen, mit denen die Dörfer das Streitobjekt an sich heranzuziehen suchen. In Ermangelung anderer Unterlagen wird man auch die Kraft, die hierbei von jedem Dorfe ausgeht, proportioal der Einwohnerzahl setzen dürfen; es würde ja andernfalls auch frei stehen, besonders einflussreiche Einwohner durch eine entsprechend erhöhte Einschätzung der Einwohnerzahl in Rechnung zu stellen. Ferner ist auch, worauf es im Zusammenhange mit der vorausgehenden Aufgabe besonders ankommt, anzunehmen, dass die Kraft unabhängig von der Entfernung ist. Jeder will den Bahnhof so nahe als möglich haben und jeder Kilometer Weg, der dabei erspart werden kann, ist gleich willkommen und wird ebenso lebhaft angestrebt, ob nun dadurch die Entfernung von 5 auf 4 oder von 3 auf 2 Kilometer herabgesetzt wird.

Für einen gerechten Ausgleich würde man in einem solchen Falle wohl den Punkt 0 in Abb. 16 empfehlen können, da sich die von den verschiedenen Dörfern auf ihn ausgeübten Kräfte in ihm im Gleichgewichte halten. Wäre freilich das eine Dorf grösser als die Summe der beiden anderen, so müsste man wohl den Bahnhof bei ihm errichten; die anderen Interessenten würden gegen diese Wahl schwerlich aufkommen können.

Sehen wir nun zu, welche Rolle im vorliegenden Falle dem Potentialbegriffe zugewiesen ist. Wir fanden, dass der Ausdruck für das Potential

$$V = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$$

gesetzt werden kann und hierfür lässt sich sofort eine anschauliche Deutung angeben. V ist nämlich gleich der Summe der Wege, die von den Bewohnern aller drei Dörfer gemacht werden müssen, wenn sie sich von ihren Wohnorten aus unter Einhaltung des nächst möglichen — also gradlinigen — Weges alle an dem Punkte versammeln wollen, der für die Erbauung des Bahnhofes in Aussicht genommen ist. V giebt also eine gewisse Anzahl von Personenkilometern an, d. h. es hat eine Dimension, die sich zwar nicht auf die Fundamentaleinheiten der Mechanik zurückführen lässt, die aber dem technischen Eisenbahnbeamten schon durch andere Betrachtungen sehr vertraut ist.

Wenn der Bahnhof dort errichtet wird, wo sich die von den

Dörfern geltend gemachten Anziehungskräfte im Gleichgewichte halten, wird das Potential zu einem Minimum, d. h. bei dieser „günstigsten“ oder „gerechtesten“ Wahl des Platzes ist der durchschnittliche Weg jeder Person zum Bahnhofe möglichst klein; man kann ihn daher zugleich als den volkswirthschaftlich besten Platz betrachten, weil die Beförderungskosten oder die ihnen gleich zu achtenden Zeitverluste u. s. f., die für die Erreichung des Bahnhofs aufgewendet werden müssen, möglichst klein sind.

Es steht ferner auch frei, Linien gleichen Potentials zu construiren, also hier solche Linien, für deren Punkte die Anzahl der Personenkilometer, die zu ihrer Erreichung aufgewendet werden müssen, gleich gross sind und die daher volkswirthschaftlich als gleichwerthig angesehen werden können. — Wegen der besonderen Anwendung, die hier davon gemacht wird, kann man nach einem Vorschlage, den ich bei einer früheren Gelegenheit selbst einmal gemacht habe, das Wort Potential durch die hier treffendere Bezeichnung „Vial“ ersetzen. Der Ort des Potentialminimums heisst dann kürzer das Vialcentrum. Man sieht leicht ein, dass diese Begriffe ganz zweckmässig zu manchen Betrachtungen benutzt werden können. So spricht man z. B. öfters vom Centrum oder vom Verkehrsmittelpunkte einer Stadt. Damit ist nun zwar jener Ort gemeint, der thatsächlich den grössten Strassenverkehr aufweist. Offenbar hängt aber dessen Lage ganz wesentlich von der Gestaltung der Stadt, also von der Vertheilung der Einwohnerschaft über die Flächen des Stadtbezirks ab und es lässt sich z. B. voraussehen, dass die einseitige Erweiterung der Stadt nach einer bestimmten Richtung hin eine Verschiebung des Verkehrsmittelpunktes zur Folge haben muss. Am wahrscheinlichsten wird sich auch hier unter sonst gleichen Umständen der stärkste Verkehr an jenem Platze einstellen, der von allen Einwohnern am leichtesten erreicht werden kann. Das wäre also wiederum das Vialcentrum, wobei jetzt auch die wirklichen Wegelängen mit Rücksicht auf die vorhandenen Strassenzüge bei der Berechnung der Personenkilometer verwendet werden können (anstatt der gradlinigen Wege bei der Lösung der Aufgabe). Das Vial im Vialcentrum getheilt durch die Einwohnerzahl giebt einen mittleren Stadtradius ab, der für jede Stadt charakteristisch und beim Vergleich verschiedener Städte von Werth wäre. — Leider sind die hier angedeuteten Berechnungen recht mühsam; sonst hätte man wohl schon längst mehr Gebrauch von ihnen gemacht.

5. *Aufgabe. Ein materieller Punkt, dem ein Gewicht von 981 kg zugeschrieben wird, führt eine gedämpfte harmonische Schwingung aus. Die elastische Kraft, die ihn in die Anfangslage*

zurückzuführen sucht, beträgt für 1 cm Ausschlag 10 kg, der dämpfende Widerstand ist bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec gleich 20 kg. Ist die Bewegung periodisch oder aperiodisch? Wie gross ist das logarithmische Decrement? Wie gross müsste der dämpfende Widerstand sein, wenn die Bewegung an der Grenze zwischen der periodischen und der aperiodischen stehen sollte?

Lösung. Die in § 5 mit c bezeichnete Constante ist hier

$$c = \frac{10 \text{ kg}}{1 \text{ cm}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Ebenso wird, mit Berücksichtigung der Dimensionen,

$$k = \frac{20 \text{ kg}}{1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}} = 20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}$$

und die Masse m ist

$$m = \frac{981 \text{ kg}}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 100 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}}.$$

Hiermit lässt sich die früher mit γ bezeichnete Wurzel berechnen; sie ist

$$\gamma = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{400}{40\,000} \cdot \frac{1}{\text{sec}^2} - \frac{1000}{100} \cdot \frac{1}{\text{sec}^2}}.$$

Wir sehen, dass γ imaginär und daher die Bewegung periodisch ist. Zugleich haben wir uns überzeugt, dass die beiden Glieder unter dem Wurzelzeichen homogen in den Dimensionen sind. Für γ' erhalten wir

$$\gamma' = \sqrt{10 - \frac{1}{100}} \cdot \frac{1}{\text{sec}} = 3{,}16 \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Bei der Berechnung des logarithmischen Decrements wollen wir annehmen, dass die Schwingungsausschläge nach beiden Seiten hin beobachtet und mit einander verglichen werden sollen. Dann erhält man nach Gl. (30)

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{\pi \cdot 20 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}}{\sqrt{(400 \cdot 1000 - 400) \frac{\text{kg}^2 \text{ sec}^2}{\text{m}^2}}} = 0{,}0994.$$

Vergleicht man dagegen nur die nach derselben Seite erfolgenden Schwingungsausschläge oder auch die ganzen Schwingungsbahnen mit einander, so hat das logarithmische Decrement den doppelten Werth.

Bei den Versuchen ist es oft bequemer (wenn nämlich grade keine Tafel der natürlichen Logarithmen zur Verfügung steht) die Brigg'schen Logarithmen der Ausschläge zu nehmen. Um die vorige Zahl auf Brigg'sche Logarithmen umzurechnen, dividire man sie durch den natürlichen Logarithmus von 10, also durch 2,3026.

Die Bewegung steht an der Grenze zwischen periodischer und aperiodischer, wenn γ und γ' zu Null werden. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{k^2}{4m^2} = \frac{c}{m} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{4mc}.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerthe geht dies über in

$$k = \sqrt{4 \cdot 100 \, \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} \cdot 1000 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = 632{,}4 \, \frac{\text{kg sec}}{\text{m}}.$$

Die Dämpfung müsste mehr als dreissig mal so stark sein, als sie angegeben war, um eine aperiodische Bewegung herbeizuführen.

6. *Aufgabe. Man soll für den in der vorigen Aufgabe behandelten Fall die Schwingungsdauer berechnen.*

Lösung. Nach Gl. (26) ist

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}},$$

woraus nach Einsetzen der Zahlenwerthe $T = 1{,}99$ sec folgt. Die Schwingungen stimmen hiernach nahezu mit denen eines Sekundenpendels überein.

7. *Aufgabe. Der in Aufg. 5 behandelte materielle Punkt erfährt von einer fremden Schwingung periodische Anstösse vom Grösstwerthe 0,5 kg. Wie gross werden die Ausschläge der erzwungenen Schwingungen (nach so langer Zeit vom Beginne der Erregung an, dass die verwickelteren Bewegungen des Anfangszustandes als abgeklungen betrachtet werden können), wenn die Schwingungsdauer der erregenden Schwingung a) 3 sec, b) 2,2 sec beträgt, c) ebenso gross ist als die der Eigenschwingungen?*

Lösung. Die in § 6 mit P bezeichnete Grösse ist hier

$$P = 0{,}5 \text{ kg}.$$

Ferner folgt die mit η bezeichnete Grösse für den Fall a), der zuerst untersucht werden soll, aus

$$\eta \,.\, 3 \text{ sec} = 2\pi \quad \text{zu} \quad \eta = 2{,}0944 \text{ sec}^{-1}.$$

Den Phasenverschiebungswinkel φ der erzwungenen gegen die erregenden Schwingungen findet man aus Gl. (33)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k\eta}{m\eta^2 - c} = -\frac{20\,\frac{\text{kg sec}}{\text{m}} \cdot 2{,}0944\ \text{sec}^{-1}}{100\,\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} \cdot 4{,}3865\ \text{sec}^{-2} - 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}} = -0{,}0746.$$

Der Winkel φ ist hier negativ, d. h. die erzwungenen Schwingungen bleiben ein wenig hinter den erregenden in der Phase zurück, so dass sie erst den grössten Werth annehmen, wenn die erregende Ursache den Maximalwerth bereits wieder überschritten hat. Durch Aufschlagen in einer trigonometrischen Tafel findet man $\varphi = -4^0\,16'$; ferner $\sin\varphi = -0{,}0744$ und $\cos\varphi = +0{,}9972$. Alle diese Werthe sind in Gl. (34) einzutragen. Man erhält dann

$$C = \frac{0{,}5\ \text{kg}}{0{,}9972\,(1000 - 438{,}65)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} + 0{,}0744 \cdot 20\,\frac{\text{kg sec}}{\text{m}} \cdot 2{,}0944\ \text{sec}^{-1}} =$$

$$= 0{,}00089\ \text{m} = 0{,}89\ \text{mm}.$$

Hiermit ist die Schwingungsamplitude gefunden. Die Wiederholung der Rechnung für 2,2 sec Schwingungsdauer liefert

$$\eta = 2{,}856\ \text{sec}^{-1},\quad \operatorname{tg}\varphi = -0{,}3098,\quad \varphi = -17^0\,12'\,50'',$$

$$\sin\varphi = -0{,}2959,\ \cos\varphi = +0{,}9552,\ C = 2{,}59\ \text{mm}.$$

Für den Fall der Resonanz endlich hat man $\varphi = \pm 90^0$ und nach Gl. (35) wird die Schwingungsamplitude

$$C = \frac{P}{k}\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{0{,}5\ \text{kg}}{20\,\frac{\text{kg sec}}{\text{m}}}\sqrt{\frac{100}{1000}\,\text{sec}^2} = 0{,}0079\ \text{m} = 7{,}9\ \text{mm}.$$

Die Schwingungsschläge sind also im letzten Falle in der That etwa 9mal so gross, als im Falle a), obwohl die Intensität der erregenden Schwingungen dieselbe geblieben ist und nur die Schwingungsdauer sich geändert hat. Wenn die Dämpfung kleiner ist, als hier vorausgesetzt wurde, kann das Verhältniss noch viel grösser werden.

8. *Aufgabe. Von einem festen Centrum geht eine Anziehungskraft aus, die von der Entfernung unabhängig ist. Man soll die Differentialgleichung zwischen der Entfernung r und der Zeit t für die Bewegung eines dieser Anziehungskraft unterworfenen Punktes auf demselben Wege ableiten, der zu Gl.* (43), S. 61 *führte.*

Lösung. Für die lebendige Kraft des beweglichen Punktes haben wir, wie in § 7

$$L = \frac{1}{2}\,m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + u^2 r^2\right)$$

oder, mit Einführung der constanten Sektorengeschwindigkeit c,

$$L = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{4c^2}{r^2} \right)$$

und hieraus durch Differentiation nach t und Multiplikation mit dt

$$dL = m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \right) dr.$$

Bezeichnen wir nun die constante Anziehungskraft mit M, so ist deren Arbeit für die Abstandsänderung dr gleich $-Mdr$ und durch Gleichsetzen mit dL finden wir

$$m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \right) = -M.$$

Zum Zwecke der Integration forme man die Gleichung um in

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{d}{dr} \left(\frac{2c^2}{r^2} + \frac{M}{m} r \right) \frac{dr}{dt},$$

also nach Integration und Auflösen nach $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2C_1 - \left(\frac{4c^2}{r^2} + 2 \frac{M}{m} r \right)},$$

worin C_1 die willkürliche Integrationsconstante ist, die aus den Anfangsbedingungen sofort ermittelt werden kann. Eine nochmalige Integration liefert

$$t = C_2 + \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2C_1 r^2 - 4c^2 - 2\frac{M}{m} r^3}}.$$

Das Integral, das hier noch steht, ist ein elliptisches. Von der Reduktion auf die Normalform kann abgesehen werden, da die Diskussion der Lösung ohne weitergehendes Interesse ist.

9. Aufgabe. Für irgend eine Lage des einfachen Pendels, das Schwingungen von beliebiger endlicher Grösse ausführt, soll man den genaueren Werth der Fadenspannung berechnen.

Lösung. Die Geschwindigkeit in der durch den Winkel φ in Abb. 10, S. 74 bezeichneten Lage ist, wie wir früher fanden (Gl. 49),

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Die Normalcomponente der Resultirenden aus der Fadenspannung F und dem Gewichte Q ist die Centrifugalkraft, die wir nach der von früher her bekannten Formel berechnen können. Wir finden

$$C = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{l} = 2\,Q\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Die Projektion der Resultirenden auf die augenblickliche Fadenrichtung ist gleich der algebraischen Summe der Projektionen von F und Q; also

$$C = F - Q\cos\varphi$$

und nach Einsetzen des Werthes von C folgt daraus

$$F = Q\,(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Um diesen Werth anschaulicher zu deuten, formen wir ihn um in

$$F = Q \cdot \frac{3\,l\,(\cos\varphi - \cos\alpha) + l\cos\alpha}{l} = Q\,\frac{3\,z + l\cos\alpha}{l},$$

wenn wir die schon in Abb. 10 mit z bezeichnete Strecke wieder einführen. Die Fadenspannung wird hiernach gleich dem Gewichte Q, wenn $3\,z$ die Vertikalprojektion des Fadens in der äussersten Lage grade zur ganzen Fadenlänge ergänzt, d. h. dann, wenn der bewegliche Punkt $\frac{1}{3}$ seiner ganzen Fallhöhe zurückgelegt hat. Bei grösserem Ausschlage des Pendels ist F kleiner, bei kleinerem Ausschlage grösser als Q.

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers und des Punkthaufens.

§ 11. Das Princip von d'Alembert.

Wie schon im ersten Bande dieser Vorlesungen knüpfen wir auch hier wieder die Dynamik des starren Körpers dadurch an die Dynamik des einzelnen materiellen Punktes an, dass wir den starren Körper als einen Haufen von materiellen Punkten auffassen, zwischen denen innere Kräfte $\mathfrak{J}$ auftreten, die den Zusammenhang aufrecht erhalten. Für jeden einzelnen Punkt des Haufens gelten dann die Lehren des vorigen Abschnittes, sobald man nur ausser den direkt gegebenen Kräften auch die an ihm angreifenden inneren Kräfte in Berücksichtigung zieht.

Das Bild des Punkthaufens ist freilich, wie schon früher hervorgehoben wurde, allgemeiner als das des starren Körpers. Es fällt mit diesem erst dann zusammen, wenn wir die geometrische Gestalt des Punkthaufens als unveränderlich ansehen. Wir wollen uns aber in diesem Abschnitte auch nicht ausschliesslich auf die Dynamik des starren Körpers beschränken, wenn diese auch den Hauptgegenstand unserer Untersuchungen bilden wird. Vielmehr gelten manche der hier anzustellenden Betrachtungen ganz allgemein auch für veränderliche Punkthaufen, also für Körper oder Systeme von Körpern von ganz willkürlicher Zusammensetzung. Wie weit sich die Gültigkeit der Betrachtungen im einzelnen Falle erstreckt, wird jedesmal entweder ausdrücklich angegeben werden oder es wird wenigstens aus dem Zusammenhange unzweideutig hervorgehen.

Der Punkthaufen sei in beliebiger Bewegung begriffen; wir fassen dann einen einzelnen Punkt zur näheren Betrachtung heraus. Die an ihm etwa unmittelbar angreifende äussere Kraft sei mit $\mathfrak{P}$, die Resultirende aller inneren Kräfte mit $\Sigma\mathfrak{J}$ bezeichnet. Wenn ferner noch die Masse dieses Punktes mit m und der von einem festen Anfangspunkte nach ihm gezogene Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet werden, haben wir nach der dynamischen Grundgleichung

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} \tag{68}$$

und eine Gleichung von dieser Form gilt für jeden Punkt des Haufens.

Wir wollen uns den Punkthaufen in seiner augenblicklichen Gestalt und Lage und unter Aufrechterhaltung aller übrigen Bedingungen jetzt noch ein zweites Mal gegeben denken; nur mit dem Unterschiede, dass an jedem Punkte noch eine fernere Kraft $\mathfrak{H}$ willkürlich zugefügt sein soll, deren Grösse und Richtung nach der Gleichung

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \tag{69}$$

gewählt ist, in der die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ so einzusetzen ist, wie sie sich aus der wirklichen Bewegung des ersten Punkthaufens ergeben würde.

Im zweiten Falle haben wir dann, da die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}$ unverändert geblieben sein sollen, aus der Verbindung der beiden vorigen Gleichungen

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} + \mathfrak{H} = 0, \tag{70}$$

d. h. alle Kräfte halten sich jetzt an dem Punkte im Gleichgewichte und da dies für alle Punkte des Haufens gilt, halten sich auch die Kräfte am ganzen Haufen im Gleichgewichte.

Man erkennt aus dieser Betrachtung, dass man in jedem Augenblicke zu einem beliebig bewegten Punkthaufen einen zweiten ihm sonst völlig gleichenden angeben kann, der sich im Gleichgewichte befindet. Sofern es sich dann nur um die Untersuchung der Kräfte handelt, können wir uns diesen

zweiten in seiner augenblicklichen Lage auch in Ruhe denken; er muss dann unter dem Einflusse der an ihm angebrachten Kräfte auch ferner in Ruhe bleiben. Durch den Kunstgriff der Einführung der Kräfte $\mathfrak{H}$ vermag man daher ein dynamisches Problem auf ein statisches zurückzuführen.

Die Kräfte $\mathfrak{H}$ werden gewöhnlich als „Trägheitskräfte“ bezeichnet und ich werde mich dieser Bezeichnung ihrer Kürze wegen anschliessen. Man hat freilich gegen den Gebrauch dieses Wortes öfters eingewendet, dass es zu Missdeutungen oder falschen Vorstellungen Veranlassung geben könne, da hiermit eine Grösse als Kraft bezeichnet wird, die als solche physikalisch gar nicht existirt und die nur zur Vereinfachung der Betrachtungen zu den wirklich vorhandenen Kräften willkürlich zugefügt wird. Dass die Trägheitskräfte in der That nur in diesem Sinne als Hülfsgrössen und nicht als an dem ersten Punkthaufen, den wir eigentlich untersuchen wollen, wirklich angreifende Kräfte aufzufassen sind, darf man freilich nicht aus den Augen verlieren. Sofern dies geschieht, wird man aber jene Bedenken fallen lassen können und ich habe auch, gerade um nach dieser Richtung keinen Zweifel zu lassen, ausdrücklich von zwei Punkthaufen gesprochen, von denen der eine den unmittelbaren Gegenstand unserer Untersuchung bildet und an dem die Kräfte $\mathfrak{H}$ fehlen, während der zweite, an dem die Kräfte $\mathfrak{H}$ angreifen sollen, nur zum Vergleiche mit dem ersten gebraucht wird. Ich trage auch um so weniger Bedenken gegen die gewählte Bezeichnung, als schon die „fingirte“ Centrifugalkraft, von der im ersten Bande die Rede war, unter den Begriff der Trägheitskräfte fällt und man schon mit Rücksicht auf den in diesem Falle fest eingewurzelten Sprachgebrauch genöthigt ist, zwischen den fingirten oder von uns willkürlich zugefügten Kräften und den physikalisch nachweisbaren oder, wie wir sagen, wirklich vorhandenen sorgfältig zu unterscheiden.

In dem Kunstgriffe, das dynamische Problem durch Zufügung der Trägheitskräfte $\mathfrak{H}$ auf ein statisches zurückzuführen, besteht der Kern des d'Alembert'schen Princips. Freilich wird

dieses, wie wir alsbald sehen werden, häufig oder gewöhnlich in einer analytischen Form ausgesprochen, die den wirklichen Gehalt des Princips nicht so deutlich hervortreten lässt. — Man sieht ferner, dass das d'Alembert'sche Princip in der allgemeinen Form, die ihm bis jetzt gegeben wurde, nicht auf die Dynamik starrer Körper beschränkt, sondern dass es auf beliebige Punkthaufen anwendbar ist. In der That bezieht sich auch gerade eine der häufigsten Anwendungen bei Aufgaben der Technik nicht auf starre, sondern auf elastische Körper. In der Festigkeitslehre werden nämlich die Spannungen und Formänderungen eines elastischen Körpers gewöhnlich nur unter der Voraussetzung untersucht, dass alle daran angreifenden äusseren Kräfte im Gleichgewichte sind und dass der Körper ruht. In der Technik muss man aber öfters auch Festigkeitsaufgaben für bewegte Körper lösen. Hier tritt nun das d'Alembert'sche Princip als stets bereites Werkzeug auf, diese Aufgaben auf solche an ruhenden Körpern zurückzuführen.

Bei einem bewegten Körper stehen nämlich die an einem Volumenelemente angreifenden Spannungen und die daran wirkenden äusseren Kräfte nicht im Gleichgewichte mit einander, sondern sie ergeben eine Resultirende, die die Beschleunigung dieses Volumenelementes herbeiführt. Sobald man sich aber die Trägheitskraft als fernere äussere Kraft an dem Volumenelemente angebracht denkt, haben wir wieder überall Gleichgewicht und es folgt daher, dass die inneren Kräfte oder die Spannungen nun ohne Weiteres am ruhenden Körper untersucht werden können, der neben den Lasten $\mathfrak{P}$ auch die Lasten $\mathfrak{H}$ trägt. Diese Bemerkung ist für die praktischen Anwendungen der Mechanik von grosser Wichtigkeit; einige Beispiele unter den Aufgaben werden den Rechnungsgang, der in einem gegebenen Falle einzuhalten ist, noch näher erläutern.

Wenn man Gl. (70) auf jeden Punkt des ganzen Haufens anwendet und alle so erhaltenen Gleichungen addirt, findet man

$$\Sigma\mathfrak{P} + \Sigma\Sigma\mathfrak{J} + \Sigma\mathfrak{H} = 0,$$

wobei sich aber nach dem Wechselwirkungsgesetze die Gesammtsumme aller inneren Kräfte weghebt, so dass

$$\Sigma\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{H} = 0$$

übrig bleibt. Dies geht übrigens schon aus den Betrachtungen des ersten Bandes über die Kräfte am Punkthaufen hervor und ebenso folgt auch daraus, ohne dass es jetzt nochmals von Neuem bewiesen zu werden brauchte, dass die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{H}$ allen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte am starren Körper genügen.

In den Lehrbüchern der analytischen Mechanik wird das d'Alembert'sche Princip gewöhnlich durch eine Formel ausgedrückt, die aus den vorausgehenden Betrachtungen folgt, wenn man sie in Verbindung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bringt. Man denke sich irgend eine unendlich kleine virtuelle Verschiebung mit dem Punkthaufen vorgenommen, bei der er sich wie ein starrer Körper, also ohne Gestaltänderung bewegt. Der Weg, den der ins Auge gefasste materielle Punkt hierbei zurücklegt, sei $\delta\mathfrak{s}$; dann ist für jedes willkürliche $\delta\mathfrak{s}$

$$(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J} + \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{s} = 0,$$

also bei Uebertragung der Betrachtung auf den ganzen Punkthaufen

$$\Sigma(\mathfrak{P} + \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{s} = 0,$$

da sich die Arbeiten der inneren Kräfte im vorliegenden Falle gegen einander wegheben. Setzt man $\mathfrak{H}$ aus Gl. (70) ein, so folgt

$$\Sigma\left(\mathfrak{P} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)\delta\mathfrak{s} = 0. \tag{71}$$

Um auf die übliche Darstellungsform zu kommen, zerlege ich die gerichteten Grössen noch in ihre Componenten nach den Richtungen eines rechtwinkligen Coordinatensystems und erhalte

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \tag{72}$$

Das ist die Gleichung, die ich ableiten wollte. Die XYZ sind

natürlich die Componenten von $\mathfrak{P}$ und die $\delta x \delta y \delta z$ die Componenten von $\delta \mathfrak{s}$.

Ich sagte vorhin, dass die virtuelle Verschiebung des Punkthaufens nur in einer Bewegung ohne Gestaltänderung bestehen solle. Die Formeln gelten aber auch noch in einem allgemeineren Falle, nämlich immer dann, wenn zwar eine Gestaltänderung eintritt, die inneren Kräfte aber dabei trotzdem keine Arbeit leisten. Denn in der That bestand ja der einzige Gebrauch, den wir vorher von der Voraussetzung der unveränderlichen Gestalt gemacht hatten, nur darin, dass wir $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\delta\mathfrak{s} = 0$ setzten. Diese Gleichung ist immer erfüllt bei Bewegungen ohne Gestaltänderung; sie kann aber auch noch in anderen Fällen erfüllt sein. Sobald dies aber zutrifft, bleibt auch die Gültigkeit der Gleichungen (71) oder (72) bestehen.

Man denke sich z. B. zwei starre Körper, die in einem Gelenke ohne Reibung drehbar mit einander verbunden sind. Das System beider Körper kann als ein Punkthaufen von veränderlicher Gestalt aufgefasst werden. Betrachten wir nun eine virtuelle Verschiebung des Punkthaufens, bei der zwar jeder starre Körper unveränderlich bleibt, während sich aber die beiden Körper gegen einander drehen, so ist die Summe der Arbeiten aller inneren Kräfte immer noch Null, wenigstens dann, wenn zwischen beiden Körpern nur im Gelenke eine Kraft übertragen wird. Trügen beide Körper Magnete, die Fernkräfte auf einander ausübten, so wäre dies freilich nicht mehr richtig und die Gleichungen (71) oder (72) blieben nicht mehr anwendbar. Man könnte sich in diesem Falle allenfalls dadurch helfen, dass man die magnetischen Fernkräfte nicht als innere Kräfte des Systems, sondern als unmittelbar gegebene äussere Kräfte auffasste und sie daher in die $\mathfrak{P}$ mit einrechnete, womit die Anwendbarkeit der Formeln gewahrt bliebe.

In der analytischen Mechanik denkt man bei der Anwendung von Gl. (72) gewöhnlich an solche virtuelle Verschiebungen, für die die inneren Kräfte keine Arbeit leisten, obschon Gestaltänderungen dabei nicht ausgeschlossen sein sollen. Man kann dies, weil man sich die Körper, die das System

oder den Punkthaufen ausmachen, nur in solcher Weise mit einander in Verbindung gebracht denkt, dass bei den hierdurch zugelassenen Verschiebungen der Theile gegen einander in der That keine inneren Arbeiten geleistet werden. Um dies zum Ausdrucke zu bringen, pflegt man zu sagen, dass unter den in Gl. (72) auftretenden Verschiebungscomponenten nur solche zu verstehen seien, die zwar sonst willkürlich, aber dabei mit den Systembedingungen verträglich seien. Immer wenn dieser etwas unbestimmte Ausdruck gebraucht wird, thut man gut, in Gedanken dafür zu setzen, dass $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\delta\mathfrak{s}$ gleich Null sein soll.

Im Allgemeinen scheint es mir freilich überhaupt vortheilhafter zu sein, das d'Alembert'sche Princip nicht von vornherein in der Form der Gl. (72) auszusprechen, sondern nur die Aussage darunter zu verstehen, dass die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}$ ein Gleichgewichtssystem mit einander bilden, wobei es dann unbenommen bleibt, auf dieses Gleichgewichtssystem nachträglich die bekannten Sätze der Statik, also etwa das Princip der virtuellen Geschwindigkeit oder anstatt dessen auch den Satz der statischen Momente anzuwenden. Man wird sich so jedenfalls vor Fehlern besser schützen, die sonst dadurch entstehen könnten, dass man die Voraussetzung der Verträglichkeit mit den Systembedingungen auf irrige Weise auslegt.

§ 12. Anwendung auf das physische Pendel.

Im vorigen Abschnitte wurde die Pendelbewegung immer nur unter Voraussetzung eines einfachen Pendels untersucht. Man dachte sich die ganze schwingende Masse in einem einzigen Punkte vereinigt, der in unveränderlicher Entfernung vom Aufhängepunkte gehalten und dadurch zur Ausführung einer kreisförmigen Bewegung genöthigt sein sollte. Mit diesem Bilde reicht man aber nur in seltenen Fällen aus. Gewöhnlich sind die Massen von Körpern, die Pendelschwingungen ausführen, räumlich so ausgedehnt und namentlich in so verschiedenen Abständen von der festen Drehaxe vertheilt, dass es von

vornherein an jedem Anhaltspunkte dafür fehlt, wo man sich etwa die ganze Masse vereinigt denken müsste, um das Pendel als ein einfaches behandeln zu können. Hier hilft nun — obschon auch andere Wege zum Ziele führen — am besten das d'Alembert'sche Princip zur Lösung der Aufgabe.

In Abb. 17 sei O der Drehpunkt, d. h. die Projektion der Drehaxe auf die senkrecht dazu gedachte Zeichenebene, S der Schwerpunkt des Pendels und m irgend ein Massentheilchen im Abstande x, das wir als einen der materiellen Punkte des ganzen Haufens auffassen. Wenn alle übrigen Massen gegenüber m vernachlässigt werden könnten, hätten wir ein einfaches Pendel von der Länge x vor uns und die Schwingungsdauer könnte aus x nach den Lehren des vorigen Abschnitts berechnet werden. Jene Massen m, die nahe beim Drehpunkte O liegen, suchen, für sich genommen, eine kleine, die weiter abstehenden eine grössere Schwingungsdauer des Pendels herbeizuführen und die wirkliche Schwingungsdauer wird einen gewissen Mittelwerth annehmen.

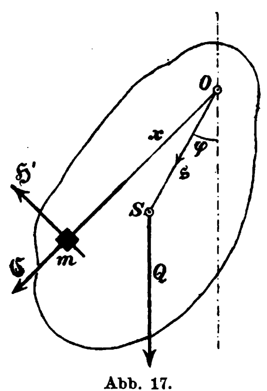


Abb. 17.

Die augenblickliche Stellung des Pendels sei durch den Winkel φ beschrieben, den der vom Aufhängepunkte nach dem Schwerpunkte gezogene Radiusvektor $\mathfrak{s}$ mit der Lothrichtung bildet. In der Gleichgewichtslage des Pendels ist hiernach $\varphi = 0$. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{d\varphi}{dt}$ und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Kehren wir nun zum Massentheilchen m zurück, so kann dessen Geschwindigkeit gleich $x\frac{d\varphi}{dt}$ und die Tangentialcomponente der Beschleunigung, die es im Augenblicke erfährt, gleich $x\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gesetzt werden. Dazu kommt dann noch eine Normalcomponente der Beschleunigung wegen der Richtungsänderung der Geschwindigkeit. — Wir führen jetzt die Trägheitskraft

$$\mathfrak{H} = - m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}$$

ein, die wir ebenso wie die Beschleunigung in eine Tangentialcomponente $\mathfrak{H}'$ und eine Normalcomponente $\mathfrak{C}$ spalten können. Die letzte ist nichts anderes als die Centrifugalkraft. Die Tangentialcomponente $\mathfrak{H}'$ hat den Absolutwerth

$$H' = mx \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Sie ist, wie in Abb. 17 eingetragen, nach aussen und oben hin gerichtet. Schwingt nämlich das Pendel nach aussen, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ positiv und der Absolutbetrag nimmt ab; schwingt es dagegen nach der Gleichgewichtslage hin, so ist $\frac{d\varphi}{dt}$ negativ und der Absolutbetrag nimmt zu. In jedem Falle ist daher $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ negativ und die Tangentialbeschleunigung nach innen und abwärts gerichtet. Die Trägheitskraft hat aber die entgegengesetzte Richtung wie die zu ihr gehörige Beschleunigung; sie ist also stets nach oben und aussen gerichtet.

Nachdem die Trägheitskräfte $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{C}$ überall zugefügt sind, haben wir ein System von Kräften vor uns, die sich an dem Körper im Gleichgewichte halten. Zur Untersuchung des Gleichgewichts betrachten wir den Körper, da er sich um eine feste Axe dreht, als einen Hebel. Wir schreiben daher die Bedingung an, dass die Summe der statischen Momente für den Drehpunkt gleich Null sein muss. In dieser Momentensumme kommen die Normalcomponenten $\mathfrak{C}$ der Trägheitskräfte nicht vor, da sie alle durch den Momentenpunkt gehen. Die Tangentialcomponenten $\mathfrak{H}'$ haben alle gleiches Momentenvorzeichen und die Summe ihrer Momente muss daher gleich dem Momente der entgegengesetzt drehenden Kraft Q sein. Wir erhalten damit die Gleichung

$$-\Sigma m x^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin \varphi. \tag{73}$$

Das Minuszeichen auf der linken Seite ist beigefügt, weil wir erkannt hatten, dass $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ an sich negativ ist. Der Faktor $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

ist allen Gliedern gemeinsam und kann daher auch vor das Summenzeichen gestellt werden. Die dann noch zurückbleibende Summe $\Sigma m x^2$ stellt das Trägheitsmoment für die Drehaxe dar und soll, wie früher, mit Θ bezeichnet werden. Hiermit geht die vorige Gleichung über in

$$-\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin \varphi. \tag{74}$$

Aus dieser Differentialgleichung lässt sich φ als Function von t ermitteln, womit die Pendelbewegung bekannt ist. Anstatt dessen verfährt man aber einfacher und umgeht ausführliche Rechnungen, die jetzt von Neuem anzustellen wären, wenn man die Theorie des physischen Pendels auf jene des einfachen Pendels zurückführt. Man giebt nämlich ein einfaches Pendel an, das mit dem gegebenen genau gleich schwingt, so dass es zur Berechnung der Schwingungsdauer u. s. w. an die Stelle des zusammengesetzten Pendels gesetzt werden kann. Die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels wird die reducirte Pendellänge des zusammengesetzten Pendels genannt. Trägt man die reducirte Pendellänge l vom Drehpunkte O aus auf dem durch den Schwerpunkt gehenden Radiusvektor $\mathfrak{s}$ ab, so wird der Endpunkt dieser Strecke der Schwingungsmittelpunkt des Pendels genannt. Denkt man sich nämlich alle übrigen Massen des Pendels verschwindend klein gegenüber einer in diesem Punkte vereinigten Masse m, so geht das Pendel in ein einfaches über, das gleiche Schwingungen wie das gegebene ausführt. Man kann also sagen, dass die an dieser Stelle befindliche Masse von den übrigen nicht beeinflusst wird, sondern dass sie gerade so schwingt, als wenn diese nicht vorhanden wären.

Um nun das gleichwerthige einfache Pendel wirklich zu finden, wenden wir Gl. (74) auf den Fall an, dass nur eine Masse m auf dem Radiusvektor $\mathfrak{s}$ im Abstande l vom Drehpunkte vorhanden sei. Auch auf den Fall dieses einfachen Pendels lässt sich Gl. (74) anwenden, da sie nach ihrer Ableitung für jede beliebige Massenvertheilung gültig bleibt. In

diesem Falle ist $\Theta = ml^2$ und $s = l$, also geht Gl. (74) über in

$$-ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mgl \sin\varphi$$

oder kürzer

$$-l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \sin\varphi. \tag{75}$$

Von dieser Gleichung kennen wir aber die Lösung bereits, da t schon in § 9 als Function von φ dargestellt wurde.

Soll nun das zusammengesetzte Pendel genau gleich mit dem einfachen schwingen, d. h. so, dass zu gleichen Zeiten stets auch gleiche Ausschläge gehören, so genügt es, dass die Anfangsbedingungen bei beiden gleich waren und dass ferner die Gleichungen (74) und (75) in den constanten Coefficienten mit einander übereinstimmen. Freilich ist dazu nicht nöthig, dass die Coefficienten jeder Seite einzeln gleich sind; es genügt vielmehr die Gleichheit der Verhältnisse zwischen den Coefficienten auf beiden Seiten. Man überblickt dies am besten, wenn man beide Gleichungen in der Form

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Qs}{\Theta} \sin\varphi \quad \text{und} \quad -\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin\varphi$$

anschreibt. Beide Gleichungen werden mit einander identisch, wenn man

$$\frac{Qs}{\Theta} = \frac{g}{l}$$

setzt und hieraus folgt für die reducirte Pendellänge l

$$l = \frac{g\Theta}{Qs}. \tag{76}$$

Führt man an Stelle des Trägheitsmomentes den Trägheitsradius t ein, so geht Gl. (76) über in

$$l = \frac{t^2}{s}, \tag{77}$$

wobei man sich freilich hüten muss, unter t hier eine Zeit zu verstehen.

Wie schon vorher bemerkt wurde, kann man das Problem des physischen Pendels auch ohne Benutzung des d'Alembert'schen Princips nach mehreren anderen Methoden lösen. Namentlich der Satz von der lebendigen Kraft führt in allen

Fällen, bei denen es sich, wie hier, um Bewegungen eines Körpers oder eines Systems von Körpern handelt, die nur einen Freiheitsgrad besitzen oder die, wie man sagt, zwangläufig erfolgen, schnell zum Ziele. Es sei daher noch gezeigt, wie sich die Lösung auf diesem Wege gestaltet. Bezeichnet man den grössten Ausschlag mit α, so liefert die Gleichsetzung der von dem Gewichte Q geleisteten Arbeit mit der lebendigen Kraft, gerade so wie früher beim einfachen Pendel, die Gleichung

$$\frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Qs(\cos\varphi - \cos\alpha), \tag{78}$$

die hierauf entweder unmittelbar weiter integrirt oder so wie vorhin mit der entsprechenden Gleichung für das gleichschwingende einfache Pendel verglichen werden kann. Gl. (78) ist, wie man sich leicht überzeugt, ein erstes Integral von Gl. (74), wobei die auftretende Integrationsconstante schon der Grenzbedingung, dass der grösste Ausschlag α sein soll, angepasst ist.

Dieser Weg ist zwar kürzer und einfacher, als der vorher eingeschlagene. Wenn aber z. B. zugleich verlangt würde, die Biegungsbeanspruchung zu berechnen, die das Pendel erfährt, müsste man doch wieder zur Benutzung des d'Alembert'schen Princips zurückgreifen und schon aus diesem Grunde ist es nützlich, die Aufgabe von vornherein mit dem d'Alembertschen Princip zu behandeln; ganz abgesehen davon, dass hier auch an einem möglichst einfachen Beispiele der Gebrauch dieses Princips erläutert werden sollte.

§ 13. Schwerpunkts- und Flächensätze für den Punkthaufen.

Die Schwerpunktssätze sind schon im ersten Bande behandelt; des Zusammenhangs wegen werde ich aber hier Einiges noch einmal kurz wiederholen, was darüber früher ausgemacht wurde. — Zunächst erinnere ich daran, dass die Lage des Schwerpunkts, der dabei als Massenmittelpunkt aufzufassen ist, durch die Gleichung

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r} \tag{79}$$

definirt wird, in der $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor für irgend einen materiellen Punkt m des Haufens, M die Gesammtsumme des Haufens und $\mathfrak{s}$ den Radiusvektor des Schwerpunkts bedeuten. Diese Gleichung gilt für beliebige Punkthaufen in jedem Augenblicke, auch dann, wenn sie während der Bewegung ihre Gestalt verändern. Durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$M \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

oder mit Einführung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$

$$M\mathfrak{v}_0 = \Sigma m\mathfrak{v}, \tag{80}$$

d. h. die Bewegungsgrösse des ganzen Haufens ist ebenso gross als wenn die ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre und sich mit dessen Geschwindigkeit bewegte. Eine nochmalige Differentiation nach der Zeit liefert

$$M \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \Sigma(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}) = \Sigma\mathfrak{P} \tag{81}$$

und diese Gleichung sagt aus, dass sich der Schwerpunkt stets so bewegt, als wenn die ganze Masse in ihm vereinigt und alle äusseren Kräfte parallel nach ihm verlegt wären.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zur Uebertragung des im vorigen Abschnitte für einen einzelnen materiellen Punkt bewiesenen Flächensatzes auf einen beliebigen Punkthaufen. Für jeden Punkt des Haufens besteht nach Gl. (2) oder (2a), § 2 die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d}{dt} \mathrm{V} m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathrm{V}(\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J})\mathfrak{r} = \mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{r} + \mathrm{V}\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{r}.$$

Gegenüber der früheren Formel war hier nur nöthig, alle Kräfte, die an dem Punkte angreifen, in äussere und in innere Kräfte des Haufens einzutheilen, jene zu $\mathfrak{P}$ und diese zu $\Sigma\mathfrak{J}$ zusammenzufassen und daher die Resultirende $\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}$ an die Stelle der in § 2 nur summarisch mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Kraft, die an dem materiellen Punkte angreift, treten zu lassen. Die vorstehende Gleichung gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt und für jeden Punkt des Haufens. Wir wollen sie uns

für alle Punkte unter Zugrundelegung desselben Momentenpunktes angeschrieben denken und alle so erhaltenen Gleichungen addiren. Wir finden dann

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r} + \Sigma\Sigma V \mathfrak{J}\mathfrak{r}.$$

Nach dem Wechselwirkungsgesetze verschwindet aber das letzte Glied auf der rechten Seite und wir behalten daher

$$\frac{d}{dt}\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r}, \tag{82}$$

oder auch in kürzerer Schreibweise

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r}. \tag{82a}$$

Der Ausdruck $\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{B}$ stellt die geometrische Summe der statischen Momente der Bewegungsgrössen aller Punkte des Haufens dar; wir wollen diese Summe als das statische Moment der Bewegungsgrösse des ganzen Haufens oder als dessen Drall bezeichnen. Dabei ist indessen wohl zu beachten, dass man sich, um dieses statische Moment zu bilden, nicht etwa zuvor die Bewegungsgrösse nach Gl. (80) im Schwerpunkte vereinigt denken darf, um dann von ihr das Moment zu nehmen. Das ist desshalb nicht zulässig, weil der Faktor $\mathfrak{r}$ nicht für alle Glieder der Summe constant ist, sondern für jeden materiellen Punkt einen anderen Werth annimmt. In der „Theorie des Kreisels" von Klein und Sommerfeld, in der auf die Anwendung des Flächensatzes ein besonderes Gewicht gelegt ist, wird die Grösse $\Sigma V m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}$ als der „Impulsvektor" bezeichnet. Ich glaube aber die Bezeichnung „Drall" vorziehen zu sollen.

Der durch Gl. (82) ausgedrückte Flächensatz lässt sich in Worten wie folgt aussprechen:

Für jeden beliebigen Momentenpunkt ist die zeitliche Aenderung des Dralls irgend eines Punkthaufens gleich der geometrischen Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte.

In dieser allgemeinsten Form wird indessen seltener von

dem Flächensatze Gebrauch gemacht, als von den einfacheren Formen, in die er übergeht, wenn besondere Bedingungen vorliegen. Namentlich durch eine geeignete Wahl des Momentenpunktes lässt er sich häufig erheblich vereinfachen, obschon damit freilich andererseits die allgemeine Gültigkeit eingeschränkt wird. Ich werde die häufigst vorkommenden Fälle dieser Art hier einzeln durchsprechen.

a) Punkthaufen, der zu Anfang ruhte und auf den keine äusseren Kräfte wirken.

Durch die inneren Kräfte können in diesem Falle Bewegungen hervorgerufen werden, die zu Gestaltänderungen des Haufens führen. Wir schliessen zunächst nach dem Schwerpunktssatze Gl. (81), dass der Schwerpunkt jedenfalls stets in Ruhe bleibt. Ferner folgt aus dem Flächensatze, dass $\mathfrak{B}$ constant und daher stets gleich Null bleiben muss, da es zu Anfang Null war. Auch die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf irgend eine Ebene oder irgend eine Axe muss daher zu jeder Zeit gleich Null sein. — Die Projektion eines statischen Moments auf eine Axe kann nach den Lehren des ersten Bandes stets als das statische Moment der Projektion auf eine zur Axe senkrecht stehende Ebene aufgefasst werden. Projicirt man also alle Punkte des Haufens auf eine beliebige Ebene, so ist auch für jeden Punkt dieser Ebene als Anfangspunkt die Summe der mit den Massen m multiplicirten Flächenräume oder Sektorengeschwindigkeiten stets gleich Null. Man kann dies einfach so ausdrücken, dass ein Theil der materiellen Punkte den beliebig gewählten Punkt im Sinne des Uhrzeigers, ein anderer Theil ihn im entgegengesetzten Sinne umkreisen muss und zwar so, dass die statischen Momente der Bewegungsgrössen für beide Umkreisungsrichtungen gleich gross sind.

b) Punkthaufen mit sonst beliebiger Anfangsbewegung, dessen Schwerpunkt aber zu Anfang ruhte und auf den keine äusseren Kräfte wirken.

Der Schwerpunkt muss hier wie im vorigen Falle dauernd in Ruhe und das statische Moment der Bewegungsgrösse muss constant bleiben. Dieses ist aber jetzt nicht gleich Null, sondern

gleich dem durch den Anfangszustand gegebenen Werthe. Bezeichnen wir diesen mit $\mathfrak{C}$, so ist

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C}.$$

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass im vorliegenden Falle die Constante $\mathfrak{C}$ unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes ist. Um dies zu beweisen, wähle man einen zweiten Momentenpunkt, von dem die Hebelarme $\mathfrak{r}'$ gerechnet werden. Dann ist für diesen

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}' = \mathfrak{C}'.$$

Für $\mathfrak{r}'$ können wir aber schreiben

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \mathfrak{a},$$

wenn mit $\mathfrak{a}$ der Radiusvektor vom zweiten zum ersten Momentenpunkte bezeichnet wird. Damit erhalten wir

$$\mathfrak{C}' = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{r} + \mathfrak{a}) = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} + \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}.$$

In der letzten Summe ist $\mathfrak{a}$ constant und man hat daher

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} = V(\Sigma m \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{a} = 0$$

nach Gl. (80) und der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt ruhen sollte. In der That wird also

$$\mathfrak{C}' = \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{C}.$$

Der Drall eines Punkthaufens, dessen Schwerpunkt ruht, ist daher eine von der Wahl des Momentenpunktes unabhängige und überdies, wenn keine äusseren Kräfte wirken, der Zeit nach constante Grösse. Die Bedeutung dieses Satzes möge noch an einer seiner bekanntesten und wichtigsten Anwendungen näher erläutert werden.

Wir wählen das Sonnensystem, also die Sonne sammt ihren Planeten und deren Trabanten u. dgl. als den Punkthaufen, auf den wir den Satz anwenden wollen. Zugleich setzen wir voraus, dass der Schwerpunkt dieses Haufens gegenüber einem festen Raume, für den das Trägheitsgesetz gilt (vgl. Bd. I, S. 19) zu Anfang in Ruhe war und dass die äusseren Kräfte, die von den fernen Weltkörpern des Fixsternhimmels ausgehen, so gering

sind, dass sie vernachlässigt werden dürfen. — Zugleich sei übrigens bemerkt, dass man diese Voraussetzungen zum Theile auch fallen lassen kann; man würde dann auf Grund der unter c) und e) folgenden Betrachtungen zu ganz ähnlichen Schlüssen gelangen. Hier beschränke ich mich aber auf die Besprechung des einfachsten Falles.

Die Wahl des Momentenpunktes ist, wie bewiesen, gleichgültig und wir können dazu etwa den Sonnenmittelpunkt nehmen. Um diesen bewegen sich die Planeten alle in demselben Sinne und auch die Sonne besitzt eine Drehung in der gleichen Richtung. Jedenfalls wird also der Drall des Sonnensystems nicht gleich Null sein. Dagegen muss er nach Grösse und Richtung constant sein. Hierdurch ist eine, trotz aller Lagenänderungen, die vorkommen mögen, constante Richtung gegeben. Wenn die Planetenbahnen alle in einer Ebene enthalten wären und auch die Drehbewegungen u. s. f. alle parallel zu dieser Ebene erfolgten, wäre der Drall, als ein statisches Moment, senkrecht zu dieser Ebene gerichtet. Diese Voraussetzung ist zwar nicht erfüllt, aber die meisten Planetenbahnen u. s. f. treten doch auch nicht sehr erheblich aus einer gewissen mittleren Ebene heraus. Hiernach liegt es nahe, nach einer solchen mittleren Ebene zu suchen, die unbeweglich im Raume festliegt, trotz aller Abweichungen und Schwankungen, die bei den einzelnen Bestandtheilen der Bewegungsgrösse des Haufens vorkommen mögen. Diese Ebene wird durch den Flächensatz gegeben; es ist jene, die senkrecht zu der unveränderlichen Richtung von $\mathfrak{C}$ steht. Sie heisst nach Laplace, von dem diese Betrachtung herrührt, die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Natürlich kommt es, wenn man von ihr redet, nur auf ihre Stellung, nicht auf ihre besondere Lage an. Am einfachsten ist es zwar, sie sich durch den Schwerpunkt des ganzen Haufens gezogen zu denken; aber auch jede zu dieser parallele Ebene kann als unveränderliche Ebene im Sinne unseres Satzes angesehen werden.

c) Punkthaufen mit beliebiger Anfangsbewegung ohne Wirkung äusserer Kräfte.

Der Schwerpunkt beschreibt eine gradlinige Bahn mit constanter Geschwindigkeit. Der Drall bleibt für jeden Momentenpunkt der Zeit nach constant, für verschiedene Momentenpunkte ist er aber verschieden. Zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ besteht die Beziehung (vgl. die Ableitung unter b))

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} + V M \mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{a}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite ist stets senkrecht zur Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, also auch senkrecht zur Schwerpunktsbahn gerichtet. Daraus folgt, dass alle $\mathfrak{C}$ gleiche Projektionen auf die Schwerpunktsbahn haben. Ferner ist $\mathfrak{C}$ für alle Momentenpunkte gleich, die auf einer Parallelen zur Schwerpunktsbahn liegen, denn für zwei solche Momentenpunkte ist der Abstand $\mathfrak{a}$ parallel zu $\mathfrak{v}_0$ und das äussere Produkt aus beiden wird daher zu Null.

Zum Begriffe der unveränderlichen Ebene gelangen wir hier, wenn wir von jedem Punkte des Haufens nur die Relativgeschwindigkeit zum Schwerpunkte betrachten, also den Ausdruck

$$\mathfrak{K} = \Sigma V m (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) \cdot \mathfrak{r}$$

bilden. Dieser ist für alle Momentenpunkte gleich; denn für einen zweiten Momentenpunkt hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}' &= \Sigma V m (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)(\mathfrak{r} + \mathfrak{a}) \\ &= \Sigma V m (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)\, \mathfrak{r} + V \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} - V M \mathfrak{v}_0 \mathfrak{a} = \mathfrak{K}, \end{aligned}$$

da sich die beiden letzten Glieder nach Gl. (80) gegen einander fortheben. Die unveränderliche Ebene steht senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{K}$.

Wenn $\mathfrak{K}$ zu Anfang Null war, muss es auch Null bleiben. Man kann dies dahin ausdrücken, dass ein unveränderlicher Körper, der zu Anfang keine Rotation ausführte, sich nicht von selbst (durch innere Kräfte) umdrehen kann. Ein veränderlicher Körper kann es aber, wenn auch für ihn immer noch $\mathfrak{K}$ gleich Null bleiben muss; auf diesen interessanten und auch praktisch sehr wichtigen Fall werde ich nachher ausführlicher eingehen.

d) Punkthaufen, auf den äussere Kräfte einwirken, die alle von einem festen Punkte ausgehen.

In diesem Falle bezieht man den Flächensatz gewöhnlich nur auf den festen Punkt als Momentenpunkt. Da für ihn das Moment der äusseren Kräfte immer noch gleich Null ist, bleibt auch der auf ihn bezogene Drall constant. Als unveränderliche Ebene wird auch hier oft jene bezeichnet, die senkrecht zu diesem statischen Momente steht. — Hierher gehört namentlich die Bewegung eines starren Körpers, von dem ein Punkt festgehalten ist (Kreisel), so lange man die Wirkung der Schwere vernachlässigen kann. Als einzige äussere Kraft kommt dann der Auflagerdruck an dem festgehaltenen Punkte in Betracht.

e) Punkthaufen, auf den parallele äussere Kräfte wirken.

Zu einer einfachen Aussage gelangt man in diesem Falle dadurch, dass man den Punkthaufen auf eine Ebene projicirt, die senkrecht zur Richtung der äusseren Kräfte steht und nun die Bewegung in dieser Projektionsebene verfolgt. Die Projektion von $\mathfrak{v}$ sei $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{r}'$ sei ein von einem beliebigen Momentenpunkte in der Projektionsebene nach der Projektion von m gezogener Hebelarm. Dann ist $V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}'$ zugleich das statische Moment von $m\mathfrak{v}$ in Bezug auf eine durch den gewählten Momentenpunkt senkrecht zur Projektionsebene gezogene Axe. Ebenso ist $V \mathfrak{P}' \mathfrak{r}'$ zugleich das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für diese Axe. Nun gilt für jeden Momentenpunkt im Raume der Flächensatz in der Form

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r}.$$

Aus jeder Gleichung zwischen gerichteten Grössen lässt sich aber sofort eine Gleichung zwischen den Projektionen auf irgend eine Axe ableiten. Projiciren wir also auf eine Axe, so gilt auch

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}' = \Sigma V \mathfrak{P}' \mathfrak{r}'.$$

Dies gilt zunächst für jede beliebig gerichtete Axe. Für die parallel zu den Kräften $\mathfrak{P}$ gewählte Axe wird dagegen das statische Moment der Kräfte $\mathfrak{P}$ zu Null, da die Projektion $\mathfrak{P}'$

auf die zur Axe senkrecht stehende Projektionsebene verschwindet. Hiernach geht die Gleichung über in

$$\Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{r}' = \mathfrak{C}.$$

Wählt man einen anderen Momentenpunkt in der Projektionsebene, setzt also an Stelle von $\mathfrak{r}'$ etwa $\mathfrak{r}' + \mathfrak{a}$, so kommt ein neues Glied in den Ausdruck für $\mathfrak{C}$ hinein, das gleich

$$\Sigma V m \mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{a} = V(\Sigma m \mathfrak{v}') \cdot \mathfrak{a} = V M \mathfrak{v}_0' \cdot \mathfrak{a}.$$

gefunden wird. War die Schwerpunktsgeschwindigkeit von vornherein entweder Null oder parallel zur Richtung der Kräfte $\mathfrak{P}$, so bleibt $\mathfrak{v}_0'$ stets gleich Null und der in der Projektionsebene genommene Drall $\mathfrak{C}$ hat für jeden Momentenpunkt denselben Werth. Natürlich kommt es dabei nicht auf die Richtung von $\mathfrak{C}$ an, die selbstverständlich ist (nämlich rechtwinklig zur Projektionsebene), sondern nur auf die Grösse von $\mathfrak{C}$.

§ 14. Einfache Anwendungen des Flächensatzes.

Die einfachste und eine der wichtigsten Anwendungen des Flächensatzes besteht in der Entscheidung der Frage, ob und unter welchen näheren Umständen ein sich selbst überlassener Punkthaufen, zwischen dessen einzelnen Theilen beliebige innere Kräfte auftreten, sich selbst im Raume umzudrehen vermag. Fast immer wird hierbei der Flächensatz in Verbindung mit dem Schwerpunktssatze gebraucht. Nach diesem vermag sich der Punkthaufen durch innere Kräfte nicht selbst fortzubewegen, da trotz aller relativen Bewegungen zwischen den einzelnen Punkten des Haufens der Schwerpunkt stets in Ruhe bleiben muss. Früher hat man öfters in Anlehnung hieran den Flächensatz dahin ausgesprochen, dass sich ein Punkthaufen ohne fremde Beihülfe, d. h. ohne Auftreten äusserer Kräfte an ihm, auch nicht selbst umzudrehen vermöge. Dies war aber nur eine irrige Deutung des Flächensatzes, die freilich lange Zeit fast allgemein verbreitet war und als Irrthum erst erkannt wurde, nachdem ein Widerspruch zwischen ihr und den Erfahrungsthatsachen festgestellt war. An der Aussage des Satzes selbst,

an den Formeln, Ableitungen und Beweisen dafür brauchte übrigens nicht das Geringste geändert zu werden; nur bei der Anwendung auf den concreten Fall muss, wie sich hierbei herausstellte, mit grösserer Vorsicht verfahren werden, als früher.

Diese Frage wurde erst in neuerer Zeit — nämlich im Jahre 1894 in der Pariser Akademie der Wissenschaften — angeregt und entschieden. Es handelte sich darum, eine mechanische Erklärung dafür zu finden, wie es eine Katze fertig bringt, beim Fallen aus grösserer Höhe stets mit den Füssen voran auf den Boden zu kommen. Von den Vertretern der Mechanik wurde auf Grund der üblichen älteren Deutung des Flächensatzes zunächst die Ansicht ausgesprochen, dass die Drehung nur die Folge eines Abstosses sei, der im Augenblicke des Herabfallens, so lange also die Katze noch mit anderen Körpern in Berührung war, ertheilt wurde. Man schloss auf Grund des Flächensatzes ungefähr so: Wenn der Körper während des Herabfallens zunächst keine Drehbewegung hätte, so könnte etwa die Katze den Vorderkörper nach einer ihr genehmen Richtung umdrehen. Hierbei müsste aber dem Flächensatze zufolge gleichzeitig auch eine Drehung des Hinterkörpers in entgegengesetzter Richtung zu Stande kommen. Wenn nun etwa vorher alle vier Beine der Katze nach oben gestanden hätten, so müsste sie, um nachher alle vier nach unten zu bringen, Vorder- und Hinterkörper nach Art eines Schraubenumlaufs gegen einander verdreht haben.

Diese Betrachtung war an sich nicht unrichtig; es wurde dabei nur übersehen, dass noch andere Möglichkeiten einer relativen Drehbewegung der Körpertheile gegen einander bestehen, als die hier allein in Aussicht genommene zwischen Vorder- und Hinterkörper. Dass solche noch möglich sein mussten, ergab sich alsbald durch einwandfreie Versuche, indem man Katzen mit den Beinen nach oben an Schnüren aufhing und diese vorsichtig durchschnitt, so dass die Katze ausser Berührung mit anderen Körpern kam, bevor sie sich noch durch einen Abstoss eine Rotationsgeschwindigkeit zu ertheilen

vermochte. Sie fiel dann in einen dunklen Raum hinab, dessen Fallhöhe sie nicht vorherzusehen vermochte und kam trotzdem bei sehr verschiedenen (nicht zu kleinen) Fallhöhen stets mit den Füssen zuerst auf dem Boden an. Ausserdem hat man auch die Körperbewegungen, die sie während des Fallens ausführte, noch durch eine Reihe schnell aufeinanderfolgender Momentphotographieen ermittelt.

Nachdem erst die Thatsache des Umdrehens einwandfrei festgestellt war, kam man auch bald auf die mechanische Erklärung dafür. Es hätte natürlich keinen Zweck, wenn ich diese grade an dem historischen Beispiele geben wollte; ich werde vielmehr, um das Wesen der Sache zu erklären, ein einfacheres wählen. — Der Fehler, den man früher begangen hatte, bestand vor allem darin, dass man nicht beachtet hatte, dass sich Theile eines Körpers gegen den Rest beliebig oft im gleichen Sinne zu drehen vermögen, ohne dass sich nach jedem Umlaufe die Gestalt des Körpers irgendwie verändert hätte. Fasst man z. B. mit der rechten Hand eine Stange, einen Säbel o. dgl., streckt hierauf den Arm senkrecht nach oben aus und führt mit der Stange in horizontaler Richtung eine kreisförmige Bewegung um das Handgelenk herum aus, so vermag man diese Bewegung beliebig oft im gleichen Sinne zu wiederholen. Ein Mensch, der allen äusseren Kräften entzogen frei im Raume schwebte und vorher in Ruhe wäre, müsste, wenn er die beschriebene Bewegung ausführte, sich selbst im entgegengesetzten Sinne umdrehen, als die Stange, die er über seinem Kopfe rotiren lässt. Denkt man sich ihn etwa auf eine Ebene projicirt, die senkrecht zu seiner Längsaxe oder senkrecht zur Rotationsaxe des Stabes steht, so bestimmt sich die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, die er selbst ausführt, sehr einfach aus der Bedingung, dass für jeden Momentenpunkt, also etwa für die Projektion der Längsaxe, das Produkt aus den Sektorengeschwindigkeiten und den Massen seines Körpers ebenso gross ist, als das gleiche für die Masse des Stabes gebildete Produkt. So lange der Stab weiter herumgeschwungen wird, dreht sich auch der Mensch im entgegen-

gesetzten Sinne; sobald aber der Stab angehalten wird, hört auch der Mensch auf, sich weiter zu drehen. Er kommt dann wieder ganz zur Ruhe, sieht aber jetzt nach einer ganz anderen Richtung als zu Anfang. Durch das angegebene Mittel hätte er es also in der Hand, sich nach Wunsch jede beliebige Stellung im Raume zu geben.

Setzt man etwa an die Stelle des Stabes im vorigen Beispiele bei der herabfallenden Katze den Schwanz, der ebenfalls beliebig oft um die Längsaxe des Körpers herumgedreht werden kann, so hat man schon eine Möglichkeit für die Wendung des Körpers nach abwärts. Es ist aber nicht einmal die einzige, wie aus den folgenden Betrachtungen leicht hervorgehen wird.

Man nehme jetzt nämlich an, dass ein seiner Gestalt nach veränderlicher Körper auf irgend eine Art schon eine gewisse Rotationsgeschwindigkeit erlangt hat. Aeussere Kräfte sollen entweder ganz fehlen oder wie bei einem herabfallenden Körper parallel und den Massen proportional sein. Auf die Umdrehung des Körpers können sie dann keinen Einfluss haben und wir können daher, wenn es sich nur um die Drehbewegungen handelt, von ihnen absehen. Wenn keine äusseren Kräfte wirken, muss das Moment der Bewegungsgrössen constant bleiben. Stellen wir uns jetzt vor, dass sich der Körper zusammenzieht, so nehmen die etwa von der Projektion des Schwerpunkts gezogenen Hebelarme ab und da das Produkt aus ihnen und den Bewegungsgrössen constant bleibt, muss die Winkelgeschwindigkeit der Drehung zunehmen. Wir können z. B. daraus sofort schliessen, dass ein Himmelskörper, der um seine Axe rotirt, seine Winkelgeschwindigkeit vergrössert, sobald er sich zusammenzieht. Würde sich etwa unser Erdball infolge von Abkühlungen zusammenziehen, so müsste die Dauer eines Tages dadurch verkürzt werden.*)

*) Diese Aussage setzt natürlich voraus, dass eine Zeiteinheit angegeben werden kann, die als unveränderlich betrachtet werden darf. Um die etwaige Veränderlichkeit der Tagesdauer während eines längeren Zeitraumes zu prüfen, kann man sich etwa die Aufgabe stellen,

Man betrachte ferner einen Gymnastiker, der sich bei einem Sprunge in der Luft überschlägt (sog. Salto mortale). Der Schwerpunkt beschreibt in der Luft eine Parabel. Schon beim Absprunge hat der Springer seinem Körper eine gewisse Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Schwerpunkt gehende horizontale Rotationsaxe gegeben. Diese würde aber nicht ausreichen, den Körper während des Fluges durch die Luft so weit umzudrehen, dass er wieder mit den Beinen auf den Boden käme. Der Gymnastiker, der diese Bewegung freilich nur auf Grund seiner Erfahrung und ohne Kenntniss des Flächensatzes ausführt, hat es aber in der Hand, die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehbewegung beträchtlich zu steigern, dadurch, dass er seinen Körper während des Sprunges stark zusammenzieht (durch Anziehen der Arme und Beine u. s. f.). Hierdurch gelingt es ihm, während der für das Durchlaufen der Wurfparabel gegebenen Zeit eine hinreichende Drehung des Körpers zu veranlassen, die ihn wieder mit den Beinen den Boden erreichen lässt.

Betrachtet man ferner einen vorher ruhenden Körper, der aus zwei ungefähr gleichen Theilen besteht, die sich nicht vollständig, sondern nur um einen gewissen Winkel gegen einander zu drehen vermögen, so kann eine Umdrehung des ganzen Körpers, an deren Schluss die Anfangsgestalt wieder erreicht wird, auch auf folgende Art bewirkt werden. Man drehe zuerst den Hauptheil I in dem gewünschten Sinne, wobei freilich der Hauptheil II eine entgegengesetzte Drehung ausführt. Während dieser ersten Periode soll aber durch passende Anordnung (bei einem lebenden Wesen etwa durch Ausstrecken oder Anziehen der Arme und Beine) der Hauptheil I möglichst zusammengezogen, der Hauptheil II möglichst aus-

---

die Anzahl der Lichtschwingungen für Licht von einer genau definirten Farbe oder Wellenlänge abzuzählen, die in die Dauer eines Tages hineinfallen. Hiermit ist zunächst wenigstens theoretisch die Möglichkeit gegeben, Abweichungen in der Tagesdauer nachzuweisen. Ausser dem angegebenen giebt es indessen auch noch eine Reihe anderer Mittel, die zu dem gleichen Zwecke benutzt werden könnten.

einandergespreizt sein. Dann wird I eine viel grössere Winkelgeschwindigkeit erlangt haben, als II. Nach einiger Zeit wird die relative Drehung beider Körpertheile gegen einander eingestellt. Sofort hört damit die weitere Drehbewegung auf. Der Haupttheil I hat aber jetzt schon einen grossen Winkel in dem gewünschten, der Haupttheil II nur einen kleinen Winkel im unerwünschten Sinne durchlaufen. Hierauf werde umgekehrt der Haupttheil I möglichst ausgespreizt und der Haupttheil II möglichst zusammengezogen. Wenn jetzt eine Drehung beider Theile gegen einander vorgenommen wird, die Haupttheil II im erwünschten Sinne dreht, so wird dieser eine grosse und Haupttheil I eine kleine Winkelgeschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne annehmen. Wenn diese Drehung so weit vorgeschritten ist, dass beide Theile wieder in ihrer normalen Lage zu einander sind, wird sich der ganze Körper bereits um die Differenz des im erwünschten Sinne zurückgelegten grossen und des im unerwünschten Sinne zurückgelegten kleinen Winkels gedreht haben. Man sieht nun ein, dass durch genügend häufige Wiederholung beider aufeinanderfolgender Relativbewegungen jede beliebige Wendung des Körpers herbeigeführt werden kann

Die Zahl der Beispiele, bei denen man auf ähnliche Art, also blos auf Grund der einfachsten Ueberlegungen ohne jede Rechnung wenigstens zu einem qualitativen Resultate kommt, ist sehr gross. Einige davon sollen noch zur weiteren Erläuterung angeführt werden.

Man nehme an, dass die Insassen eines Luftballons den Wunsch haben, ihr Fahrzeug so zu drehen, dass etwa eine andere Seite des Ballons oder der Gondel die Richtung nach der Sonne hin einnehme. Sie können dies ausführen, indem sie etwa selbst im entgegengesetzten Sinne im Korbe herumlaufen oder sich auch nur um ihre Axe drehen oder, wenn ihnen dies zu unbequem ist, indem sie einen Stab über dem Kopfe so herumschwingen, wie dies früher beschrieben wurde. Wenn dies oft genug geschehen ist, wird die gewünschte Wendung des Fahrzeugs ausgeführt sein und sobald mit der Dreh-

bewegung aufgehört wird, verharrt auch der Ballon in seiner neuen Stellung zur Sonne.

Ein Schiff, das ruhig auf dem Wasser liegt, kann auf einfachere Weise gewendet werden, da es leicht möglich ist, mit Hülfe von Rudern oder von Stangen, die bis auf den Grund reichen, äussere Kräfte von hinreichendem Betrage darauf wirken zu lassen, um es bald in die gewünschte Richtung zu bringen. Aber auch wenn solche Mittel nicht vorhanden oder nicht zugänglich wären, liesse sich die Wendung auf dieselbe Art bewirken, wie beim Luftballon. Hätte man etwa ein Rad, das auf dem Schiffe um eine vertikale Axe drehbar angebracht wäre, so brauchte ein Passagier dieses Rad nur hinreichend oft in einem gewissen Sinne umzudrehen, um eine Wendung des Schiffes nach der entgegengesetzten Richtung herbeizuführen. Wenn das Rad etwa in der Cajüte ohne jede Verbindung nach aussen hin angebracht wäre, brauchte man diesen Raum gar nicht zu verlassen, um die gewünschte Richtungsänderung des Schiffes zu bewirken. Man könnte sogar, um einen extremen Fall zu nennen, behaupten, dass schon die genügend oft im gleichen Sinne wiederholte Drehung eines Fingerrings um den in lothrechter Richtung gehaltenen Finger mit der Zeit eine Wendung des Schiffes herbeiführen müsste, wenn die Wirkung nicht so gering wäre, dass sie neben den niemals ganz zu vermeidenden zufälligen äusseren Einflüssen verschwindet und daher durch die Beobachtung nicht bestätigt werden kann.

Zu den als „zufällig" bezeichneten äusseren Einflüssen gehört übrigens bei den jetzt erwähnten Beispielen einer, der für den Erfolg sehr wesentlich ist und auf den, da er stets zu erwarten ist, hier noch besonders aufmerksam gemacht werden soll. Der Luftballon oder das Schiff werden nämlich, sobald sie sich infolge der auf ihnen ausgeführten Drehbewegungen selbst in umgekehrter Richtung drehen, hierbei auf einen Luft- oder Wasserwiderstand stossen, der die Bewegung zwar zunächst nicht verhindert, ihre Geschwindigkeit aber allmählich verringert. Man kann diesem Uebelstande auch

nicht ohne Weiteres dadurch abhelfen, dass man die Drehbewegung auf dem Fahrzeuge selbst einstellt und sie später von Neuem wieder aufnimmt. Hat sich nämlich nach der ersten Ausführung der Drehbewegungen die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs durch den Luftwiderstand u. s. f. vermindert und man stellt hierauf die Drehbewegung ein, so verharrt das Fahrzeug nun nicht mehr in seiner augenblicklichen Stellung, sondern es dreht sich sofort entgegengesetzt der ursprünglichen Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit, die gleich dem durch Reibung o. dgl. verursachten Verluste an der ursprünglichen Winkelgeschwindigkeit ist. Wenn man von den vorhergehenden Ausführungen praktischen Gebrauch machen wollte, müsste man dies wohl im Auge behalten. Durchführbar wäre aber, wie man leicht erkennt, die gewünschte Wendung immer, wenn andere äussere Einflüsse ausser einem derartigen Bewegungswiderstande nicht vorkämen.

Wenn alle Eisenbahnzüge der Erde und alle Schiffe, die sich auf der Fahrt befinden, die Erde stets parallel zum Aequator, etwa in der Richtung von Westen nach Osten, also im gleichen Sinne mit der Rotationsbewegung der Erde umkreisten und keine im entgegengesetzten Sinne, so müsste dadurch die Winkelgeschwindigkeit der Erde etwas herabgesetzt werden, d. h. die Dauer eines Tages müsste sich vergrössern. Sobald die Schiffe und die Züge zur Ruhe gebracht würden, müsste auch der Tag seine frühere Länge wieder annehmen. Der Einfluss wäre freilich gering; er könnte aber für genaue astronomische Messungen merklich werden, wenn es sich um die bewegten Massen von Meeresströmungen oder von Winden handelte, die eine stetige Umkreisung der Erde im gleichen Sinne ohne Compensation durch andere damit zusammenhängende Strömungen in der entgegengesetzten Richtung ausführten.

Auch wenn ein Knabe eine Schaukel, auf der er vorher in Ruhe sass, ohne äusseren Anstoss in Bewegung setzen will, beginnt er damit, durch Anfassen der Aufhängeschnüre mit den Händen, Ausstrecken der Beine in horizontaler Richtung und Ueberneigen des Oberkörpers nach hinten sich selbst eine

Drehbewegung zu ertheilen. Betrachtet man den Aufhängepunkt der Schnüre als Momentenpunkt, so muss für ihn das Moment der Bewegungsgrösse vorläufig noch Null bleiben, da die Schnurspannung durch den Momentenpunkt geht und die einzige andere äussere Kraft an der Schaukel, das Eigengewicht, zunächst ebenfalls noch. Der einen Drehung muss daher eine entgegengesetzte entsprechen und diese besteht in einer Drehung des ganzen Punkthaufens um den Aufhängepunkt, womit die gewünschte Pendelbewegung zunächst einmal eingeleitet ist. — Ich begnüge mich hier mit diesen Andeutungen, möchte aber die Bewegungen, die zum Ingangsetzen der Schaukel führen, einem genaueren Nachdenken empfehlen, da das Beispiel nach manchen Richtungen hin lehrreich ist. Man mache sich namentlich auch darüber klar, dass die Schaukel überhaupt nicht ohne äusseren Anstoss in regelmässige Pendelbewegungen gebracht werden könnte, wenn die Aufhängeschnüre unendlich lang wären. Anstatt dessen kann man, um bei praktisch zu verwirklichenden Verhältnissen zu bleiben, auch sagen, dass es nur sehr schwer und nach sehr lange fortgesetzten zweckmässigen Bewegungen möglich wäre, Pendelschwingungen von grösserem Ausschlage herbeizuführen, wenn die Schnüre sehr lang wären, wie etwa die Seile in einem Glockenthurme bei festgehaltener Glocke.

§ 15. Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen nach dem Verfahren von Schlick.

In einem Kahne, der von mehreren Personen besetzt ist, kann man sehr deutlich wahrnehmen, wie jede Bewegung eines Insassen zu einer Bewegung des Fahrzeuges führt, die auf Grund der Schwerpunkts- und Flächensätze mit Berücksichtigung der besonderen Bedingungen, denen der hier als äussere Kraft auftretende Auftrieb des Wassers unterworfen ist, leicht vorausgesehen werden kann. Man weiss auch, dass selbst unmerkliche Bewegungen, die nur in gleichen Zwischenräumen wiederholt werden, mit der Zeit zu einem starken Schaukeln

des Bootes führen können. Das Boot führt dann erzwungene Schwingungen aus, die im Falle der Resonanz sehr gross werden können.

Auf einem grossen Dampfschiffe macht es nichts aus, wenn einer oder mehrere Fahrgäste darin auf und ab gehen. Einerseits sind hier die bewegten Massen zu klein im Vergleiche zur Masse des ganzen Schiffes und andererseits dauert es auch zu lange, bis die herumgehenden Personen etwa von einer Schiffsseite zur anderen gelangen. Sie müssten schon sehr schnell laufen, um im gleichen Takte mit den Eigenschwingungen des Schiffes herüber und wieder hinüber gelangen zu können, um es so zu kräftigeren erzwungenen Schwingungen anzuregen.

Anders ist es aber mit den grossen Dampfmaschinen, die zur Fortbewegung des Schiffes dienen. Die bewegten Theile sind hier einerseits sehr schwer, so dass sie selbst gegenüber den Massen des ganzen Schiffes nicht vernachlässigt werden können und andererseits bewegen sie sich auch mit grossen Geschwindigkeiten. Es lässt sich daher leicht voraussehen, dass die Schiffe durch die Massenverschiebungen, die sich in regelmässigem Wechsel in ihnen wiederholen, zu Schwingungen veranlasst werden, die sich oft sehr unangenehm bemerkbar gemacht haben. Man hat daher auf Abhülfe gesonnen und diese ist in praktisch befriedigender Weise durch das von Schlick angegebene Massenausgleichsverfahren gefunden worden.

Die Forderungen, die erfüllt sein müssen, damit die bewegten Massen ganz ohne Einfluss auf die Bewegungen des Schiffes bleiben, lassen sich auf sehr einfache Weise in folgenden beiden Sätzen aussprechen:

1) der Schwerpunkt der beweglichen Massen muss stets in relativer Ruhe zum Schiffe bleiben,

2) der Drall der beweglichen Massen muss für jeden auf dem Schiffe liegenden Momentenpunkt in jedem Augenblicke gleich Null sein.

Denkt man sich nämlich ein Schiff zuerst in Ruhe auf ruhigem Wasser und hierauf die Maschinen im Leerlaufe (mit

abgekuppelten Schaufelrädern oder Schrauben) in Bewegung gesetzt, so muss nach dem Schwerpunktssatze der Gesammtschwerpunkt des ganzen Punkthaufens nach wie vor in Ruhe bleiben. Wenn nun dafür gesorgt ist, dass sich auch der Schwerpunkt der beweglichen Theile für sich genommen nicht verschiebt, so folgt, dass sich auch der Schwerpunkt des Schiffskörpers nicht verschieben kann. — Ferner muss nach dem Flächensatze der Drall des ganzen Punkthaufens für jeden Momentenpunkt gleich Null bleiben, da sich die äusseren Kräfte (Gewicht und Auftrieb) gegenseitig aufheben. Wird diese Bedingung aber schon von den beweglichen Massen für sich genommen erfüllt, so muss auch das Moment der Bewegungsgrösse des Schiffskörpers dauernd gleich Null bleiben. Das ist aber für den als starren Körper aufzufassenden Schiffskörper nur möglich, wenn er keine Rotationsbewegung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe annimmt.

Hiermit ist bewiesen, dass der Schiffskörper, der vorher in Ruhe war, auch dauernd in Ruhe bleibt, wenn die Maschinen zu laufen beginnen. Eine Massenausgleichung, die die vorher aufgestellten beiden Forderungen erfüllt, ist demnach eine vollkommene. — Es möge hier die Bemerkung eingeschaltet werden, dass der Flächensatz bisher in technischen Kreisen noch längst nicht die Beachtung gefunden hat, die er in Wirklichkeit verdient. Am deutlichsten geht dies wohl aus dem Umstande hervor, dass in den zahlreichen Arbeiten, die in den letzten Jahren über den Massenausgleich in deutschen und ausländischen Zeitschriften erschienen sind, niemals von dem Flächensatze Gebrauch gemacht wurde. Man kann diesen Satz freilich auch vermeiden; er ist niemals unentbehrlich, lässt sich vielmehr stets, wenn es verlangt wird, dnrch die Anwendung anderer Sätze ersetzen. Von welchem Vortheile seine Anwendung aber für die rasche und übersichtliche Durchführung der Rechnungen und für die anschaulische Fassung der Resultate ist, wird wohl jeder zugeben, der die vorher unter 2) hingestellte und mit geringer Mühe sofort als richtig nachgewiesene Forderung mit den Betrachtungen vergleicht, die in den bisherigen Arbeiten

über den Massenausgleich an deren Stelle gesetzt werden mussten.

Das Schlick'sche Verfahren entspricht den aufgestellten Forderungen nicht streng, sondern nur annähernd. Es lässt sich ferner (von gewissen Ausnahmefällen abgesehen) nur an Maschinen zur Anwendung bringen, die mindestens vier Cylinder haben. Solche kommen bei den grossen Dampfern, die Maschinen mit dreistufiger Expansion besitzen, ohnehin gewöhnlich vor, da an Stelle eines einzigen Niederdruckcylinders, der zu gross ausfallen würde, besser zwei genommen werden. Maschinen mit mehr als vier Cylindern hat man übrigens bisher nur selten ausgeführt; es ist daher in der That nur nöthig, den Massenausgleich der viercylindrischen Maschine zu untersuchen.

Abb. 18 giebt eine schematische Darstellung der Maschine in zwei Ansichten, mit den Cylindern I bis IV. Geachtet wird nur auf die Bewegungscomponenten der Kolben, Kolbenstangen, Pleuelstangen und Kurbeln in der Richtung der Cylinderaxen. Die dazu senkrechten Bewegungscomponenten führen gegenüber den anderen nur zu kleinen Bewegungsgrössen, die ebenso wie die Bewegungsgrössen der Steuerungstheile, Pumpen u. s. w. vernachlässigt werden sollen, da es sich nur um die Gewinnung einer angenäherten Lösung handelt.

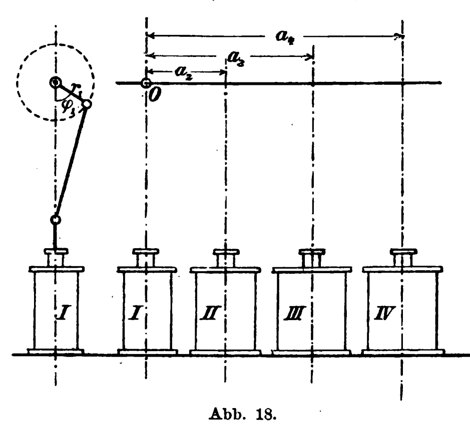


Abb. 18.

Ferner kann hier auch der Kolbenweg x_1 des ersten Kolbens, von dessen Totpunktlage aus gerechnet, wie früher im I. Bande, S. 207 der 2. Auflage

$$x_1 = r_1 - r_1 \cos \varphi_1$$

gesetzt werden, wenn r und φ die aus der Abbildung ersichtliche Bedeutung haben. Bei dieser Formel für den Kolbenweg

betrachtet man die Kurbelstange als unendlich lang gegenüber dem Kurbelhalbmesser. Es möge indessen hier eingeschaltet werden, dass man die Rechnung auch schon genauer, mit Berücksichtigung des endlichen Verhältnisses zwischen Kurbelstange und Kurbelhalbmesser durchgeführt hat. Darauf, wie auf eine Reihe anderer Betrachtungen, die mit dem Massenausgleiche zusammenhängen, kann aber hier nicht eingegangen werden. Eine ausführliche Darstellung davon findet man in einer Reihe von Abhandlungen über die Dynamik der Kurbelgetriebe in den letzten Jahrgängen der Z. f. Math. u. Physik von Prof. H. Lorenz (kürzlich auch separat erschienen.)

Aus der Formel für x folgt für die Geschwindigkeit v_1 der mit M_1 bezeichneten Masse des ersten Kolbens und seiner Zubehörtheile

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = r_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Alle Kurbeln sind auf derselben Welle aufgekeilt und daher ist

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d\varphi_4}{dt} = u.$$

Von der Winkelgeschwindigkeit u der Schiffswelle wird angenommen, dass sie als constant betrachtet werden könne. Gestützt wird diese Annahme durch die Ueberlegung, dass schon geringe Aenderungen in der Winkelgeschwindigkeit u zu erheblichen Aenderungen in dem Drucke zwischen der Schiffsschraube und dem Fahrwasser führen, also auch eine grosse Mehrarbeit des Dampfes gegenüber der durchschnittlichen verlangen. Wie gross die Schwankungen von u sind, die etwa erwartet werden können, soll jetzt nicht weiter untersucht, jedenfalls soll aber an der Schlick'schen Annahme festgehalten werden.*)

---

*) Im Uebrigen kommt es auf die Veränderlichkeit von u, wie aus den Sätzen 1) und 2) auf S. 134 hervorgeht, solange es sich nur um die Frage des Massenausgleichs handelt, überhaupt nicht an. Wenn jene Bedingungen für irgend eine Geschwindigkeit erfüllt sind, bestehen sie auch bei jeder anderen und daher auch bei einer beliebig veränderlichen Geschwindigkeit.

Für die Bewegungsgrösse der Masse M_1 hat man

$$M_1 v_1 = M_1 u r_1 \sin \varphi_1 .$$

Die Richtung ist hier nicht besonders hervorgehoben; sie ist in jedem Falle als lothrecht anzusehen und geht nach oben oder unten, je nachdem $\sin \varphi$ positiv oder negativ ist. — Für die Bewegungsgrösse der zum Cylinder II gehörigen verschieblichen Massen erhält man ebenso

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 \sin \varphi_2$$

oder, wenn man den constanten Winkelunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$ mit α_2 bezeichnet,

$$M_2 v_2 = M_2 u r_2 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_2 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_2)$$

und ebenso für die Massen M_3 und M_4.

Die Bedingung, dass der Schwerpunkt der verschieblichen Massen in Ruhe bleiben soll, kommt darauf hinaus, dass die geometrische Summe der Bewegungsgrössen fortwährend gleich Null ist. Mit Rücksicht darauf, dass hier nur gleich oder entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten in Betracht zu ziehen sind, was schon durch die Vorzeichen von $\sin \varphi_1$, $\sin \varphi_2$ u. s. f. berücksichtigt ist, haben wir daher die Gleichung

$$\begin{aligned} M_1 u r_1 \sin \varphi_1 + M_2 u r_2 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_2 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_2) + \\ + M_3 u r_3 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_3 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_3) + \\ + M_4 u r_4 (\sin \varphi_1 \cos \alpha_4 + \cos \varphi_1 \sin \alpha_4) = 0. \end{aligned}$$

Ordnen wir nach $\sin \varphi_1$ und $\cos \varphi_1$ und streichen den gemeinsamen Faktor u, so geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 \{ M_1 r_1 + M_2 r_2 \cos \alpha_2 + M_3 r_3 \cos \alpha_3 + M_4 r_4 \cos \alpha_4 \} + \\ + \cos \varphi_1 \{ \;0\; + M_2 r_2 \sin \alpha_2 + M_3 r_3 \sin \alpha_3 + M_4 r_4 \sin \alpha_4 \} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für jede Kurbelstellung, also für jeden Werth des Winkels φ_1 erfüllt sein, damit der Schwerpunkt jederzeit in Ruhe bleibe. Dazu gehört, dass die beiden Klammerwerthe einzeln verschwinden. Wir gelangen damit zu zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten der Maschinen, die sich kürzer in der Form

$$\Sigma M r \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma M r \sin \alpha = 0 \tag{83}$$

anschreiben lassen. Die Summirung erstreckt sich hierbei jedesmal auf alle vier Massen und Winkel α_1 ist gleich Null zu setzen, indem unter α_n nach den vorausgehenden Festsetzungen immer der Winkel zu verstehen ist, den die $n$te Kurbel mit der ersten bildet (diese Winkel im Sinne der Umlaufsrichtung der Maschine gezählt). — Selbstverständlich bleiben übrigens die Bedingungsgleichungen (83) auch für Maschinen mit beliebig vielen Cylindern bestehen, von denen verlangt wird, dass keine Schwerpunktsverschiebungen vorkommen.

Wir bilden jetzt die statischen Momente der Bewegungsgrössen. Die Wahl des Momentenpunktes ist hierbei gleichgültig, denn wenn der Schwerpunkt ruht, ist, wie wir früher fanden, das Moment für jeden Momentenpunkt gleich gross. — Wir wählen den in Abb. 18 mit 0 bezeichneten Punkt oder überhaupt irgend einen Punkt auf der Axe des Cylinders I. Das statische Moment der Bewegungsgrösse der Massen I verschwindet für diesen Momentenpunkt. Das Moment für II ist

$$M_2 v_2 a_2 = M_2 u r_2 a_2 (\sin\varphi_1 \cos\alpha_2 + \cos\varphi_1 \sin\alpha_2),$$

wobei mit a_2, wie aus Abb. 18 ersichtlich, der Abstand der Cylinderaxe II von der Cylinderaxe I bezeichnet ist. Die Richtung des Moments ist nicht besonders ersichtlich gemacht; sie steht in jedem Falle senkrecht zu der Ebene, in der alle vier Cylinderaxen enthalten sind und zwischen der Richtung nach vorn oder hinten wird durch das Vorzeichen des vorausgehenden Ausdrucks schon unterschieden. — Wenn die Summe der Momente der Bewegungsgrössen für den Momentenpunkt O und hiermit auch für jeden beliebigen Momentenpunkt verschwinden soll, muss auch die algebraische Summe der nach dem vorigen Muster gebildeten Ausdrücke für alle Massen gleich Null sein. Ordnen wir wieder wie vorher nach $\sin\varphi_1$ und $\cos\varphi_1$, so lautet die Gleichung

$$\sin\varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \cos\alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \cos\alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \cos\alpha_4\} +$$
$$+ \cos\varphi_1 \{0 + M_2 r_2 a_2 \sin\alpha_2 + M_3 r_3 a_3 \sin\alpha_3 + M_4 r_4 a_4 \sin\alpha_4\} = 0$$

und da diese für jedes φ_1 erfüllt sein soll, zerfällt sie in die beiden Bedingungsgleichungen

$$\Sigma Mra \cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma Mra \sin\alpha = 0. \qquad (84)$$

Auch hier muss man sich die Summirung wieder auf alle vier Cylinder erstreckt denken; für die erste Cylinderaxe ist nämlich sowohl a_1 als α_1 gleich Null und hiermit fallen die zugehörigen Ausdrücke, wie aus der vorigen Schreibweise zu ersehen, von selbst fort.

Das Schlick'sche Verfahren beruht nun darauf, die Winkel $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ und die Abstände $a_2 a_3 a_4$, die dadurch freilich noch nicht völlig bestimmt sind, jedenfalls so zu wählen, dass die Gleichungen (83) und (84) erfüllt werden. Die Massen M und die Kurbelhalbmesser r sind bei der Vornahme des Massenausgleichs durch andere Rücksichten bereits als vorgeschrieben zu betrachten. Die drei Winkel α sind dagegen zunächst ganz zur Verfügung des Constructeurs und von den drei Abständen a wenigstens die Verhältnisse $\frac{a_3}{a_2}$ und $\frac{a_4}{a_2}$, die ja auch in der That aus den Gl. (84) allein ermittelt werden können. Einer von den Winkeln α kann also willkürlich (oder auf Grund anderer Anforderungen) gewählt werden. Dann folgen die beiden anderen aus den Gl. (83) und hierauf die Abstandsverhältnisse aus den Gl. (84). Man wird natürlich die Wahl des ersten Winkels α so einrichten müssen, dass die sich aus Gl. (84) ergebenden Abstandsverhältnisse auch wirklich ausgeführt werden können. Wenn nämlich etwa $\frac{a_4}{a_2}$ sehr gross aus der Rechnung gefunden würde, so liesse sich dies nicht ausführen, weil für a_2 ein gewisses Mindestmaass wegen der Abmessungen der Maschinen und für a_4 ein gewisses Höchstmaass wegen der Dimensionen des Schiffes vorgeschrieben ist.

Die sogenannten Schlingerbewegungen, d. h. die pendelnden Bewegungen des Schiffes werden dann zu Stande kommen, wenn die vorher unter 2) angeführte Bedingung, also näherungsweise wenn die Gl. (84) nicht erfüllt sind. Man erkennt hieraus, dass gerade auf diese Gleichungen viel Werth zu legen ist. Den Schwerpunkt unveränderlich festzuhalten, hat man sich auch früher schon öfters bemüht; die grosse Bedeutung der

Gl. (84) für einen praktisch befriedigenden Massenausgleich hat aber erst Schlick erkannt und damit einen wichtigen Fortschritt im Baue der grossen Oceandampfer herbeigeführt. — Zugleich erkennt man übrigens leicht aus den Gl. (83) und (84), dass eine Maschine mindestens vier Cylinder haben muss, wenn der Ausgleich allgemein möglich sein soll.

§ 15a. Anwendung des Flächensatzes auf die Theorie der Turbinen.

Während des gleichförmigen Ganges einer Turbine besitzt der aus dem Laufrade sammt Welle und Wasserinhalt bestehende Punkthaufen stets dieselbe Bewegung. Daher behält auch der auf die Umdrehungsaxe bezogene Drall B dieses Punkthaufens immer denselben Werth, falls man in jedem Augenblicke immer jene Wassertheilchen in Betracht zieht, die sich grade im Laufrade befinden. Bei der Anwendung des Flächensatzes kommt es aber nicht auf den in dieser Weise berechneten Drall an, sondern auf jenen, der stets auf dieselben materiellen Punkte bezogen wird. Dieser erfährt wegen des Weiterströmens der Wassermasse durch die Turbine eine Aenderung, die für ein Zeitelement dt berechnet werden soll.

Bezeichnet man mit M die Masse des die Turbine in der Zeiteinheit durchströmenden Wassers, so tritt während dt eine Wassermasse Mdt mit irgend einer absoluten Geschwindigkeit v_1 in das Laufrad ein und eine ebenso grosse Masse verlässt das Rad mit einer Geschwindigkeit v_2. Die Aenderung dB des auf dieselben Massen wie zu Anfang von dt bezogenen Dralls ist dann, da sich im Uebrigen nichts geändert hat, gleich dem Unterschiede zwischen den statischen Momenten der Bewegungsgrössen für die austretende und für die eintretende Wassermasse Mdt.

Am einfachsten ermittelt man diese Momente, indem man die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf die Richtungen der zugehörigen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufrads projicirt. Bezeichnet man diese Projektionen mit $v_1 \cos \alpha_1$ und $v_2 \cos \alpha_2$

(wobei also unter α_1 und α_2 die Winkel zwischen den Richtungen der v und der Bewegungsrichtung des Laufrads an der gleichen Stelle zu verstehen sind) und die Abstände von der Umdrehungsaxe mit r_1 und r_2, so hat man

$$dB = Mdt(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1).$$

Nach dem Flächensatze ist dann das ebenfalls auf die Umdrehungsaxe bezogene statische Moment K der äusseren Kräfte, die (etwa durch Vermittelung einer aufgekeilten Riemenscheibe) auf die Laufradwelle übertragen werden müssen, um diese in gleichförmigem Gange zu unterhalten,

$$K = \frac{dB}{dt} = M(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1). \qquad (84\text{a})$$

Aus K folgt die Arbeit A, die von der Turbine in der Zeiteinheit nach aussen hin abgegeben wird, durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit u, also

$$A = Mu(v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1). \qquad (84\text{b})$$

Durch einfache Umrechnungen, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, kann man die absoluten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auch in den Relativgeschwindigkeiten gegen das Laufrad in Verbindung mit den Umfangsgeschwindigkeiten ur_1 und ur_2 des Laufrads ausdrücken. Die in dieser Weise umgeformte Gleichung wird von Zeuner als die erste Hauptgleichung der Turbinentheorie bezeichnet. Eine zweite Hauptgleichung, die zur vorigen hinzutreten muss, um alle in der Aufgabe vorkommenden Grössen berechnen zu können, erhält man nach Zeuner, indem man für A noch einen zweiten Ausdruck auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft aufstellt und ihn dem vorigen gleichsetzt. Aus der so erhaltenen zweiten Hauptgleichung berechnet man die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser das Rad durchströmt und hierauf nach der ersten Hauptgleichung die Leistung A der Turbine, auf deren Ermittelung es namentlich ankommt.

Die weitere Durchführung der Rechnung würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen; es handelte sich hier nur

darum, zu zeigen, auf wie einfache Art man mit Hülfe des Flächensatzes zur ersten Hauptgleichung gelangen kann, die sonst auf viel umständlicherem Wege abgeleitet wird.

§ 16. Die freien Axen.

Ein starrer Körper möge anfänglich eine beliebige Bewegung besitzen und hierauf ohne Einwirkung äusserer Kräfte sich selbst überlassen werden. Wir schliessen nach Schwerpunkts- und Flächensatz von Neuem, dass sowohl die Bewegungsgrösse des ganzen Körpers als auch der Drall constant bleiben müssen. In jedem Augenblicke kann man sich die Bewegung in eine Translation zerlegt denken mit jener Geschwindigkeit, die dem Schwerpunkte zukommt und in eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Die Translation geht nach dem Schwerpunktssatze gleichförmig vor sich und interessirt uns kaum. Viel wichtiger ist jetzt für uns die Frage nach der Rotationsbewegung. Wir wollen daher von der Translation ganz absehen, also annehmen, dass der Schwerpunkt des starren Körpers schon von Anfang an ruhte; beim Fehlen aller äusseren Kräfte wird er dann auch dauernd in Ruhe bleiben, so dass wir es in der That nur noch mit den Rotationen zu thun haben. Im Uebrigen muss aber betont werden, dass auch im allgemeineren Falle das, was jetzt von den Rotationsbewegungen für sich ausgesagt werden soll, unverändert gültig bleibt, und dass dann nur noch die von den Rotationen unabhängige und hier gleichgültige constante Translationsbewegung hinzutritt.

Wir werden das wichtige Problem, die Bewegung eines sich selbst überlassenen starren Körpers anzugeben, nur schrittweise in Angriff nehmen. Hier beschränken wir uns auf die Beantwortung der Frage, ob die Rotationsaxe ihre Richtung im Raume und im Körper dauernd beibehält oder nicht.

Wer sich diese Frage zum ersten Male vorlegt, ohne vorher davon gehört zu haben, wird leicht geneigt sein, die Constanz der Rotationsaxe für alle Fälle von vornherein anzunehmen. Schon die oft nicht ganz stichhaltige Fassung des

Trägheitsgesetzes, wonach ein Körper seine augenblickliche Bewegung beim Fehlen äusserer Kräfte unverändert beibehalten müsse, verleitet oft zu dieser gleichwohl irrigen Annahme. Im Allgemeinen verändert sich vielmehr die Lage der Rotationsaxe mit der Zeit sowohl relativ zum Körper als zum absoluten Raume. Sie kann freilich auch constant bleiben und jede im Körper gezogene (und jedenfalls durch den Schwerpunkt gehende) Axe, um die sich der Körper ohne Zwang dauernd zu drehen vermag, heisst eine freie Axe (oder auch permanente Drehaxe).

Auf Grund des Trägheitsgesetzes vermag man nur zu schliessen, dass ein einzelner materieller Punkt die Bewegung, die er hatte, ohne Einwirkung äusserer Kräfte beibehält oder dass das Gleiche auch von der Schwerpunktsbewegung eines beliebigen Punkthaufens gilt. Die Rotationsbewegung wird aber von der Aussage des Trägheitsgesetzes nicht unmittelbar berührt und mittelbar nur insofern, als aus dem Trägheitsgesetze in der Dynamik des materiellen Punktes eine Reihe von Folgerungen gezogen wurde, die sich später auf die Dynamik des Punkthaufens übertragen liessen und die daher jetzt an Stelle des Trägheitsgesetzes zur Untersuchung der Rotationserscheinungen verwendet werden können.

Man wird aber nicht leicht die Forderung fallen lassen, dass sich irgend eine mit der Rotationsbewegung zusammenhängende Grösse beim Fehlen äusserer Kräfte als constant erweisen müsse, schon desshalb, weil man stets gewohnt ist, die Kräfte als Ursachen von Veränderungen anzusehen. In der That kann man zwei sehr wichtige Grössen angeben, die nur durch das Eingreifen äusserer Kräfte geändert werden können. Die erste ist die lebendige Kraft des starren Körpers, von der dies schon im ersten Bande dieses Werkes gezeigt wurde und die andere ist der Drall, der nach dem Flächensatze (vgl. § 13 unter b)) der Zeit nach constant und hier überdies noch für jeden Momentenpunkt gleich gross ist. Die zweite Bedingung sagt übrigens mehr aus, als die erste, denn die lebendige Kraft ist eine Grösse ohne Richtung und die

Bedingung, dass sie constant sei, wird daher durch eine einzige Beziehung zwischen Zahlengrössen ausgesprochen. Der Drall ist dagegen eine gerichtete Grösse und die Bedingung, dass er sich nicht ändere, schliesst neben der Constanz des Absolutwerthes auch die Constanz der Richtung ein. Die Vektorgleichung, die dies ausspricht, lässt sich in drei von einander unabhängige Componentengleichungen zerlegen, enthält also drei Zahlenbeziehungen. In der That ist daher auch das Moment der Bewegungsgrösse von noch grösserer Bedeutung für die Beurtheilung der Rotationserscheinungen, als selbst die lebendige Kraft.

Der allgemeine Ausdruck für den Drall war nach § 13

$$\mathfrak{B} = \Sigma \mathrm{V} m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}.$$

Hiermit ist aber nur eine allgemeine Anweisung dafür gegeben, wie man $\mathfrak{B}$ finden kann, wenn die Geschwindigkeiten und Lagen der einzelnen Massen m bekannt sind. Die wirkliche Ausrechnung ist erst noch vorzunehmen und zwar hier unter der Voraussetzung, dass der Punkthaufen ein starrer Körper ist.

Im gegebenen Augenblicke sei die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers gleich $\mathfrak{u}$. Hiermit ist die Richtung der durch den Schwerpunkt gehenden augenblicklichen Rotationsaxe, der Sinn der Drehung und zugleich der Absolutwerth u der Winkelgeschwindigkeit angegeben, d. h. man kennt mit $\mathfrak{u}$ überhaupt den augenblicklichen Bewegungszustand vollständig. Hiernach muss sich $\mathfrak{B}$ als Function von $\mathfrak{u}$ darstellen lassen. — Der nach einem Massentheilchen m vom Schwerpunkte S aus (Abb. 19) gezogene Radiusvektor sei mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet; dann ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von m

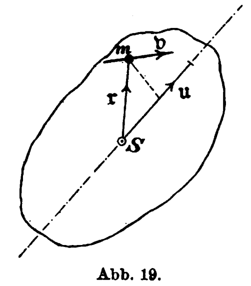


Abb. 19.

$$\mathfrak{v} = -\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$

(vgl. Bd. I, Gl. 56, wobei nur zu beachten ist, dass der dort

mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnete Vektor hier $\mathfrak{r}$ geschrieben ist). Setzt man diesen Werth ein, so wird

$$\mathfrak{B} = -\Sigma V(m V \mathfrak{u} \mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{r}$$

oder nach Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren im äusseren Produkte

$$\mathfrak{B} = \Sigma m V \mathfrak{r} \cdot V \mathfrak{u} \mathfrak{r}. \tag{85}$$

Man muss also zunächst das äussere Produkt aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ bilden, dann dieses selbst wieder als zweiten Faktor eines äussern Produkts ansehen, dessen erster Faktor $\mathfrak{r}$ ist, um hierauf nach Multiplikation mit m und Summirung über den ganzen Haufen $\mathfrak{B}$ zu erhalten. Die zweimal aufeinanderfolgende Vorschrift zur Bildung des äusseren Produkts ist in diesem Buche bisher nicht vorgekommen. Ganz allgemein gilt dafür eine sehr einfache Rechenvorschrift, die durch die Formel

$$V \mathfrak{A} \cdot V \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \mathfrak{B} \tag{86}$$

zum Ausdrucke gebracht werden kann, in der $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ beliebige Vektoren sind. Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus zwei Gliedern, von denen das erste den Vektor $\mathfrak{B}$ als Faktor enthält und daher mit ihm gleichgerichtet ist; denn der andere Faktor $\mathfrak{A} \mathfrak{C}$ ist ein inneres Produkt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ und daher eine Grösse ohne Richtung. Das zweite Glied ist ebenso mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichtet. Hieraus geht schon hervor, dass die rechte Seite als geometrische Summe eines mit $\mathfrak{B}$ und eines mit $-\mathfrak{C}$ gleichgerichteten Vektors eine Richtung besitzt, die in der durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gelegten Ebene enthalten ist. Dass dies so sein muss, folgt aber andererseits sofort daraus, dass $V \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ in die Richtung der Normalen der Ebene durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ fällt, so dass das äussere Produkt aus irgend einem anderen Vektor und $V \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ senkrecht zu jener Normalen stehen und daher wieder in die Ebene durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ fallen muss.

Wenn in dem elementaren mathematischen Unterrichte auf den Mittelschulen die Anfangsgründe des Rechnens mit gerichteten Grössen gelehrt würden, was an und für sich leicht durchführbar und sehr zu wünschen wäre, könnte ich

mich auf Gl. (86) als auf eine der bekanntesten Formeln der Vektoralgebra berufen. Da dies heutzutage leider noch nicht zutrifft, bleibt mir nichts übrig, als hier den Beweis jenes algebraischen Satzes selbst vorzuführen. Am einfachsten gestaltet sich dieser, wenn man sich dabei auf die Darstellung der Vektoren mit Hülfe rechtwinkliger Componenten in den Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ stützt (Bd. I, § 16 u. § 17). Nach Gl. 51, Bd. I, ist

$$V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathfrak{i}(B_2 C_3 - B_3 C_2) + \mathfrak{j}(B_3 C_1 - B_1 C_3) + \mathfrak{k}(B_1 C_2 - B_2 C_1)$$

und hiernach auch

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2 C_3 - B_3 C_2) & (B_3 C_1 - B_1 C_3) & (B_1 C_2 - B_2 C_1) \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die Determinante, so erhält man zunächst für die $\mathfrak{i}$-Componente

$$\mathfrak{i}(A_2 B_1 C_2 - A_2 B_2 C_1 - A_3 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_3)$$

oder wenn man $A_1 B_1 C_1$ einmal als positives und einmal als negatives Glied zufügt,

$$\mathfrak{i}\{B_1(A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)\},$$

d. h. wenn man sich der Bedeutung der in den runden Klammern stehenden Summen erinnert

$$\mathfrak{i}\{B_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_1 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}.$$

Genau ebenso findet man für die $\mathfrak{j}$-Componente

$$\mathfrak{j}\{B_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_2 \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$$

und ähnlich für die letzte Componente. Fasst man aber alle drei Componenten wieder zusammen, so erhält man nach Herausheben der gemeinsamen Faktoren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{i}B_1 + \mathfrak{j}B_2 + \mathfrak{k}B_3) - \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{i}C_1 + \mathfrak{j}C_2 + \mathfrak{k}C_3),$$

d. h. genau den in Gl. (86), die hiermit bewiesen ist, angegebenen Werth.

Nach dieser Abschweifung in das Gebiet der Algebra kehre ich zu dem Werthe von $\mathfrak{B}$ in Gl. (85) zurück. Die Anwendung des Satzes der Gl. (86) liefert

$$\mathfrak{B} = \Sigma m(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r})$$

oder nach Spaltung des Ausdrucks in zwei Glieder

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u} \cdot \Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}. \qquad (87)$$

Das erste der beiden Glieder, aus denen $\mathfrak{B}$ besteht, ist gleichgerichtet mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, denn es enthält nicht nur $\mathfrak{u}$ als Faktor, sondern der andere richtungslose Faktor $\Sigma m\mathfrak{r}^2$ ist auch unter allen Umständen positiv. Von dem anderen Gliede lässt sich aber ohne nähere Kenntniss der Gestalt des Körpers nicht voraussehen, welche Richtung es annehmen wird. Im Allgemeinen ist daher $\mathfrak{B}$ nicht mit $\mathfrak{u}$ gleichgerichtet; dies trifft vielmehr nur unter der Bedingung zu, dass auch

$$\Sigma m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}$$

ist oder auch ganz verschwindet.

Wir werden sofort sehen, von welcher Wichtigkeit die Entscheidung ist, ob $\mathfrak{B}$ parallel zu $\mathfrak{u}$ geht oder nicht. Man betrachte Abb. 20, in der $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ verschieden gerichtet eingetragen sind, und zwar so, wie sie bei der angegebenen Körpergestalt ungefähr wirklich zu einander liegen würden.

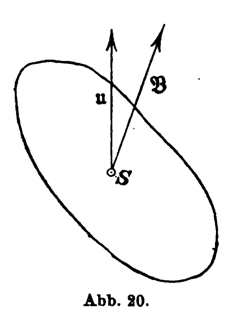


Abb. 20.

Wenn man den Körper mit Hülfe von Zapfen in einem Gestelle lagerte, könnte man ihn natürlich leicht zwingen, die Bewegung um die anfängliche Drehaxe mit constanter Winkelgeschwindigkeit dauernd beizubehalten. Hätte sich dann der Körper in eine zweite Lage gedreht, so müsste sich $\mathfrak{B}$ mit ihm gedreht haben. Die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ nach den einzelnen Massentheilchen haben sich nämlich alle um den gleichen Winkel gedreht, während $\mathfrak{u}$ constant blieb. Nach der Zusammensetzung des

Ausdruckes von $\mathfrak{B}$ in Gl. (87) folgt daher, dass wir den Werth von $\mathfrak{B}$ in der neuen Lage sofort dadurch erhalten, dass wir mit dem in der ersten Lage berechneten Werthe ebenfalls eine Drehung um denselben Winkel vornehmen. Mit anderen Worten: $\mathfrak{B}$ ist, solange $\mathfrak{u}$ constant bleibt, relativ zum Körper constant; dagegen dreht es sich mit dem Körper zusammen im festen Raume herum, beschreibt also eine Kegelfläche, deren Axe $\mathfrak{u}$ ist.

Nach dem Flächensatze, Gl. (82a), ist aber

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r} \tag{88}$$

und hiernach müssen äussere Kräfte $\mathfrak{P}$ einwirken, um irgend eine Aenderung von $\mathfrak{B}$, wenn diese auch nur in der Richtung und nicht in dem absoluten Werthe besteht, hervorzubringen. Wir erkennen daraus, dass $\mathfrak{u}$ in Abb. 20 unmöglich eine freie Axe sein kann; vielmehr muss ein in einem Kräftepaare bestehender Zwang auf die Axe von den festen Lagern übertragen werden, um die Umdrehung um diese Axe dauernd aufrecht zu erhalten. Das Moment des hierzu erforderlichen resultirenden Kräftepaares der Zapfendrücke $\Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r}$ kann nach Gl. (88) bei gegebenem $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ sofort leicht berechnet werden. Man erkennt daraus auch, dass die Ebene des den äusseren Zwang darstellenden Kräftepaares selbst mit dem Körper herumrotirt und dass dies daher auch von den in den Lagern übertragenen Zapfendrücken gilt. Dadurch wird das aus der Erfahrung wohlbekannte Rütteln in den Lagern hervorgebracht, das bei der Rotation eines Körpers um eine aufgezwungene Axe entsteht.

Als Bedingung für eine freie Axe erkennen wir hiernach, dass $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{u}$ gleich gerichtet sein muss, oder dass, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u} \tag{89}$$

oder auch gleich Null ist.

Dass es überhaupt in jedem Körper freie Axen giebt und welche, braucht im Augenblicke noch nicht entschieden zu

werden. Einstweilen genügt die Aufstellung der Bedingung (89) und allenfalls noch die weitere Bemerkung, dass die Symmetrieaxe eines Rotationskörpers auf alle Fälle eine freie Axe ist.

§ 17. Der Drall in Bezug auf die Drehaxe selbst.

Auch der in Gl. (87) gegebene Werth für den Drall $\mathfrak{B}$ erfordert im einzelnen Falle noch die wirkliche Ausführung der durch die Summenzeichen vorgeschriebenen Summirungen. Ohne eine nähere Angabe über die Gestalt und Massenvertheilung des Körpers und über die Richtung der Schwerpunktsaxe, auf die er sich beziehen soll, lässt sich der Ausdruck nicht weiter vereinfachen. Dagegen kann man die Projektion des Momentes $\mathfrak{B}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$ durch einen erheblich einfacheren Ausdruck darstellen. Diese Projektion ist nach den dafür früher (im ersten Bande) gegebenen Begriffserklärungen das statische Moment der Bewegungsgrösse für die Drehaxe $\mathfrak{u}$. Bezeichnen wir einen in der Richtung von $\mathfrak{u}$ gezogenen Einheitsvektor mit $\mathfrak{u}_1$, so ist die Projektion von $\mathfrak{B}$, die mit B' bezeichnet werden soll,

$$B' = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{u}_1,$$

also nach Einsetzen des aus Gl. (87) bekannten Werthes von $\mathfrak{B}$

$$B' = \mathfrak{u}\mathfrak{u}_1 \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m \mathfrak{u}_1 \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{u}\mathfrak{u}_1$ die Projektion von $\mathfrak{u}$ auf die eigene Richtung, also der Absolutwerth u der Winkelgeschwindigkeit. Ebenso kann man an Stelle von $\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ auch $u \cdot \mathfrak{u}_1 \mathrm{r}$ schreiben und die vorige Gleichung geht damit über in

$$B' = u\{\Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2\}.$$

Beide Summen können wieder zu einer einzigen vereinigt werden, wodurch man

$$B' = u \Sigma m (\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2)$$

erhält. Der Ausdruck in der Klammer hat aber eine einfache Bedeutung: $\mathfrak{r}$ ist nämlich die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das beim Projiciren von $\mathfrak{r}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$ entsteht und $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r}$ ist eine Kathete in diesem Dreiecke, nämlich

die Projektion selbst. Nach dem Pythagoräischen Satze hat man daher

$$\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2 = y^2,$$

wenn jetzt mit y die Länge des Projektionsstrahls oder mit anderen Worten der senkrechte Abstand des Massentheilchens m von der Drehaxe bezeichnet wird. Hiermit wird

$$B' = u \Sigma m y^2.$$

Der jetzt noch vorkommende Summenausdruck ist uns aber von früheren Betrachtungen her bereits wohlbekannt: er giebt das Trägheitsmoment Θ des starren Körpers für die Drehaxe an. Für den Drall B' hat man daher einfach

$$B' = u\Theta. \tag{90}$$

Es wäre übrigens zur Ableitung dieses Werthes von B' gar nicht nöthig gewesen, von dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{B}$ auszugehen. Dazu hätte es schon genügt, den rotirenden Körper auf eine zur Drehaxe senkrechte Ebene zu projiciren und die Momente in dieser Ebene für jenen Punkt zu bilden, in dem sich die Drehaxe projicirt. Die Geschwindigkeiten und daher auch die Bewegungsgrössen sind alle parallel zur Projektionsebene und sie projiciren sich daher in ihrer wahren Grösse. Ausserdem sind sie auch überall senkrecht zu den Hebelarmen gerichtet, die vom Momentenpunkt aus nach den Projektionen der zugehörigen Massen gezogen werden können. Die Geschwindigkeit ist uy, der Hebelarm y, der Beitrag von m daher muy^2 und nach Ausführung der Summirung gelangt man hiernach sofort wieder auf den Werth in Gl. (90).

Für den Fall, dass die Drehaxe eine freie Axe ist, giebt Gl. (90) auch unmittelbar die Grösse von $\mathfrak{B}$ selbst an, während die Richtung schon durch die von $\mathfrak{u}$ mit gegeben ist. Schon aus diesem Grunde ist der hier gefundene einfache Werth von grosser Bedeutung für die Anwendungen; aber auch sonst ist es oft nützlich, wenn man sofort wenigstens für die Projektion von $\mathfrak{B}$ einen einfachen Ausdruck zur Hand hat.

Schliesslich soll noch untersucht werden, welche Aenderung

das Trägheitsmoment Θ erfährt, wenn man sich die Drehaxe ein wenig aus ihrer ursprünglichen Richtung $\mathfrak{u}_1$ herausgedreht denkt. Der in der neuen, benachbarten Richtung gezogene Einheitsvektor sei $\mathfrak{u}_1'$ und

$$\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{u}_1 + \delta\mathfrak{u}_1.$$

Mit $\delta\mathfrak{u}_1$ soll also das geometrische Differential von $\mathfrak{u}_1$ bezeichnet werden, wobei zu beachten ist, dass wegen der gleichen absoluten Längen von $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_1'$ das dazwischen liegende $\delta\mathfrak{u}_1$ als ein unendlich kleiner Kreisbogen betrachtet werden kann, der zum Radius senkrecht steht.

Aus der vorausgehenden Untersuchung ergab sich

$$\Theta = \Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m(\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2.$$

Das erste Glied ist unabhängig von der Richtung $\mathfrak{u}_1$; sein Beitrag zu $\delta\Theta$ daher gleich Null. Das zweite Glied enthält $\mathfrak{u}_1$ und die Aenderung, die die Summe erfährt, ist gleich der Summe der Aenderungen der einzelnen Glieder. Da nun

$$\delta(\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2 = 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}\cdot\delta(\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}) = 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}\delta\mathfrak{u}_1$$

ist, so folgt für die Aenderung von Θ

$$\delta\Theta = -2\Sigma m\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}\delta\mathfrak{u}_1 = -2\delta\mathfrak{u}_1\cdot\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}.$$

Die hier noch stehende Summe ist uns schon aus der im vorigen Paragraphen für die freie Axe aufgestellten Bedingung (89) bekannt. Dort stand zwar $\mathfrak{u}$ an Stelle von $\mathfrak{u}_1$. Der Unterschied besteht aber nur darin, dass $\mathfrak{u} = u\mathfrak{u}_1$, dass also ausser dem Richtungsfaktor auch der absolute Werth von u als Faktor auftritt. Dieser Faktor ist aber bei der Summirung constant und kann vor das Summenzeichen gesetzt werden; er ändert auch jedenfalls nichts an der Richtung der geometrischen Summe, die mit ihm multiplicirt wird. Die Bedingung (89) kann daher ebensowohl in der Form

$$\Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}_1\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}_1$$

ausgesprochen werden. Nehmen wir nun an, diese Bedingung sei erfüllt, d. h. $\mathfrak{u}_1$ falle in die Richtung einer freien Axe, so muss der vorher für $\delta\Theta$ aufgestellte Werth zu Null werden. Denn $\delta\Theta$ ist als ein inneres Produkt aus $\delta\mathfrak{u}_1$ und einem in

die Richtung von $\mathfrak{u}_1$ fallenden Vektor dargestellt. Da aber $\delta \mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_1$, wie vorher nachgewiesen, senkrecht zu einander stehen, so ist ihr inneres Produkt gleich Null. Umgekehrt muss, wenn $\delta \Theta = 0$ sein soll, jedenfalls der zu $\delta \mathfrak{u}_1$ hinzutretende Faktor entweder verschwinden oder senkrecht zu $\delta \mathfrak{u}_1$ sein. Dies hat jetzt freilich nicht unmittelbar zur Folge, dass dieser Faktor in die Richtung von $\mathfrak{u}_1$ fällt, da unendlich viele Senkrechten zu $\delta \mathfrak{u}_1$ möglich sind. Wenn aber die Bedingung $\delta \Theta = 0$ nicht nur für irgend eine Richtungsänderung $\delta \mathfrak{u}_1$, sondern für jedes mögliche $\delta \mathfrak{u}_1$ erfüllt sein soll, dann muss der Summenfaktor auf allen diesen Richtungen, d. h. auf der durch den Punkt $\mathfrak{u}_1$ gehenden Einheitskugelfläche senkrecht stehen oder er muss mit anderen Worten in die Richtung von $\mathfrak{u}_1$ fallen. Dann ist auch die Bedingung (89) erfüllt, d. h. $\mathfrak{u}_1$ giebt die Richtung einer freien Axe an.

Zugleich ist ferner die für jede mögliche unendlich kleine Richtungsänderung bestehende Gleichung $\delta \Theta = 0$ die Bedingung dafür, dass das Trägheitsmoment für das betreffende $\mathfrak{u}_1$ einen grössten oder kleinsten Werth hat. Hiernach können wir die Bedingung (89) jetzt in der brauchbareren und anschaulicheren Form aussprechen:

Jene Schwerpunktsaxen eines starren Körpers, für die das Trägheitsmoment einen grössten oder einen kleinsten Werth annimmt, sind freie Axen des Körpers. Umgekehrt ist für jede freie Axe die Aenderung $\delta \Theta$, die das Trägheitsmoment Θ bei einer unendlich kleinen Richtungsänderung der Axe erfährt, gleich Null.

Daraus folgt unter anderem auch, dass in jedem beliebig gestalteten starren Körper freie Axen vorkommen müssen. Hierauf werde ich in der Folge noch näher zurückkommen. Einstweilen möchte ich nur noch darauf aufmerksam machen, dass ein Körper auch unendlich viele freie Axen haben kann. Bei einer homogenen Kugel ist z. B. jede Schwerpunktsaxe zugleich eine freie Axe, denn für jede Schwerpunktsaxe hat Θ denselben Werth und $\delta \Theta$ ist daher überall für alle $\delta \mathfrak{u}_1$ gleich Null. Solche Fälle kommen aber nur ausnahmsweise vor.

§ 18. **Wirkung eines Kräftepaares auf einen freien starren Körper.**

Ein starrer Körper sei frei, d. h. allen übrigen äusseren Kräften entzogen und vorher in Ruhe. Dann soll irgend ein Kräftepaar auf ihn einwirken; es fragt sich, welche Bewegung der Körper annimmt.

Wir wissen schon, dass sich der Schwerpunkt nicht verschieben kann; die Bewegung muss also in einer Drehung um eine Schwerpunktsaxe bestehen. Es fragt sich zunächst, um welche Axe er beginnen wird, sich zu bewegen, und welche Winkelbeschleunigung ihm von dem Kräftepaare um diese Axe ertheilt werden wird.

Hinsichtlich des Kräftepaares muss zunächst daran erinnert werden, dass alle Kräftepaare am starren Körper, die in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, äquivalent sind, wenn sie dasselbe statische Moment haben (Band II, § 22). Um das Kräftepaar für unsere Zwecke eindeutig zu beschreiben, genügt es daher, den Momentenvektor $\mathfrak{K}$ des Kräftepaares nach Grösse und Richtung anzugeben. Da dieser ein völlig freier Vektor ist, d. h. auch parallel zu sich selbst willkürlich verschoben werden darf, ist es gleichgültig, von welchem Punkte aus wir ihn uns gezogen denken wollen. Am einfachsten ist es, wenn wir ihn uns vom Schwerpunkt aus abgetragen denken.

Auch hier muss wieder vor voreilig gefassten Meinungen gewarnt werden. Es könnte nämlich bei flüchtiger Betrachtung scheinen, dass die Drehung $\mathfrak{u}$, die von $\mathfrak{K}$ hervorgebracht wird, mit $\mathfrak{K}$ gleich gerichtet sein müsse. Zu dieser Meinung kann namentlich der Vergleich des Kräftepaares mit einer Einzelkraft leicht verleiten. Wir haben schon im ersten Bande gesehen, dass sich beide in der That in vieler Hinsicht gleichen. Die Einzelkraft bringt am materiellen Punkte eine Verschiebung in ihrer Richtung hervor. Das Kräftepaar bringt eine Drehung um eine Schwerpunktsaxe hervor. Aber hier besteht nun der erhebliche Unterschied, dass die Richtung der Drehaxe im Allgemeinen keineswegs mit der Richtung von $\mathfrak{K}$ zusammen-

fällt. Unter besonderen Umständen trifft dies freilich zu und wir wollen hier vor allen Dingen untersuchen, unter welchen Umständen.

Mit Hülfe des Flächensatzes wird sich dies leicht entscheiden lassen. Beachten wir, dass an Stelle von $\Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r}$ jetzt kürzer $\mathfrak{K}$ geschrieben werden kann, so wird der Flächensatz (vgl. Gl. (88)) hier durch die einfache Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{91}$$

ausgesprochen. Hat das Kräftepaar $\mathfrak{K}$ einige Zeit hindurch auf den Körper eingewirkt, so folgt hieraus auch durch Integration

$$\mathfrak{B} = \int \mathfrak{K}\, dt. \tag{92}$$

Wenn $\mathfrak{K}$ während der ganzen Zeit constant war, ist hiernach $\mathfrak{B}$ gleich gerichtet mit $\mathfrak{K}$, und zwar gilt dies für jede beliebige Gestalt des Körpers und für jede beliebige Richtung von $\mathfrak{K}$. Im Allgemeinen fällt aber, wie wir aus § 16 wissen, die Richtung von $\mathfrak{u}$ keineswegs mit der Richtung von $\mathfrak{B}$ zusammen und daher ist auch $\mathfrak{u}$ anders gerichtet als $\mathfrak{K}$. Nur dann, wenn zufällig $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{u}$, ist auch $\mathfrak{K} \parallel \mathfrak{u}$. Diese Bedingung ist aber nur für die freien Axen erfüllt und wir erkennen damit, dass die Axe der Drehung, die durch ein Kräftepaar hervorgerufen wird, nur dann senkrecht auf der Ebene des Kräftepaares steht, wenn diese Senkrechte eine freie Axe des Körpers ist.

In diesem Falle lässt sich auch Gl. (91) in weiter ausgerechneter Form darstellen. Auf die Richtungen, die mit einander zusammenfallen, brauchen wir dann, da sie selbstverständlich sind, nicht mehr ausdrücklich zu achten und für die Grösse von $\mathfrak{B}$ können wir den in Gl. (90) ausgerechneten Werth von B' einsetzen. Wir haben dann

$$\frac{d(u\Theta)}{dt} = K$$

oder, da Θ der Zeit nach constant ist,

$$\Theta \frac{du}{dt} = K. \tag{93}$$

Wir sind damit eigentlich nur zu einem einfachen Resultate zurückgelangt, das schon im ersten Bande (S. 200, Gl. (81) der 2. Aufl.) gefunden wurde. Die frühere Ableitung bezog sich zwar auf einen zwangläufig drehbaren Körper und sie gilt für diesen allgemein. Aber auch der freie Körper, den wir hier untersuchen, kann bei seiner Drehung um eine freie Axe als drehbar gelagert angesehen werden, da gar keine Kräfte von dem Gestelle auf ihn übertragen werden, um die Beibehaltung der freien Drehaxe zu erzwingen.

Schliesslich möge noch ein Gebrauch von Gl. (92) erwähnt werden, der zur Erzielung einer einfacheren Ausdrucksweise zuweilen gemacht wird. Gl. (92) hat nämlich die Form des Satzes vom Antriebe. An Stelle des Impulses einer Einzelkraft steht bei ihr das ebenso gebildete Zeitintegral des Kräftepaares, das daher auch als der *Impuls des Kräftepaares* bezeichnet werden kann. Ebenso tritt an die Stelle der Bewegungsgrösse hier das statische Moment der Bewegungsgrösse. Man kann daher Gl. (92) in Worten auch dahin aussprechen, *dass der Impuls des Kräftepaares gleich dem von ihm erzeugten Dralle ist.* Dabei könnte $\mathfrak{K}$ sehr gross und die Zeit, während der es einwirkte, sehr klein sein, so dass wir es mit einem „*Drehstosse*" zu thun hätten. Wenn ferner die Drehbewegung des Körpers in einem bestimmten Augenblicke ganz willkürlich gegeben ist, so kann man sich stets das zugehörige $\mathfrak{B}$ ermittelt und hiermit nach Gl. (92) auch das ihm gleiche $\int \mathfrak{K} dt$ berechnet denken. Man kann daher die augenblickliche Bewegung auch dadurch beschreiben, dass man sagt, sie sei ebenso, als wenn sie aus der Ruhe durch den Impuls eines Drehstosses hervorgegangen wäre. Sobald dieser Impuls $\int \mathfrak{K} dt$ angegeben wird, ist auch die augenblickliche Bewegung dadurch gekennzeichnet. Manche Schriftsteller ziehen diese Art der Darstellung vor und gebrauchen dann, wie schon früher einmal erwähnt wurde, die Bezeichnung „*Impulsvektor*", als gleichbedeutend mit „Moment der Bewegungsgrösse" oder „Drall". Natürlich ist dies im Grunde genommen

gegenüber der von mir gewählten Ausdrucksweise nur ein Unterschied im Wortlaute, der das Wesen der Sache ganz unberührt lässt.

Ich sagte vorher, dass mit $\mathfrak{B}$ auch die Bewegung, d. h. $\mathfrak{u}$ bekannt wäre. Bisher ist freilich erst eine Gl. (87) gegeben, die umgekehrt $\mathfrak{B}$ zu berechnen gestattet, wenn $\mathfrak{u}$ bekannt ist. Diese Gleichung müsste erst nach $\mathfrak{u}$ aufgelöst werden, um wirklich $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{B}$ unmittelbar berechnen zu können. Die Auflösung von Gleichungen, in denen Vektoren auftreten, ist aber nicht so einfach, als die Auflösung der in der gewöhnlichen Algebra vorkommenden Gleichungen. Dass aber in der That $\mathfrak{u}$ gefunden werden kann, wenn $\mathfrak{B}$ gegeben ist, wird aus den weiteren Betrachtungen bald hervorgehen.

§ 19. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne äussere Kräfte.

Wir machen nach allen diesen Vorbereitungen jetzt den letzten und wichtigsten Schritt zur Untersuchung der Bewegungen, die ein vollständig sich selbst überlassener Körper mit gegebener Anfangsbewegung weiterhin ausführt. Hierin besteht wenigstens das Hauptziel, das wir uns in diesem Paragraphen stecken, wenn auch die Ueberschrift etwas anderes anzukündigen scheint. Um diese zu erklären, erinnere ich zunächst daran, dass wir bei dieser Untersuchung von einer etwaigen Translationsbewegung ganz absehen, uns den Schwerpunkt also von Anfang an und daher, beim Fehler äusserer Kräfte, auch dauernd in Ruhe denken wollten. Damit ist der Schwerpunkt schon von selbst ein „fester Punkt“ des Körpers. Es kann auch nichts ausmachen, wenn wir uns diesen ohnehin schon am Orte bleibenden Punkt überdies noch mit einem festen Gestelle verbunden denken, falls nur dem Körper dabei durch Anordnung eines Kugelgelenks die Möglichkeit erhalten bleibt, sich nach allen Richtungen hin ohne Widerstand zu drehen.

Dies allein würde allerdings noch nicht genügen, um die Einführung einer neuen Bezeichnung zu rechtfertigen, die aus-

drücklich darauf hinweist, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Es kommt aber hinzu, dass es für die wirkliche Ausführung der Untersuchung fast ganz gleichgültig ist, ob der Körper im Schwerpunkte oder in irgend einem andern Punkte festgehalten ist, um den er sich frei zu drehen vermag. Auch dieser Fall ist für viele Anwendungen der Mechanik von grossem Interesse und er muss daher ebenfalls behandelt werden. Da nun der Fall des frei beweglichen Körpers in ihm schon als Sonderfall mit enthalten ist, so thut man, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, am besten, sogleich den allgemeineren Fall in Angriff zu nehmen. Es bleibt aber Jedem, der sich für diesen etwa nicht interessirt, unbenommen, sich unter dem festen Punkte, von dem weiterhin die Rede ist, überall den Schwerpunkt vorzustellen und hiernach von einer Lagerung im Gestelle ganz abzusehen.

Im allgemeineren Falle wird natürlich ein Zwang von dem Gestelle auf den bewegten Körper übertragen werden müssen, durch den der feste Punkt auch wirklich an seinem Orte festgehalten wird. Von Reibungen u. dgl. soll abgesehen werden und der Zwang kann daher nur in einer Auflagerkraft bestehen, die sich im festen Punkte überträgt. Diese Kraft ist die einzige äussere Kraft, die am bewegten Körper angreift. Sie kann keine Arbeit leisten, da ihr Angriffspunkt in Ruhe bleibt und wir schliessen daraus zunächst, dass die lebendige Kraft des Körpers constant sein muss. Ausserdem ist auch das statische Moment des Auflagerdrucks stets gleich Null, wenn wir den festen Punkt zum Momentenpunkte wählen. Hiernach folgt aus dem Flächensatze, dass auch der Drall $\mathfrak{B}$ — diesmal freilich nur für diese besondere Wahl des Momentenpunktes — nach Grösse und Richtung unverändert bleiben muss.

Wir betrachten nun das Strahlenbündel, das aus allen Graden besteht, die man vom festen Punkte aus nach allen möglichen Richtungen ziehen kann. Wir wollen uns dieses Strahlenbündel im Körper selbst festgelegt und mit ihm bewegt denken. Die Rotationsaxe wird zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Strahlen dieses Bündels zusammenfallen.

Da wir einstweilen nicht wissen, mit welchen, so wollen wir zunächst alle Strahlen als mögliche spätere Lagen der Rotationsaxe in Aussicht nehmen. Dann lässt sich zunächst eine Aussage darüber machen, mit welcher Winkelgeschwindigkeit u sich der Körper bewegen muss, wenn grade irgend ein vorgegebener Strahl als Rotationsaxe dienen soll. Die lebendige Kraft L ist nämlich

$$L = \frac{1}{2} u^2 \Theta$$

und da L einen vom Anfangszustande abhängigen constanten Werth behält, folgt hieraus u aus dem zum betreffenden Strahle gehörigen Θ. Wir müssen hierzu freilich im Stande sein, den Werth des Trägheitsmoments Θ für alle Strahlen anzugeben. Im dritten Bande ist diese Frage für die Trägheitsmomente von Querschnittsflächen in Bezug auf alle Axen, die in der Ebene des Querschnitts liegen, gelöst worden. Damit kommen wir aber hier nicht aus und wir müssen daher jene früheren Betrachtungen entsprechend ergänzen.

Zu diesem Zwecke schreibe ich L noch in der Form

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m (\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2$$

an, was zulässig ist, da das Element der Summe unmittelbar die lebendige Kraft jedes einzelnen Massentheilchens angiebt. Von hier aus gehe ich zur Coordinatendarstellung über, indem ich

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \mathfrak{i}(u_2 z - u_3 y) + \mathfrak{j}(u_3 x - u_1 z) + \mathfrak{k}(u_1 y - u_2 x)$$

und daher

$$(\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = (u_2 z - u_3 y)^2 + (u_3 x - u_1 z)^2 + (u_1 y - u_2 x)^2$$

setze. Man quadrire aus, setze den Werth in L ein und spalte L in ebensoviele Summen, als man beim Ausquadriren Glieder erhalten hatte. Dadurch erhält man für L

$$L = \frac{1}{2} u_2^2 \Sigma m z^2 - u_2 u_3 \Sigma m y z + \frac{1}{2} u_3^2 \Sigma m y^2 + \cdots, \qquad (94)$$

wobei ich mich damit begnügte, nur die drei ersten Glieder anzuschreiben. Die jetzt noch vorkommenden Summen, die sich (nebenbei bemerkt) so wie bei der früheren ähnlichen

Untersuchung auf Trägheits- und Centrifugalmomente in Bezug auf die Coordinatenaxen zurückführen lassen, sind jedenfalls constante Grössen, d. h. sie sind unabhängig von der besonderen Wahl des Strahls, die für die Drehaxe $\mathfrak{u}$ getroffen worden ist.

Denkt man sich nun auf jedem Strahle die Winkelgeschwindigkeit u abgetragen, mit der der Körper um diesen Strahl als Axe rotiren muss, damit die lebendige Kraft den constanten Werth L annimmt, so erhält man eine Fläche, die alle diese Punkte verbindet. Die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind die Componenten von $\mathfrak{u}$, also $u_1\ u_2\ u_3$. Zwischen diesen Coordinaten besteht Gl. (94), in der alle übrigen Grössen constant sind. Hiernach ist Gl. (94) selbst die Gleichung der Fläche. Die Gleichung ist vom zweiten Grade und das Gleiche gilt daher auch von der ihr entsprechenden Fläche. Da sich ferner zu jedem Strahle des Strahlenbündels ein bestimmter endlicher Werth von u angeben lässt, so folgt, dass die Fläche den Schwerpunkt von allen Seiten her umschliesst und dass sie sich nicht ins Unendliche erstrecken kann. Hiermit ist die Fläche nach den Lehren der analytischen Geometrie als ein Ellipsoid gekennzeichnet.

Führt man an Stelle des Trägheitsmoments Θ den Trägheitsradius t ein, indem man $\Theta = Mt^2$ setzt, so kann L auch in der Form

$$L = \frac{1}{2} u^2 t^2 M$$

geschrieben werden und daraus folgt, dass für alle Strahlen das Produkt ut einen constanten Werth hat. Die Strecken u, die auf den Strahlen abgetragen wurden, und die wir inzwischen als Halbmesser eines Ellipsoids erkannt haben, sind demnach den zu diesen Strahlen gehörigen Trägheitshalbmessern umgekehrt proportional. Da man hiernach aus der Gestalt des Ellipsoids sofort auch einen Schluss auf die Trägheitsmomente ziehen kann, wird das Ellipsoid als das Trägheitsellipsoid bezeichnet. Diese Bezeichnung steht mit der von uns früher im dritten Bande eingeführten Bezeichnung „Trägheitsellipse“ in Uebereinstimmung.

Der Mittelpunkt des Ellipsoids fällt übrigens mit dem Schwerpunkte des Körpers (oder allgemeiner mit dem festen Punkte) zusammen, denn wenn man $\mathfrak{u}$ mit $-\mathfrak{u}$ vertauscht, so behält L seinen Werth und Gl. (94) bleibt immer noch erfüllt.

Ferner können wir jetzt auch schon einige Betrachtungen der vorausgehenden Paragraphen ergänzen. In § 17 war gezeigt worden, dass für die freien Axen die Bedingung $\delta\Theta = 0$ erfüllt sein muss. Diese trifft aber, wie wir jetzt erkennen, bei den drei Hauptaxen des Centralellipsoids und im Allgemeinen nur bei diesen zu. Hiernach hat jeder starre Körper mindestens drei aufeinander senkrecht stehende freie Axen. Mehr als drei und dann unendlich viele hat er nur, wenn das Trägheitsellipsoid in ein Umdrehungsellipsoid übergeht. Wird das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel, so ist jede Schwerpunktsaxe eine freie Axe.

Auch die Untersuchung in § 18 kann jetzt weiter ausgeführt werden. Es handelte sich dort darum, die Bewegung anzugeben, die durch ein Kräftepaar $\mathfrak{K}$ hervorgebracht wird und diese Frage war bisher nur für den Fall beantwortet worden, dass $\mathfrak{K}$ in die Richtung der freien Axe fällt. Um sie für den allgemeineren Fall zu lösen, denke man sich $\mathfrak{K}$ in drei Componenten $K_1\, K_2\, K_3$ längs der drei Hauptaxen des (für den Schwerpunkt construirten) Centralellipsoids zerlegt. Für die erste Componente folgt dann, da sie mit einer freien Axe zusammenfällt, nach Gl. (93)

$$\Theta_1 \frac{du_1}{dt} = K_1$$

und entsprechend für die übrigen. Die wirkliche Winkelbeschleunigung erhalten wir dann nach dem Satze über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen durch geometrische Summirung der drei Componenten. Wenn wir also jetzt unter $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren verstehen, die in den Richtungen der drei Hauptaxen gezogen sind, finden wir

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{K_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{K_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{K_3}{\Theta_3}, \tag{95}$$

oder auch durch Integration nach der Zeit

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{\int K_1\,dt}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{\int K_2\,dt}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{\int K_3\,dt}{\Theta_3}. \tag{96}$$

Berücksichtigen wir ferner noch Gl. (92), so lässt sich dafür auch schreiben

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3} \tag{97}$$

und diese Gleichung gestattet, zu jedem gegebenen $\mathfrak{B}$ das zugehörige $\mathfrak{u}$ zu berechnen, d. h. sie bildet die am Schlusse von § 18 noch vermisste Auflösung der Gl. (87) nach $\mathfrak{u}$. Freilich setzt ihre Benutzung voraus, dass die Axenrichtungen des Centralellipsoids und die ihnen zugehörigen Hauptträgheitsmomente $\Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_3$ bereits ermittelt sind.

Auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen lässt sich übrigens noch ein Ausdruck für die lebendige Kraft eines um eine Schwerpunktsaxe rotirenden starren Körpers angeben, der in manchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann. Versteht man nämlich unter $u_1\ u_2\ u_3$ wiederum die Projektionen der Winkelgeschwindigkeit auf die Hauptträgheitsaxen, so besteht zwischen ihnen, indem man sie als Coordinaten eines Punktes auf dem Trägheitsellipsoid auffasst, die Gleichung

$$1 = \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} + \frac{u_3^2}{c^2}.$$

Hierbei sind, wie man schon aus dem Zusammenhange erkennt, die Halbaxen des Ellipsoids vorübergehend mit $a\ b\ c$ bezeichnet. Multiplicirt man die Gleichung mit L und beachtet, dass auch

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta_1 a^2 = \frac{1}{2}\,\Theta_2 b^2 = \frac{1}{2}\,\Theta_3 c^2$$

ist, so folgt, wenn diese Werthe auf der rechten Seite der Gleichung eingesetzt werden, für die lebendige Kraft L auch

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_2 u_2^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_3 u_3^2. \tag{97a}$$

Bisher benutzte ich nur die Bedingung, dass die lebendige Kraft des um den festen Punkt (oder um den Schwerpunkt) rotirenden Körpers constant bleiben muss. Jetzt wende ich

mich zu den Folgerungen, die aus dem Flächensatze, also aus der Constanz von $\mathfrak{B}$, gezogen werden können.

Bildet man das innere Produkt aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$, so erhält man

$$\mathfrak{B}\mathfrak{u} = B'u = u^2\Theta = 2L,$$

wobei wieder, wie schon in § 17, mit B' die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf die Richtung der augenblicklichen Drehaxe bezeichnet ist. Zugleich ist der damals in Gl. (90) für B' berechnete Werth eingesetzt und schliesslich für $u^2\Theta$ der doppelte Werth der lebendigen Kraft L eingeführt worden. Da L constant ist, hat demnach auch das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ einen constanten Werth. Die Faktoren B' und u sind freilich mit der Zeit veränderlich. Wir können aber das innere Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{u}$ auch dadurch in zwei richtungslose Faktoren zerlegen, dass wir umgekehrt $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{B}$ projiciren und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{u} = Bu' = 2L$$

setzen, woraus

$$u' = \frac{2L}{B} \tag{98}$$

folgt. Da nun L und B constant sind, folgt, dass auch die Projektion u' von $\mathfrak{u}$ auf die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$ constant bleiben muss.

Diese Bemerkung gestattet uns jetzt schon, einen besseren Ueberblick über die fernere Bewegung des Körpers bei gegebenem Anfangszustande zu gewinnen. Man denke sich in der Anfangslage des Körpers das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt oder bei einem freien Körper das Centralellipsoid (Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt) construirt. Dann trage man die Richtung der Anfangswinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ ein und ermittle die zugehörige Richtung von $\mathfrak{B}$, was man sich vorläufig etwa nach Gl. (87) ausgeführt denken kann. Der Endpunkt von $\mathfrak{u}_0$ liegt auf dem Ellipsoid. Man ziehe durch ihn eine Ebene α senkrecht zu $\mathfrak{B}$; diese Ebene ist nach der schon in § 13 eingeführten Bezeichnung eine unveränderliche Ebene unseres Problems. Sie schneidet auf der Richtungslinie von $\mathfrak{B}$ eine vom festen Punkte aus gerechnete Strecke ab, die in dem für das Auftragen der Winkelgeschwindigkeiten

gewählten Maassstabe die Projektion u_0' angiebt. Da aber u' constant ist, bildet diese Strecke zugleich auch in jedem ferneren Augenblicke das Maass für die Projektion der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ auf die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$.

Wenn sich der Körper weiterhin bewegt, dreht sich mit ihm auch das Trägheitsellipsoid, das wir uns fest mit ihm verbunden denken müssen, in andere Lagen. Unveränderlich bleibt nur die Richtung und Grösse von $\mathfrak{B}$, die Ebene α und die Projektion u'. Wie nun aber auch später Richtung und Grösse von $\mathfrak{u}$ sich geändert haben mögen, jedenfalls ist $\mathfrak{u}$ irgend ein Halbmesser des Ellipsoids und der unveränderliche Werth von u' ist die Projektion dieses Halbmessers auf die Richtung von $\mathfrak{B}$. Daraus folgt, dass auf jeden Fall der Endpunkt des Halbmessers $\mathfrak{u}$ in der Ebene α bleiben muss. In Abb. 21 ist dies angedeutet. Das Ellipsoid ist in irgend einer seiner Stellungen gezeichnet, O ist der feste Punkt, α die zur festen Richtung von $\mathfrak{B}$ senkrecht gezogene Ebene, die auf $\mathfrak{B}$ die Strecke u' abschneidet und $\mathfrak{u}$ ist die durch die augenblickliche Stellung des Ellipsoids und durch $\mathfrak{B}$ schon mit bestimmte augenblickliche Winkelgeschwindigkeit. Dann muss der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ in der Ebene α enthalten sein. Die Umrisse des Körpers sind ganz gleichgültig und daher in der Zeichnung weggelassen; für die Beurtheilung der Bewegung, die der Körper weiterhin ausführt, genügt schon vollständig die Kenntniss des Trägheitsellipsoids. Körper mit identischem Trägheitsellipsoid bewegen sich auf gleiche Art.

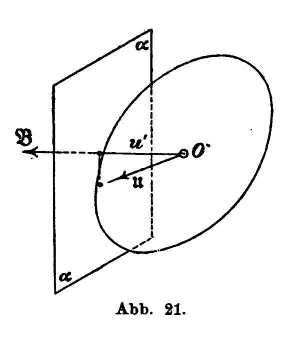


Abb. 21.

Zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ besteht aber noch eine wichtige Beziehung, die freilich in den früher zwischen beiden Grössen aufgestellten Gleichungen schon mit enthalten ist, die aber nun noch ihre geometrische Deutung finden muss. Die Richtung von $\mathfrak{B}$ steht nämlich senkrecht auf einer durch den Endpunkt von $\mathfrak{u}$ gelegten Tangentialebene oder mit anderen Worten:

die bereits gezogene Ebene α berührt das Ellipsoid im Endpunkte von $\mathfrak{u}$. Ehe ich dies beweise, bemerke ich noch, dass hiermit ein sehr bequemer Weg zur Construction der Richtung von $\mathfrak{B}$ bei bekanntem $\mathfrak{u}$ oder umgekehrt gegeben ist, der die unmittelbare Berechnung nach den Gl. (87) oder (97) meist entbehrlich macht. In Anknüpfung an bekannte Untersuchungen der analytischen Geometrie kann man auch sagen, dass $\mathfrak{B}$ stets senkrecht zu jener Durchmesserebene steht, die dem Durchmesser $\mathfrak{u}$ conjugirt ist.

Der Beweis für die aufgestellte Behauptung gestaltet sich sehr einfach. Man denke sich vom Endpunkte von $\mathfrak{u}$ in beliebiger Richtung auf dem Ellipsoide einen unendlich kleinen Bogen gezogen, der unter Beachtung der Richtung mit $\delta\mathfrak{u}$ bezeichnet sei. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich damit, dass die geometrische Summe $\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{u}$ ebenfalls wieder ein Halbmesser des Ellipsoids ist und dass früher alle Halbmesser unter der gemeinsamen Bezeichnung $\mathfrak{u}$ zusammengefasst wurden. Man muss nur im Auge behalten, dass dieses $\delta\mathfrak{u}$ eine beliebige auf der Oberfläche des Ellipsoids enthaltene kleine Strecke ist und nicht mit der Aenderung $d\mathfrak{u}$ verwechselt werden darf, die $\mathfrak{u}$ in Wirklichkeit im Zeitelemente dt erfährt. Vielmehr hat $\delta\mathfrak{u}$ mit dem Bewegungsvorgange gar nichts zu thun; wir wollen mit seiner Hülfe nur die rein geometrischen Eigenschaften des im Ruhezustande gedachten Ellipsoids ermitteln.

Es wird sich jetzt nur darum handeln, zu beweisen, dass alle $\delta\mathfrak{u}$, die man ziehen möge, und die alle in der Tangentialebene an das Ellipsoid enthalten sind, senkrecht zu $\mathfrak{B}$ stehen, denn dann steht auch die Tangentialebene selbst senkrecht zu $\mathfrak{B}$. Wenn zwei Strecken senkrecht zu einander stehen sollen, muss aber ihr inneres Produkt verschwinden. Ich bilde also das innere Produkt $\mathfrak{B}\delta\mathfrak{u}$; dabei setze ich den Werth von $\mathfrak{B}$ aus Gl. (87) ein und erhalte

$$\mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = \delta\mathfrak{u}\,\{\,\mathfrak{u}\cdot\Sigma m\mathfrak{r}^2 - \Sigma m\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r}\,\}.$$

Die rechte Seite bildet aber ein vollständiges Differential. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2}\,\delta\,\{\mathfrak{u}^2 \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})^2\} = \delta\,\mathfrak{u}\,\{\mathfrak{u} \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}\,\mathfrak{r}\},$$

wobei nur zu beachten ist, dass $\Sigma m \mathfrak{r}^2$ unabhängig von dem speciell gewählten Halbmesser $\mathfrak{u}$ des Trägheitsellipsoids ist; ebenso auch der nach irgend einem Massentheilchen m gezogene Radiusvektor $\mathfrak{r}$.

Nun war

$$\Theta = \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r})^2$$

(vgl. § 17), daher auch

$$\frac{1}{2}\,\{\mathfrak{u}^2 \cdot \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})^2\} = \frac{1}{2}\,u^2 \Theta = L.$$

Wir gelangen damit zu dem einfachen Resultate

$$\mathfrak{B}\,\delta\,\mathfrak{u} = \delta L.$$

Das Ellipsoid war aber grade auf Grund der Bedingung construirt, dass man für jeden Halbmesser $\mathfrak{u}$, der zu ihm gehört, denselben Werth der lebendigen Kraft L erhält. Wenn also die Strecke $\delta\mathfrak{u}$ auf dem Ellipsoide enthalten sein soll, so kann dadurch, dass wir den Endpunkt von $\mathfrak{u}$ um $\delta\mathfrak{u}$ verschieben, keine Aenderung δL bewirkt werden. Man kann geradezu die Gleichung

$$\delta L = 0$$

als die aus der endlichen Gleichung $L =$ Const. hervorgegangene Differentialgleichung des Ellipsoids bezeichnen.

Demnach ist für alle $\delta\mathfrak{u}$, die hier in Frage kommen können,

$$\mathfrak{B}\,\delta\,\mathfrak{u} = 0$$

und hieraus folgt, dass $\mathfrak{B}$ senkrecht auf allen diesen $\delta\mathfrak{u}$, also auch senkrecht zur Tangentialebene an das Ellipsoid im Endpunkte von $\mathfrak{u}$ steht. Alle vorher hierüber aufgestellten Behauptungen sind damit bewiesen.

Kehren wir nun zur Betrachtung von Abb. 21 zurück. Wir hatten schon vorher erkannt, dass in jeder Lage des Körpers und mit ihm des Ellipsoids der die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit darstellende Halbmesser $\mathfrak{u}$ mit seinem Endpunkte in der unveränderlichen Ebene α liegen muss. Jetzt wissen wir auch, dass das Ellipsoid in diesem Endpunkte von

der Ebene α berührt wird. Demnach können nur solche Halbmesser des Ellipsoids im Laufe der Bewegung die Winkelgeschwindigkeit u angeben, deren Endpunkte durch Drehungen des Ellipsoids zu Berührungspunkten der Ebene α werden können.

Man denke sich das ganze Ellipsoid durch ein Bündel von Tangentialebenen eingehüllt. Unter allen diesen Tangentialebenen suche man jene auf, deren Abstand vom festen Punkte gleich u' ist. Die zugehörigen Berührungspunkte werden einen oder auch zwei getrennte, in sich geschlossene Curvenzüge bilden. Alle Punkte dieser Curven können durch geeignete Drehung des Ellipsoids in die Ebene α übergeführt werden, so dass sie die Berührungspunkte zwischen α und dem Ellipsoide bilden.

Hiermit ist nun auch entschieden, welche durch O gehenden Strahlen nach und nach als Drehaxen dienen werden: es sind die Verbindungslinien von O nach den Punkten der vorher construirten Curve. Poinsot, von dem die hier auseinandergesetzte geometrische Lösung des Problems herrührt, hat die Curve als die Polodie (oder den Polweg) bezeichnet. Er hat ferner noch eine zweite Curve zur Beschreibung des ganzen Vorgangs benützt. Auch in der Ebene α wird nämlich der Berührungspunkt mit dem Ellipsoid, der in jedem Augenblicke als der Pol der Bewegung bezeichnet werden kann, nach und nach andere Lagen einnehmen. Ber Berührungspunkt beschreibt dabei eine Curve, die als die Herpolodie bezeichnet wird. Die Bewegung des Ellipsoids kann nun als ein Rollen der Polodie auf der Herpolodie aufgefasst werden.

Diese einfache geometrische Beschreibung der im Uebrigen so schwierig zu behandelnden Bewegung genügt meist, um sich ohne Rechnung einen schnellen Ueberblick über die Erscheinungen zu verschaffen, die man zu erwarten hat. Damit ist aber grade dem Techniker am meisten gedient. Von der Gestalt des Trägheitsellipsoids des Körpers wird er sich im gegebenen Falle meist sehr schnell eine ziemlich genau zutreffende Vorstellung machen können, ohne vorher viel rechnen zu

müssen. Wie die Polodie aussieht, lässt sich dann auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaften ebenfalls schnell genug erkennen. Die Herpolodie ist nicht so leicht anzugeben; aber man braucht sie auch kaum, um sich eine deutliche Vorstellung von dem Rollen des Ellipsoids auf der unveränderlichen Ebene zu machen. — Der Hauptmangel der vorausgehenden Betrachtungen besteht nur noch darin, dass die Zeit, die während der Bewegung des Körpers aus der Anfangslage in irgend eine andere verstreicht, daraus nicht unmittelbar entnommen werden kann. — Darauf werde ich in § 21 zurückkommen.

§ 20. Die stabilen Drehaxen.

Wir können sofort eine wichtige Anwendung der vorhergehenden Lehren machen. Früher fanden wir nämlich, dass jeder Körper mindestens drei freie Axen hat, die mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen. Sie sind aber, wie sich jetzt zeigen wird, nicht alle „stabile" Drehaxen.

Der Begriff der „Stabilität" ist aus der Lehre vom Gleichgewichte entnommen. Er ist dort ein ganz eindeutig bestimmter Begriff; wenn er aber auf Bewegungen übertragen werden soll, bedarf er in jedem einzelnen Falle einer neuen Definition. Was man unter Stabilität einer Bewegung verstehen soll, ist nämlich in vielen Fällen einstweilen noch ganz streitig, so dass verschiedene Autoren zuweilen ganz verschiedene Begriffe mit demselben Worte verbinden. Ich werde daher zunächst erklären, was man unter der Stabilität einer Drehaxe versteht, ohne mich aber darauf einzulassen, eine Definition für die Stabilität einer Bewegung überhaupt geben zu wollen.

Man denke sich, dass ein Körper nicht genau, sondern nur nahezu um eine freie Axe rotire. Würde er genau um die freie Axe rotiren, so könnte sich die Drehaxe niemals ändern und der Körper würde nach jeder Umdrehung immer wieder in die Anfangslage zurückkehren. Völlig genau lässt sich dieser Zustand aber niemals erreichen und es fragt sich, welche Folgen eine geringe Abweichung davon nach sich zieht. Wenn

der Körper sich dauernd nahezu so verhält, als rotirte er um die stets in nächster Nachbarschaft bleibende freie Axe, so heisst diese freie Axe eine stabile Drehaxe. Bringt dagegen eine noch so geringe anfängliche Abweichung von der freien Axe eine mit der Zeit immer weiter fortschreitende Ablenkung der Bewegung von der zur freien Axe gehörigen hervor, so nennt man die Rotation um eine solche freie Axe eine labile Bewegung, weil schon der geringste Anstoss genügt, um die Art der Bewegung allmählich vollständig zu ändern.

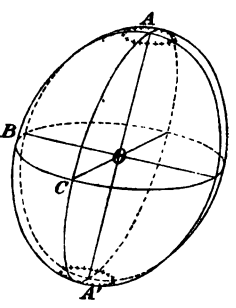


Abb. 22.

Von den drei freien Axen, die im Allgemeinen bei einem Körper vorkommen, sind blos zwei, nämlich jene, die zum allergrössten und zum allerkleinsten Trägheitsmomente gehören, stabile Drehaxen; die Bewegung um die dritte freie Axe ist labil.

Man erkennt dies ohne jede Schwierigkeit an der Hand einer Figur. In Abb. 22 sei OA die grösste Halbaxe des Trägheitsellipsoids, also zugleich die Axe des kleinsten Trägheitsmoments. Weicht die Drehaxe im Anfangszustande nur wenig von der Richtung OA ab, so erlangt die Polodie die durch die kreuzpunktirte Linie angedeutete Gestalt. Nur in nächster Nachbarschaft von A lassen sich nämlich Punkte ausfindig machen, deren Tangentialebenen einen senkrechten Abstand von O haben, der nur wenig kleiner ist, als OA selbst. Die Polodie umgiebt demnach als geschlossene Curve den Punkt A. Diametral gegenüber, um A' lässt sich zwar ebenfalls eine Curve angeben, die der gleichen Bedingung genügt. Da sie mit der ersten nicht zusammenhängt, ist aber kein stetiger Uebergang aus der einen in die andere möglich. Hiernach durchläuft der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ in der That stets die sehr kleine Curve um A und die auf der unveränderlichen Ebene beschriebene Herpolodie kann sich ebenfalls nur auf eine kleine Fläche erstrecken, so dass auch gegenüber dem festen Raume keine erheblichen Richtungsänderungen von OA zu erwarten sind.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Figur und die Betrachtung für den Fall, dass die anfängliche Drehaxe nahezu mit dem kleinsten Halbmesser des Ellipsoids OC (oder mit der Axe des grössten Trägheitsmoments) zusammenfiel (Abb. 23). Auch hier kann die Polodie nur in einer den Punkt C eng umschliessenden Curve bestehen und zwar desshalb, weil nur an dieser Stelle des Ellipsoids Tangentialebenen möglich sind, die so nahe an den Mittelpunkt des Ellipsoids heranrücken. Die Axe OC ist demnach nicht nur eine freie, sondern zugleich auch eine stabile Drehaxe.

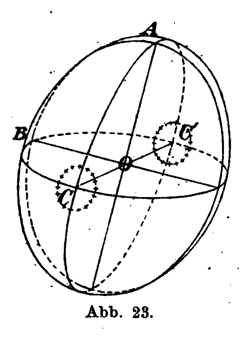


Abb. 23.

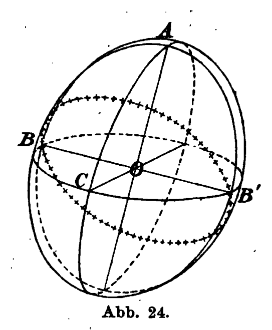


Abb. 24.

Anders ist es aber mit der dritten freien Axe OB. Wie man aus Abb. 24 sofort erkennt, ist keine Polodie möglich, die den Punkt B in kleinem Abstande umkreist, sondern die Polodie umfasst das ganze Ellipsoid. Auch auf dem Meridiane AC giebt es Punkte, deren Tangentialebenen denselben Abstand vom Mittelpunkte O haben, als die in der Nachbarschaft von B gezogenen und ebenso auf allen übrigen durch A gelegten Meridianen. Die freie Axe OB ist hiernach eine labile Drehaxe.

§ 21. Die Euler'schen Gleichungen.

Die in § 19 nach Poinsot vorgetragene Theorie der Bewegung des starren Körpers um einen festen Punkt giebt nur über die Lagen Aufschluss, die der Körper der Reihe nach einnimmt. Wie viel Zeit während dessen verstreicht, ist daraus nicht zu entnehmen. Um auch dies zu erreichen, muss man

die rein geometrische Darstellung verlassen und sich wieder mehr der analytischen zuwenden. Der zeitliche Verlauf ergiebt sich nämlich aus der Integration der Differentialgleichungen des Problems, die schon von Euler aufgestellt wurden und die ich jetzt ableiten will.

Die Absicht bei Aufstellung der Euler'schen Gleichungen kommt darauf hinaus, die Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ als Function der Zeit t darzustellen. Am besten rechnet man hierbei, wie ich von vornherein bemerken möchte, mit den rechtwinkligen Componenten $u_1 u_2 u_3$ von $\mathbf{u}$. Auf diese beziehen sich die Euler-Gleichungen.

Bei der Untersuchung der Veränderlichkeit von $\mathbf{u}$ kann man übrigens zwei ganz verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man nämlich die Lagen angiebt, die $\mathbf{u}$ der Reihe nach gegen den starren Körper oder gegen den festen Raum durchläuft. Alle $\mathbf{u}$ im ersten Falle bilden den Polodie-, alle $\mathbf{u}$ im zweiten Falle den Herpolodiekegel. Wir müssen uns also für eine bestimmte Aufstellung des Beobachters, der die Veränderlichkeit von $\mathbf{u}$ nach Richtung und Grösse constatirt, entscheiden oder wir müssen mit anderen Worten das Coordinatensystem, auf das sich die Projektionen $u_1 u_2 u_3$ beziehen, entweder im festen Raume ruhen lassen oder es an dem bewegten Körper festheften. Euler hat sich für den letzten Fall entschieden. Stellt man sich etwa vor, unsere Erde sei der Einwirkung aller anderen Weltkörper entzogen und drehe sich nicht genau um eine freie Axe, so wird man sich in erster Linie dafür interessiren, welche Linien der Erde im Laufe der Zeit als Drehaxen dienen, d. h. wie sich etwa der Nordpol der Erde im Laufe der Zeit auf der Erde selbst verschiebt. Wir beziehen dann die Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ auf ein mit der Erde fest verbundenes Coordinatensystem, folgen also der Euler-schen Darstellung.

Bei diesem Probleme erfolgt die Zerlegung der gerichteten Grösse $\mathbf{u}$ in drei rechtwinklige Componenten übrigens nicht blos willkürlich oder aus Verlegenheit, weil man etwa keine bessere Methode zur Behandlung gerichteter Grössen kennt,

sondern sie ist im Wesen der Sache selbst begründet. In jedem Körper haben wir nämlich drei aufeinander senkrecht stehende ausgezeichnete Richtungen, die Richtungen der Hauptträgheitsaxen, für die sich die Rotationserscheinungen besonders einfach gestalten. Durch eine Zerlegung nach diesen Richtungen vereinfacht sich daher auch in anderen Fällen die Untersuchung der Rotationen und wir sind so von vornherein auf die Benutzung eines nach diesen drei Hauptrichtungen orientirten Coordinatensystems hingewiesen.

Davon ist auch schon bei der Ableitung von Gl. (97)

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3}$$

Gebrauch gemacht worden, denn auf der rechten Seite ist ja in der That $\mathfrak{u}$ als geometrische Summe seiner drei Coordinaten

$$u_1 = \frac{B_1}{\Theta_1}, \quad u_2 = \frac{B_2}{\Theta_2}; \quad u_3 = \frac{B_3}{\Theta_3} \tag{99}$$

dargestellt. Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ waren in den Richtungen der Hauptträgheitsaxen gezogen und Θ_1 gehörte zur Axe $\mathfrak{i}$ u. s. f.

Die Euler'schen Gleichungen entstehen aus der Gleichung für $\mathfrak{u}$, wenn man diese nach der Zeit differentiirt. Um dies ausführen zu können, muss man zunächst feststellen, wie sich der Drall $\mathfrak{B}$ relativ zum starren Körper mit der Zeit ändert. Absolut ist, wie wir wissen, $\mathfrak{B}$ nach dem Flächensatze constant. Relativ zum bewegten Körper muss $\mathfrak{B}$ daher veränderlich sein, zwar nicht der absoluten Grösse, aber der Richtung nach.

Zur gegebenen Zeit ist die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers $\mathfrak{u}$. Für einen Beobachter, der sich auf dem starren Körper befindet, dreht sich der ganze äussere Raum um den starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$. Auch die Bewegung des im äusseren Raume feststehenden Vektors $\mathfrak{B}$ relativ zum starren Körper besteht in einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{u}$. Der Endpunkt von $\mathfrak{B}$ beschreibt hierbei seinen Weg mit einer Geschwindigkeit, die nach Grösse und Richtung durch

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B}$$

dargestellt wird (Bd. I, Gl. (56). Der Weg im Zeitelemente dt ist daher

$$dt\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B}$$

und das ist jene Strecke, die zum ursprünglichen $\mathfrak{B}$ geometrisch summirt werden muss, um das nach Ablauf von dt entstehende neue $\mathfrak{B}$ zu erhalten (immer relativ zum starren Körper genommen). Hiernach wird

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B}$$

oder, wenn man in Componenten zerlegt,

$$\frac{dB_1}{dt} = u_2 B_3 - u_3 B_2; \quad \frac{dB_2}{dt} = u_3 B_1 - u_1 B_3;$$
$$\frac{dB_3}{dt} = u_1 B_2 - u_2 B_1.$$

Die Differentiation der Gleichung für $\mathfrak{u}$ nach der Zeit ergiebt mit Benutzung dieser Werthe

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}\,\frac{u_2 B_3 - u_3 B_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{u_3 B_1 - u_1 B_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{\Theta_3}$$

oder, nachdem man noch die Componenten von $\mathfrak{B}$ mit Hülfe der Gleichungen (99) in den Componenten von $\mathfrak{u}$ ausgedrückt hat,

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{i}u_2 u_3\,\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}u_3 u_1\,\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}u_1 u_2\,\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3}. \tag{100}$$

Anstatt die Componenten mit Hülfe der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ aneinander zu reihen, kann man sie natürlich auch einzeln anschreiben. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3\,\frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1\,\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2\,\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

und das sind die Euler'schen Gleichungen in der ihnen gewöhnlich gegebenen Form. Sie sind gewöhnliche simultane Differentialgleichungen für die drei von der Zeit abhängigen Functionen $u_1 u_2 u_3$. Die Integration ist freilich im allgemeinen

Falle insofern nicht ganz einfach, als sie auf elliptische Functionen führt. Im Uebrigen macht sie aber keine Schwierigkeiten.

Hier beschränke ich mich auf die Durchführung der Rechnung für den einfachen Fall, dass das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist (was z. B. bei der Anwendung auf die „Nutation" der Erdaxe angenommen werden kann). Es sei also

$$\Theta_2 = \Theta_3$$

und zur Abkürzung möge ferner

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} = \gamma$$

gesetzt werden. Dann gehen die Euler'schen Gleichungen über in

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{dt} = \gamma u_1 u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = -\gamma u_1 u_2. \tag{102}$$

Die erste Gleichung lehrt, dass u_1 constant ist. Multiplicirt man die zweite Gleichung mit u_2 und die dritte mit u_3 und addirt, so folgt

$$u_2 \frac{du_2}{dt} + u_3 \frac{du_3}{dt} = 0,$$

also durch Integration

$$u_2^2 + u_3^2 = C,$$

worin C eine durch die Anfangsbedingungen bestimmte Constante ist. Da auch u_1^2 constant ist, so folgt dies auch für $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, d. h. der absolute Werth der Winkelgeschwindigkeit ist constant und ebenso ihre Projektion auf die $\mathfrak{i}$-Axe. Der Vektor $\mathfrak{u}$ beschreibt demnach einen Kreiskegel um die $\mathfrak{i}$-Axe. Bis dahin sind wir nur zu einem Resultate gelangt, das uns aus der Poinsot'schen Lehre von der Polodie bereits bekannt war. — Durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (102) nach t erhält man

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = \gamma u_1 \frac{du_3}{dt}$$

und wenn man den Differentialquotienten von u_3 aus der dritten Gleichung einführt, wird daraus

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_2. \tag{103}$$

Ebenso wird, wenn man bei diesem Eliminationsverfahren die dritte der Gleichungen (102) mit der zweiten vertauscht

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} = -(\gamma u_1)^2 u_3. \tag{104}$$

Diese Differentialgleichungen sind uns ihrer Form nach bereits aus der Lehre von den harmonischen Schwingungen bekannt. Ihre allgemeine Lösung ist

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t \tag{105}$$

und diese Lösung gilt bei passender Wahl der unbestimmten Integrationsconstanten ebenso auch für u_3. Die Umlaufszeit T der Momentanaxe um die Axe der Figur ergiebt sich aus der Bedingung, dass der Winkel $\gamma u_1 t$ während dessen um 2π angewachsen sein muss; also

$$T = \frac{2\pi}{\gamma u_1}$$

oder nach Einsetzen des Werthes von γ

$$T = \frac{2\pi \Theta_2}{u_1 (\Theta_1 - \Theta_2)}. \tag{106}$$

Die Umlaufszeit der Nutationsbewegung wird demnach um so grösser, je weniger sich die Hauptträgheitsmomente von einander unterscheiden. Sie hängt ausserdem von der Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die Figurenaxe, im Uebrigen aber nicht von dem Winkel ab, den $\mathfrak{u}$ mit der Figurenaxe bildet.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man ganz ähnlich auch verfahren kann, um die auf den festen Raum bezogene Aenderung der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ mit der Zeit zu untersuchen. Die Gleichung

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k} \frac{B_3}{\Theta_3}$$

muss dann nach der Zeit t unter Berücksichtigung des Umstandes differentiirt werden, dass jetzt $\mathfrak{B}$ constant, die Richtungen der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ dagegen veränderlich sind. So ist z. B.

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = -\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{i}$$

und

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{i}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = -\mathfrak{B}\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{i}.$$

Die Differentiation von $\mathfrak{u}$ lässt sich hiernach ohne Schwierigkeit ausführen. Mehr Schwierigkeiten macht freilich die weitere Behandlung der Differentialgleichungen; darauf werde ich aber hier nicht eingehen.

§ 22. Anwendung auf ein einfaches Beispiel.

Ein Ring, dessen Reif erheblich mehr Masse hat, als die radial geführten Arme, die den Reif mit einer in der Mitte gelegenen Nabe verbinden, soll im Schwerpunkte auf einer Spitze gelagert sein. Zu Anfang möge die Ringebene horizontal liegen und der Ring möge eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ um irgend eine Axe besitzen, die aber nicht mit der Figurenaxe zusammenfallen soll. Im andern Fall rotirte er nämlich um eine freie Axe und würde um diese immer weiter rotiren, ein Fall, der für uns kein weiteres Interesse hat.

Um die fernere Bewegung des Ringes angeben zu können, construiren wir zunächst ein Trägheitsellipsoid des Ringes, bei dem wir nur auf die Masse des Reifs zu achten brauchen, die wir uns überdies in der kreisförmigen Mittellinie vereinigt denken können. Wenn der Radius dieser Mittellinie mit r und die Masse des Reifs mit M bezeichnet werden, ist das Trägheitsmoment Θ_1 für die Figurenaxe

$$\Theta_1 = Mr^2$$

und die anderen Hauptträgheitsmomente sind

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{Mr^2}{2}$$

(vgl. Bd. III, Gl. (63)). Auf welche zur Figurenaxe senkrechten Axen man Θ_2 und Θ_3 beziehen will, ist übrigens bei einem Rotationskörper gleichgültig, da jede derartige Axe eine Hauptträgheitsaxe ist.

Die Trägheitsradien verhalten sich hiernach wie $\sqrt{2}:1$ und die Hauptaxen des Trägheitsellipsoids wie $1:\sqrt{2}$. Hiernach kann das Centralellipsoid in einem willkürlichen Maassstabe aufgetragen werden. In Abb. 25 ist dies geschehen. Der Schnitt durch den Reif ist durch zwei kleine schraffirte Kreise angedeutet; die Figurenaxe ist OA.

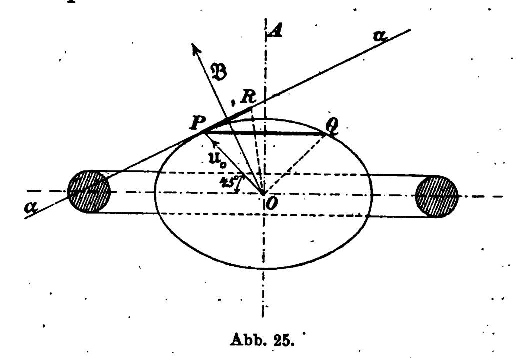


Abb. 25.

Wir tragen ferner die Richtung der Anfangswinkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ ein; dabei wollen wir uns die Projektionsebene von vornherein so gewählt denken, dass sie durch die Richtung von $\mathfrak{u}_0$ geht. Im Schnittpunkte von $\mathfrak{u}_0$ mit der Ellipse, deren Axen sich wie $1:\sqrt{2}$ verhalten, construiren wir eine Tangente. Diese ist die Spur der auf der Projektionsebene senkrecht stehenden unveränderlichen Ebene α. Rechtwinklig dazu steht die in der Projektionsebene enthaltene Richtungslinie des Dralls $\mathfrak{B}$.

Von der Voraussetzung, die wir seither stets machten, dass äussere Kräfte auf den starren Körper, abgesehen vom Auflagerdrucke am festen Punkte, nicht einwirken sollten, sind wir übrigens im vorliegenden Falle bis zu einem gewissen Grade frei. Wir können uns nämlich, da der Unterstützungspunkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, zugleich die Schwerkraft am Körper wirkend denken. Das Gewicht wird hier einfach vom Auflagerpunkte aufgenommen, hat aber keinen Einfluss auf die Bewegung. Es leistet nämlich weder Arbeit, noch hat es ein von Null verschiedenes statisches Moment für den festen Punkt; daher muss ganz wie früher sowohl die lebendige Kraft als der Drall $\mathfrak{B}$ constant sein und hierauf beruhten ja in der That alle Folgerungen der vorausgehenden Untersuchungen.

Die Polodie wird hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Figurenaxe liegt und dessen Ebene auf ihr senkrecht steht. Er hat die Projektion PQ in Abb. 25. Auch die Herpolodie wird ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte von $\mathfrak{B}$ mit der unveränderlichen Ebene α zusammenfällt und der sich in Abb. 25 als Strecke PR projicirt. Die fernere Bewegung des Rings wird nun in sehr einfacher Weise durch das Rollen des Kreiskegels OPQ um den ihn von innen berührenden festen Kreiskegel OPR beschrieben.

Um auch die Umlaufszeit T für ein bestimmtes Zahlenbeispiel berechnen zu können, nehme ich an, dass $\mathfrak{u}_0$ einen Winkel von 45^0 mit der Figurenaxe bildete und gleich 20 Touren pro Secunde war. Die Projektion u_1 auf die Figurenaxe wird hieraus durch Division mit $\sqrt{2}$ gefunden. Ausserdem rechnen wir 20 Touren pro Secunde auf Bogenmaass um und erhalten

$$u_1 = \frac{40\pi}{\sqrt{2}} \sec^{-1}.$$

Ferner haben wir hier

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1 - \Theta_2} = 1$$

und, wenn wir diese Werthe in Gl. (106) einsetzen, erhalten wir

$$T = 0{,}0707 \text{ sec.}$$

Nach Ablauf dieser Zeit hat die Momentanaxe wieder dieselbe Lage gegen den Ring. Sie hat aber nicht dieselbe Lage im Raume. Wenn die Durchmesser PQ und PR der Polodie und der Herpolodie nicht commensurabel mit einander sind, kann der Anfangszustand sowohl der Lage des Rings als dem Geschwindigkeitszustande nach überhaupt niemals wieder erreicht werden. Die Zeit, die vergeht, bis $\mathfrak{u}$ den Herpolodiekegel einmal im festen Raume durchlaufen hat, verhält sich übrigens (da beide Kegel aufeinander rollen) zu T wie PR zu PQ.

Man kann noch nach der Bewegung fragen, die die Figurenaxe OA ausführt. Um diese zu finden, denke man sich durch den Punkt O eine Einheitskugel gelegt. Diese Kugel schneidet die beiden aufeinander rollenden Kegel nach Kreisen und OA im sphärischen Mittelpunkte des einen Kreises. Dieser Punkt

beschreibt demnach ebenfalls einen Kreis um die unveränderliche Richtung von $\mathfrak{B}$. In jedem Augenblicke liegen die Momentanaxe $\mathfrak{u}$, das unveränderliche Moment $\mathfrak{B}$ und die Figurenaxe in einer Ebene und der Winkel zwischen $\mathfrak{B}$ und der Figurenaxe ist constant. Hiernach macht die Figurenaxe in der gleichen Zeit einen Umlauf, in der auch der Herpolodiekegel einmal von $\mathfrak{u}$ durchlaufen wird. In Abb. 26, die dies näher erläutern soll, deutet der Kreis P den Schnitt der Einheitskugel mit dem Polodiekegel, H den Schnitt mit dem Herpolodiekegel an, ferner ist $\mathfrak{B}$ die Spur von $\mathfrak{B}$ auf der Einheitkugel, A die Spur der Figurenaxe und der durch A gelegte punktirte Kreis giebt die Bahn an, die A auf der Einheitskugel durchläuft.

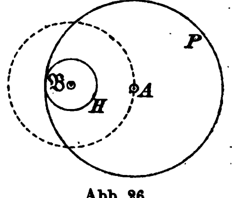


Abb. 26.

§ 23. Bewegung um einen festen Punkt unter der Einwirkung äusserer Kräfte.

Die vorausgehenden Betrachtungen haben sich schon verwickelt genug gestaltet. Die Schwierigkeiten steigern sich aber noch erheblich, wenn man zugleich die Wirkung beliebig gegebener äusserer Kräfte auf den um den festen Punkt drehbaren Körper in Rechnung ziehen muss. Mit Rücksicht auf den Zweck dieser Vorlesungen muss ich daher auf die ausführlichere Behandlung dieses Problems verzichten. Von vornherein werde ich mich vielmehr nur auf die Behandlung der einfachsten Fälle beschränken. Für ein weiteres Studium des Gegenstandes kann ich das schon früher einmal erwähnte Buch von Klein und Sommerfeld über die Theorie des Kreisels bestens empfehlen; bisher sind von diesem, das Kreiselproblem nach allen Seiten hin beleuchtenden Werke die zwei ersten Theile erschienen und der dritte Theil, der den Schluss bilden soll, ist bald zu erwarten.

Zunächst werde ich voraussetzen, dass der Körper ein Rotationskörper ist und dass der feste Punkt auf dessen Axe liegt. Diese Voraussetzung trifft gewöhnlich bei den Anwen-

dungen zu. Ich werde sie aber hier zum Zwecke der Vereinfachung noch weiter specialisiren, nämlich annehmen, dass das für den festen Punkt construirte Trägheitsellipsoid eine Kugel bildet. In diesem Falle ist jede Axe des Körpers eine freie Axe und die Richtung des Momentes $\mathfrak{B}$ fällt jederzeit mit der Richtung der Momentanaxe $\mathfrak{u}$ zusammen. — Dass es überhaupt Körper giebt, die diese Bedingung erfüllen, ist leicht einzusehen. Man denke etwa an einen homogenen graden Kegel. Wenn die Basis ziemlich gross ist gegen die Höhe, ist das Trägheitsmoment für die Figurenaxe grösser als das für eine senkrecht dazu durch den Schwerpunkt gezogene Axe. Wählt man dann den festen Punkt in einiger Entfernung vom Schwerpunkte, so behält das Trägheitsmoment für die Figurenaxe seine Grösse, die Trägheitsmomente für die senkrecht dazu gezogenen Axen sind dagegen grösser geworden. Bei passender Wahl des festen Punktes auf der Figurenaxe kann man es dann stets dahin bringen, dass die Hauptträgheitsmomente gleich werden. Der feste Punkt, für den dies gilt, kann auch mit der Kegelspitze zusammenfallen. Man muss dazu nur ein geeignetes Verhältniss zwischen Basishalbmesser und Höhe des Kegels wählen; unter den Aufgaben werde ich hierauf zurückkommen.

Die Vereinfachung, die durch die angeführte Voraussetzung in der Theorie herbeigeführt wird, ist sehr erheblich. Zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ besteht hier nach § 17, Gl. (90) stets die einfache Beziehung

$$\mathfrak{B} = \Theta \mathfrak{u}, \tag{107}$$

worin Θ den gemeinsamen Werth des Trägheitsmoments für alle durch den festen Punkt gehenden Axen bedeutet. — Nach dem Flächensatze ist ferner, wie in Gl. (91)

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}, \quad \text{also auch} \quad \Theta \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{K}, \tag{108}$$

worin $\mathfrak{K}$ das Moment der gegebenen äusseren Kräfte in Bezug auf den festen Punkt ist. In der Regel wird $\mathfrak{K}$ als Function der augenblicklichen Lage des Körpers bekannt sein und die Aufgabe kommt dann darauf hinaus, diese Gleichung in Verbindung mit Gl. (108) nach $\mathfrak{u}$ aufzulösen, d. h. zu integriren.

Der Fall, den man gewöhnlich im Auge hat, wenn man solche Betrachtungen anstellt, ist der des Kreisels mit festgehaltener Spitze. Kennzeichnend für den Kreisel ist die grosse Winkelgeschwindigkeit, mit der er sich von Anfang an um eine Axe dreht, die gewöhnlich nahezu mit der Figurenaxe zusammenfällt. Auch hier werde ich fernerhin annehmen, dass es sich um einen Kreisel handle und, um zum Ausdrucke zu bringen, dass das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt eine Kugel sein soll, wird er auch, wenn dies betont werden soll, als „Kugelkreisel“ bezeichnet werden.

Die äussere Kraft, die man beim Kreisel in Berücksichtigung ziehen muss, ist das Gewicht; von Reibung und Luftwiderstand kann gewöhnlich abgesehen werden, obschon beide natürlich dazu führen, dass die Kreiselbewegung schliesslich erlischt und dass sie schon vorher in allmählicher langsamer Aenderung begriffen ist. Dies ist es aber nicht, wofür man sich beim Kreisel interessirt. Dass Bewegungen durch Widerstände geändert und schliesslich zur Ruhe gebracht werden, gilt allgemein, beim Kreisel wie anderwärts und darüber hat sich daher noch niemals Jemand verwundert. Grosses Staunen haben aber von jeher die von der Reibung und den anderen Bewegungswiderständen unabhängigeu Erscheinungen der Kreiselbewegung hervorgerufen. Dieses Staunen würde noch grösser sein, wenn nicht jeder schon aus seiner frühesten Jugendzeit durch das bekannte Kinderspielzeug mit der Kreiselbewegung bekannt geworden wäre. Es entsteht aber trotzdem immer wieder, wenn Jemand zum ersten Male solche Versuche sieht oder selbst anstellt, wie sie in der Experimentalphysik mit Kreiseln oder Gyroscopen ausgeführt zu werden pflegen.

Die Eigenthümlichkeit der Kreiselbewegung, die uns besonders fesselt, ist der Umstand, dass der Kreisel, dessen schnelle Bewegung um die Drehaxe sich der Wahrnehmung fast ganz entzieht, so lange die Drehaxe nur wenig von der Figurenaxe abweicht, der also bei flüchtigem Anblicke fast dasselbe Bild wie ein ruhender Körper darbietet, sich doch so ganz anders gegen äussere Kräfte verhält, wie ein ruhender Körper. Der

Kreisel lässt sich nicht leicht durch einen seitlichen Stoss umwerfen und er fällt auch von selbst nicht um, obschon er im Durchschnitt eine Lage einnimmt, die für den ruhend aufgestellten Kreisel eine labile Gleichgewichtslage wäre. Eine Erklärung über den Grund dieser auffälligen Erscheinungen ist jedes Lehrbuch der Mechanik seinen Lesern schuldig, wenn auch eine ausführlichere Erörterung, wie schon vorher bemerkt, undurchführbar ist.

Betrachten wir zunächst die analytische Formulirung des Problems. Der Schwerpunkt des Kreisels liegt auf der „Figurenaxe“. Das Gewicht des Kreisels sei $\mathfrak{Q}$ und der Radiusvektor vom festen Punkte zum Schwerpunkte sei $\mathfrak{s}$. In Bezug auf den festen Raum ist $\mathfrak{Q}$ constant und $\mathfrak{s}$ veränderlich; relativ zum Kreisel dagegen ist $\mathfrak{Q}$ veränderlich und $\mathfrak{s}$ constant. Wo wir aber auch den Aufstellungsort wählen mögen, jedenfalls ist das statische Moment $\mathfrak{K}$ der äusseren Kraft

$$\mathfrak{K} = V\mathfrak{Q}\mathfrak{s} \tag{109}$$

und für den Kugelkreisel wird daher nach Gl. (108)

$$\Theta \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = V\mathfrak{Q}\mathfrak{s}, \tag{110}$$

wobei als Aufstellungsort der absolute Raum gewählt sein soll. Nun ist $\mathfrak{s}$ selbst eine Function der Zeit und zwar hat man

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = -V\mathfrak{u}\mathfrak{s}, \tag{111}$$

denn dies ist die Formel, nach der man bei der Rotation eines Körpers stets die Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ irgend eines Punktes vom Radiusvektor $\mathfrak{s}$ ermitteln kann. Sobald es gelingt, die Gleichungen (110) und (111) nach den unbekannten Functionen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ aufzulösen, also die Gleichungen zu integriren, wobei noch zwei willkürliche Vektoren als Integrationsconstanten auftreten müssen, durch die man sich jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anzuschliessen vermag, ist das Kreiselproblem — zunächst wenigstens für den Kugelkreisel — vollständig gelöst.

In den Lehrbüchern der analytischen Mechanik, die auf dieses Problem näher eingehen, sind natürlich der früher allein

herrschenden Gewohnheit gemäss die Gleichungen (110) und (111) in je drei Componentengleichungen gespaltet und man hat dann sechs simultane Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen nicht gerichteten Variablen, bei deren Integration sechs Constanten auftreten müssen, die sich als die Componenten der vorher erwähnten zwei Vektorconstanten darstellen.

Man hat die allgemeine Lösung dieser Gleichungen gefunden; sie lässt sich aber nur mit Hülfe elliptischer Functionen darstellen, worauf hier nicht einzugehen ist. Wir müssen daher darauf verzichten, hier die allgemeinste Bewegung eines Kugelkreisels zu untersuchen und uns mit der Betrachtung specieller Bewegungsarten begnügen, die als partikuläre Integrale in der allgemeinen Lösung mit enthalten sind. Nur einige allgemeine Schlüsse, die sich aus den Differentialgleichungen des Problems sofort ziehen lassen, mögen zuvor noch Erwähnung finden.

Aus Gl. (110) folgt, dass die Aenderung von $\mathfrak{u}$ in jedem Augenblicke rechtwinklig zu $\mathfrak{Q}$ steht. In Bezug auf den festen Raum ist aber $\mathfrak{Q}$ nach Grösse und Richtung constant. Eine Ebene, die senkrecht zu $\mathfrak{Q}$ steht, ist als eine horizontale Ebene zu bezeichnen. Hiernach ist $d\mathfrak{u}$ jederzeit horizontal; die Vertikalprojektion von $\mathfrak{u}$ ändert sich demnach überhaupt nicht. Denkt man sich alle Werthe, die $\mathfrak{u}$ der Reihe nach annimmt, vom festen Punkte aus im ruhenden Raume abgetragen, so erhält man eine allgemeine Kegelfläche, die wir auch jetzt wieder als den Herpolodiekegel bezeichnen wollen. Ebenso soll die Curve, die die Endpunkte der $\mathfrak{u}$ miteinander verbindet, die Herpolodie genannt werden, obschon hier gegenüber der Bewegung des kräftefreien Körpers, bei der diese Bezeichnung eingeführt wurde, der wesentliche Unterschied besteht, dass die Herpolodie nicht durch Wälzen des Trägheitsellipsoids auf einer unveränderlichen Ebene erzeugt wird.

Betrachten wir ferner die Aenderung von $\mathfrak{u}$ relativ zum Kreisel. Wenn sich irgend eine Strecke $\mathfrak{a}$ gegen den festen Raum im Zeitelemente dt um $d\mathfrak{a}$ ändert, erhalten wir die Aenderung relativ zum rotirenden Körper, indem wir zu $d\mathfrak{a}$

noch jene relative Aenderung hinzufügen, die durch die Rotation bedingt wird. Diese ist im allgemeinen Falle gleich $dt\,\mathrm{V}\,\mathfrak{u}\mathfrak{a}$. In unserem Falle ist sie aber gleich Null, da $\mathfrak{a}$ selbst mit der Drehaxe $\mathfrak{u}$ zusammenfällt. Demnach gilt die Gleichung

$$\Theta\frac{d\mathfrak{u}}{dt}=\mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s}$$

ohne jede Abweichung unmittelbar auch für die Aenderungen von $\mathfrak{u}$ relativ zum Kreisel. Das Vektorprodukt steht aber senkrecht zu jedem seiner Faktoren, also ist $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ jederzeit senkrecht zu $\mathfrak{s}$. Trägt man also die aufeinanderfolgenden Werthe von $\mathfrak{u}$ auch relativ zum Kreisel ab, so kann sich jeder Werth von jedem anderen nur um eine Strecke unterscheiden, die rechtwinklig zu $\mathfrak{s}$ gerichtet ist. Die Projektion von $\mathfrak{u}$ auf die Kreiselaxe ist demnach ebenfalls constant. Die Polodie — wenn wir diese Bezeichnung in derselben Weise wie vorher bei der Herpolodie auf den hier vorliegenden Fall übertragen — ist folglich gleichfalls eine ebene Curve, die auf einer zur Figurenaxe senkrechten Ebene enthalten ist. Wenn man die Gestalten der Polodie und der Herpolodie auf Grund einer Integration der Gleichungen (110) und (111) anzugeben vermag, ist das Kreiselproblem (für den Kugelkreisel) gelöst.

Eine sehr einfache specielle Lösung der Differentialgleichungen erhalten wir, wenn wir versuchsweise

$$\mathfrak{s}=a\mathfrak{u}+\mathfrak{c} \tag{112}$$

setzen, worin a eine richtungslose und $\mathfrak{c}$ eine gerichtete Constante bedeuten. Man überzeugt sich leicht, dass dieser Zusammenhang zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{u}$ mit den Gleichungen verträglich ist. Durch Differentiation folgt nämlich

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt}=a\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$$

und hiermit geht Gl. (110) über in

$$\frac{\Theta}{a}\frac{d\mathfrak{s}}{dt}=\mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s} \tag{113}$$

und Gl. (111) wird

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = -\mathrm{V}\frac{\mathfrak{s}-\mathfrak{c}}{a}\cdot\mathfrak{s} = \frac{1}{a}\mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{s}. \tag{114}$$

Allerdings muss, damit beide Gleichungen mit einander verträglich seien, $\mathfrak{c}$ so gewählt werden, dass $\mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{s}$ mit $\mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s}$ gleichgerichtet ist. Dies erfordert, dass $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{s}$ in einer Ebene liegen. Nun sind aber $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{Q}$ constant, während $\mathfrak{s}$ veränderlich ist. Damit alle drei Vektoren jederzeit in einer Ebene liegen bleiben, lassen wir $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{Q}$ zusammenfallen. Wir setzen daher specieller

$$\mathfrak{s} = a\mathfrak{u} + c\mathfrak{Q} \tag{115}$$

und die Gl. (114) geht damit über in

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{c}{a}\mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s}. \tag{116}$$

Damit diese mit Gleichung (113) übereinstimme, muss

$$\frac{a}{\Theta} = \frac{c}{a} \quad \text{oder} \quad c = \frac{a^2}{\Theta}$$

sein. Die Constante $\mathfrak{c}$ ist daher keineswegs willkürlich, sondern der Ansatz (112) muss, damit er eine Lösung der Differentialgleichungen bilde, in der Form

$$\mathfrak{s} = a\mathfrak{u} + \frac{a^2}{\Theta}\mathfrak{Q} \tag{117}$$

specialisirt werden. Es bleibt nur noch übrig, die Differentialgleichung (113) oder (114) in der Form

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{a}{\Theta}\mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s} \tag{118}$$

zu lösen, denn dann ist damit nach Gl. (117) zugleich auch $\mathfrak{u}$ als Function der Zeit bekannt. Die Lösung kann sofort angegeben werden. Das zu jedem dt gehörige $d\mathfrak{s}$ ist nämlich nach Gl. (118) ebenso gross, als wenn sich $\mathfrak{s}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{a}{\Theta}\mathfrak{Q}$, also um die lothrechte Axe mit constanter Geschwindigkeit drehte. — Hieraus ist übrigens nicht zu schliessen, dass die Bewegung um die lothrechte Axe erfolgen müsse. Zur Winkelgeschwindigkeits-Componente $-\frac{a}{\Theta}\mathfrak{Q}$ kann vielmehr noch eine zweite treten, die in die Richtung von $\mathfrak{s}$ fällt, ohne an Gl. (118) etwas zu ändern. Jedenfalls

liegt aber die Momentanaxe in der durch $\mathfrak{s}$ gelegten lothrechten Ebene.

Diese einfachste Bewegungsform des Kreisels ist unter dem Namen der **regulären Präcession** bekannt. Die Kreiselaxe beschreibt im festen Raume einen Kreiskegel um die lothrechte Richtung mit der angegebenen Winkelgeschwindigkeit. Auch der Herpolodiekegel wird ein Kreiskegel mit lothrechter Axe, der mit derselben Winkelgeschwindigkeit beschrieben wird, denn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ liegen in jedem Augenblicke nach Gl. (117) in einer lothrechten Ebene und bestimmen in dieser ein Dreieck von unveränderlicher Gestalt.

Wenn $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{u}$ in der Anfangslage gegeben sind, kann nach Gl. (117) sofort auch die Constante a und mit ihr die Präcessionsgeschwindigkeit berechnet werden. Man bezeichne etwa den Winkel, um den die Richtung von $\mathfrak{s}$ von der Lothrechten abweicht, mit α, den Winkel zwischen $\mathfrak{u}$ und der Lothrechten mit β und die Absolutwerthe von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{u}$ wie gewöhnlich mit lateinischen Buchstaben. Dann folgt aus Gl. (117) wenn man die horizontalen Componenten davon nimmt,

$$s \cdot \sin \alpha = au \sin \beta \tag{119}$$

und für die vertikalen Componenten gilt

$$s \cos \alpha = au \cos \beta - \frac{a^2}{\Theta} Q. \tag{120}$$

Die lothrechte Richtung, von der aus die Winkel α und β gerechnet werden, ist hierbei nach oben hin genommen, während $\mathfrak{Q}$ nach abwärts geht und daher eine negative Projektion hat.

Die Gleichungen zeigen uns, dass α und β nicht willkürlich angenommen werden dürfen, sondern dass die Richtung von $\mathfrak{u}$ durch jene von $\mathfrak{s}$ zugleich mit bestimmt ist, wenn u gegeben ist; dies folgt übrigens ohne Weiteres auch schon aus der ursprünglichen Gl. (117). Wir eliminiren zunächst den Winkel β aus den Gleichungen (119) und (120) und erhalten

$$s^2 \sin^2 \alpha = a^2 u^2 \sin^2 \beta$$

$$s^2 \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \frac{a^2}{\Theta} Q + \frac{a^4}{\Theta^2} Q^2 = a^2 u^2 \cos^2 \beta,$$

also hieraus durch Addition

$$s^2 + 2s \cos\alpha \frac{a^2}{\Theta} Q + \frac{a^4}{\Theta^2} Q^2 = a^2 u^2.$$

Für a^2 ist diese Gleichung vom zweiten Grade. Die Auflösung liefert

$$a^2 = u^2 \frac{\Theta^2}{2Q^2} - s \cos\alpha \frac{\Theta}{Q}$$
$$\pm \sqrt{u^4 \frac{\Theta^4}{4Q^4} - u^2 s \cos\alpha \frac{\Theta^3}{Q^3} - s^2 \sin^2\alpha \frac{\Theta^2}{Q^2}}. \tag{121}$$

Wenn u zu klein oder α zu gross wird, wird die Lösung imaginär, d. h. die reguläre Präcession ist dann überhaupt nicht mehr möglich; der Kreisel „fällt um". Ferner ist der Absolutwerth der Wurzel in jedem Falle kleiner, als der Werth vor dem Wurzelzeichen. Damit a selbst nicht imaginär wird, muss daher der vor dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck jedenfalls positiv sein. Hiernach kann man aus Gl. (121) leicht feststellen, wie gross für ein gegebenes α die Winkelgeschwindigkeit mindestens sein muss. Wir wollen uns damit nicht aufhalten, sondern weiterhin nur noch den Fall näher ins Auge fassen, dass u sehr viel grösser ist, als jener Mindestwerth; von u^2, das in Gl. (121) allein vorkommt, wird dies dann erst recht gelten.

Wenn ein Werth a viel grösser ist, als ein anderer Werth b, kann man mit genügender Genauigkeit

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \cdots$$

setzen. Von dieser Reihenentwickelung möge Gebrauch gemacht werden, um die Wurzel in Gl. (121) auszuziehen. Berücksichtigt man zunächst nur die beiden ersten Glieder der Reihe, so findet man

$$a^2 = u^2 \frac{\Theta^2}{2Q^2} - s \cos\alpha \frac{\Theta}{Q} \pm \left\{ u^2 \frac{\Theta^2}{2Q^2} - \frac{u^2 s \cos\alpha \frac{\Theta^3}{Q^3} + s^2 \sin^2\alpha \frac{\Theta^2}{Q^2}}{u^2 \frac{\Theta^2}{Q^2}} \right\}.$$

Von den beiden Werthen a_1^2 und a_2^2, die dem oberen und dem unteren Wurzelvorzeichen entsprechen, interessirt uns zunächst der zweite; die Formel liefert

$$a_2^2 = \frac{s^2}{u^2} \sin^2\alpha.$$

Hier ist nur noch ein Glied von der Ordnung u^{-2} stehen geblieben; es wird daher nöthig, auch noch das dritte Glied der Reihenentwicklung hinzu zu nehmen. Bis auf Glieder höherer Ordnung genau erhält man dann

$$a_2 = \frac{s}{u}.$$

Der zugehörige Werth β_2 von β folgt aus Gl. (119), nämlich

$$\sin \beta_2 = \sin \alpha.$$

Die Rotationsaxe $\mathfrak{u}$ fällt daher nahezu (weil die vorausgehenden Werthe nur näherungsweise gelten) mit der Figurenaxe zusammen. Zugleich dürfen sich α und β nur wenig von rechten Winkeln unterscheiden, damit die hier gefundene Beziehung zwischen beiden mit Gl. (120) verträglich bleibe. Für die Winkelgeschwindigkeit w der Präcession erhält man nach den auf Gl. (118) folgenden Bemerkungen

$$w = \frac{a\,Q}{\Theta} = \frac{Q\,s}{\Theta\,u} \tag{121a}$$

und dies ist wegen des Faktors u im Nenner ein sehr kleiner Werth. Wir haben hier den Fall der „langsamen" regulären Präcession.

Dagegen ist a_1^2 sehr viel grösser als a_2^2 und $\sin \beta$ wird nach Gl. (119) ein sehr kleiner Werth, d. h. die Rotationsaxe steht nahezu lothrecht und sie umkreist die lothrechte Richtung mit grosser Winkelgeschwindigkeit („schnelle Präcession"); auch die Kreiselaxe, die um einen beliebigen Winkel von der lothrechten Richtung abweichen kann, rotirt mit derselben grossen Winkelgeschwindigkeit um die Auflagervertikale.

Wir haben hiermit wenigstens einen ganz speciellen Fall der Kreiselbewegung etwas näher untersucht. Er stellt zunächst eine mögliche Kreiselbewegung dar, die auch sofort zur wirklichen wird, wenn die Anfangsbedingungen entsprechend gewählt werden, d. h. der Kreisel setzt die hier besprochene Bewegung stetig fort, wenn er nur einmal in ihr begriffen war. Dieser besondere Fall der Kreiselbewegung ist aber, wie sich bald zeigen wird, viel weniger wichtig als ein anderer, zu dem wir jetzt übergehen wollen.

§ 24. Die pseudoreguläre Präcession.

Wir wollen das Problem jetzt noch von einer anderen Seite her in Angriff nehmen. Dabei sehen wir von der regulären Präcession ganz ab, nehmen vielmehr den Anfangszustand sonst ganz willkürlich gegeben an, setzen aber voraus, dass der Kreisel anfänglich sehr schnell um eine Axe rotirte, die von der Figurenaxe nur wenig abwich. Diese Annahmen sind um so unbedenklicher, als sie bei den gewöhnlich beobachteten Kreiselbewegungen in der That erfüllt sind. Was unter dem „sehr schnell“ zu verstehen ist, wird sich bald zeigen; unter der geringen Abweichung zwischen Kreiselaxe und anfänglicher Rotationsaxe möge man sich etwa einen Winkel von 1^0 oder darunter vorstellen.

Die Schwerkraft denken wir uns vorläufig ganz beseitigt. Da beim Kugelkreisel jede Axe eine freie Axe ist, rotirt er um die anfängliche Rotationsaxe so lange unverändert weiter, als keine äussere Kraft einwirkt. Wir denken uns jetzt diesem Kreisel einen kleinen Stoss ertheilt und zwar möge eine constante Kraft, deren Richtungslinie die Figurenaxe schneidet, eine gewisse kleine Zeit t hindurch auf den Kreisel einwirken. Diese Zeit t soll zwar klein sein, wegen der grossen Winkelgeschwindigkeit u_0 können wir sie uns aber doch so gross vorstellen, dass der Kreisel während dessen mehrere Umdrehungen ausführt. Da die Figurenaxe um $\mathfrak{u}_0$ rotirt, verschiebt sich zwar der Angriffspunkt der Kraft etwas im Raume und das statische Moment $\mathfrak{K}$ der Kraft ist daher während der Zeit t nicht genau constant. Die Abweichung ist aber gering und wir können daher für den Hebelarm der Kraft die mittlere Richtung während eines Umlaufs in Anrechnung bringen, die mit der Richtung von $\mathfrak{u}$ zusammenfällt. Das statische Moment $\mathfrak{K}$ nehmen wir daher senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gerichtet und constant während der Zeit t an.

An Stelle von Gl. (110) haben wir hier

$$\Theta \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{K}$$

und diese Gleichung lässt sich wegen der Constanz von $\mathfrak{K}$ sofort integriren. Wir erhalten

$$\Theta \mathfrak{u} = \Theta \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{K} t. \qquad (122)$$

Die ganze Betrachtung würde freilich hinfällig werden, wenn sich der Werth von $\mathfrak{u}$ nach Ablauf der Zeit t merklich von dem Anfangswerthe $\mathfrak{u}_0$ unterschiede. Wir wollen jetzt sehen, wie gross wir uns u_0 (oder wie klein wir uns K) zu diesem Zwecke vorstellen müssen. Unter t möge etwa die Zeit verstanden werden, während deren der Kreisel zehn Umdrehungen ausführte. Ferner sei K gleich Qs gewählt, also gleich dem statischen Momente, das das Gewicht Q im günstigsten Falle (wenn $\mathfrak{s}$ horizontal wäre) ausüben könnte. Wir wollen dann verlangen, dass sich während dieser Zeit die Richtungslinie von $\mathfrak{u}$ höchstens um so viel geändert hat, dass der davon beschriebene Bogen $\frac{1}{1000}$ des Radius ausmacht. Der Absolutwerth von $\mathfrak{u}$ kann dann gleich dem von $\mathfrak{u}_0$ genommen werden, denn $\mathfrak{K} t$, das sich zu $\Theta \mathfrak{u}_0$ geometrisch summirt, steht senkrecht zu $\mathfrak{u}_0$, bringt also neben der kleinen Richtungsänderung nur eine von der zweiten Ordnung kleine Grössenänderung zu Stande. Wir verlangen also, dass Qst höchstens ein Tausendstel von Θu_0 ausmacht. Da nun t zu zehn Umläufen gehören sollte, also gleich

$$\frac{20\pi}{u_0}$$

gesetzt werden muss, erhalten wir die Ungleichung

$$\Theta u_0 > 1000\, Qs \frac{20\pi}{u_0}$$

und hiernach muss

$$u_0 > \sqrt{\frac{20\,000\,\pi\, Qs}{\Theta}}$$

sein. Anstatt mit Q, s und Θ zu rechnen, können wir einfacher auf Grund von Gl. (76) die reducirte Pendellänge l einführen, die dem Kreisel zukäme, wenn er als Pendel vom Auflagerpunkte herabhinge und einfache Pendelschwingungen ausführte. Die Bedingung für u_0 lautet dann

$$u_0 > \sqrt{\frac{20\,000\,\pi g}{l}}.$$

Wir wollen an einem Zahlenbeispiele sehen, was für ein Werth dies ist. Hierzu setzen wir $l = 3{,}14$ cm und erhalten

$$u_0 > 4315 \text{ sec}^{-1}$$

oder, wenn man auf Umdrehungen in der Secunde umrechnet, muss der Kreisel in der Secunde ungefähr 700 Umdrehungen machen.

Das ist freilich eine enorme Geschwindigkeit, die praktisch höchstens einmal gelegentlich bei einer Laval'schen Dampfturbine erreicht wird. Wir haben aber auch alle Annahmen so getroffen, dass u_0 besonders gross werden musste. Nimmt man dagegen z. B. an, 1) dass $l = 31{,}4$ cm wird, 2) dass es genügt, wenn sich nur während eines Umlaufs der Figurenaxe um die Umdrehungsaxe diese noch nicht merklich verschoben habe, 3) dass unter einer „unmerklichen" Richtungsabweichung eine solche verstanden werden soll, die in Bogenmaass ausgedrückt höchstens gleich $\frac{1}{100}$ ist, 3) dass auch das statische Moment K nur $\frac{1}{10}$ von Qs beträgt, so braucht die Umdrehungsgeschwindigkeit u_0 nur noch mindestens sieben Umdrehungen in der Secunde zu betragen, um die Zulässigkeit der Betrachtungen, die zu Gl. (122) führten, unter gewöhnlichen Umständen hinreichend zu sichern.

Im Uebrigen brauchen wir uns aber auch durch den unter den strengeren Anforderungen ermittelten Werth von u_0 nicht stören zu lassen. Schon aus der Erfahrung ist ja hinreichend bekannt, dass die Eigenthümlichkeiten der Kreiselbewegung, für die wir eine Erklärung suchen, um so stärker oder um so reiner hervortreten, je schneller der Kreisel rotirt. Es ist daher ganz in der Ordnung, wenn wir bei der Untersuchung der Kreiselbewegung von der Annahme einer ganz besonders grossen Winkelgeschwindigkeit ausgehen; wir bekommen dann die einfachsten Erscheinungen, die wir erwarten können und müssen nur bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall im Auge behalten, dass sich Abweichungen davon um so mehr geltend machen werden, je kleiner die Winkelgeschwindigkeit thatsächlich ist. Aber auch selbst wenn die Winkelgeschwindigkeit schon verhältnissmässig klein geworden ist, wird der Vergleich

mit den bei grossen Geschwindigkeiten zu erwartenden Gesetzmässigkeiten von Nutzen sein. Wenn die Erscheinung dann auch nur noch in grossen Zügen mit jener beim schnell bewegten Kreisel übereinstimmt, so werden wir doch ein besseres Verständniss der Bewegung durch jenen Vergleich vorbereiten.

Wenn die Zeit t, während der das Moment $\mathfrak{K}$ wirkte, abgelaufen ist, bewegt sich der Kreisel um die zuletzt erlangte Umdrehungsaxe stetig weiter, da diese (beim Kugelkreisel) jedenfalls eine freie Axe ist. Der ganze Erfolg des Stosses $\mathfrak{K}t$ bestand demnach darin, die Rotationsaxe $\mathfrak{u}$ gegen den festen Raum um einen Winkel φ zu drehen, der

$$\varphi = \frac{Kt}{\Theta u}$$

ist. Gegen den Kreisel selbst (oder relativ zur Figurenaxe) erfährt übrigens die Momentanaxe $\mathfrak{u}$ ebenfalls eine gewisse Verschiebung, wie schon aus den über diese Relativverschiebung im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen hervorgeht. Auf S. 195 komme ich darauf noch ausführlicher zurück.

Wäre der Kreisel in Ruhe gewesen, als er den Stoss $\mathfrak{K}t$ empfing, so hätte er durch ihn eine Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$$

erlangt, die parallel zu $\mathfrak{K}$ ist. Daher drehte sich in diesem Falle der ganze Kreisel um eine Axe, die mit $\mathfrak{K}$ parallel ginge und während der Zeit t um einen Winkel ψ, der

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{Kt^2}{\Theta}$$

wäre. Der Winkel ψ wird gewöhnlich schon grösser sein, als der Winkel φ, da wir t gross genug annahmen, um während dessen einige Umdrehungen zuzulassen, so dass also ut ein Mehrfaches von 2π ist. Der Hauptunterschied besteht aber darin, dass der Winkel ψ nach Aufhören des Stosses immer weiter wächst, während φ nicht mehr wächst. Im einen Falle wird also (ganz in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen) durch den Stoss $\mathfrak{K}t$ nur eine geringe Ablenkung der Kreisellage bewirkt, die nachher wieder einem benachbarten stationären Zustande Platz macht, während im anderen Falle der

geringste Stoss schon dazu genügt, den Kreisel von seiner ursprünglichen Lage immer weiter zu entfernen.

Ganz besonders ist aber auch noch auf den Unterschied zwischen den Richtungen zu achten, nach denen der Kreisel unter dem Einflusse eines Stosses ausweicht. Wenn er aufrecht rotirt und die horizontale Kraft $\mathfrak{P}$ wirkt auf ihn ein, wie in Abb. 27, so steht das Moment $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{u}_0$ geht durch $\frac{\mathfrak{K}t}{\Theta}$ in $\mathfrak{u}$ über, also so, dass die Drehaxe nicht in der Richtung von $\mathfrak{P}$, sondern senkrecht dazu ausweicht. Dies gilt allerdings zunächst nur von der Drehaxe und nicht von der Figurenaxe. Auch gegen die Figurenaxe verschiebt sich $\mathfrak{u}$ um gleich viel. Wenn also vorher die Figurenaxe und die Drehaxe zusammenfielen, so trifft dies nach dem Stosse nicht mehr zu; die Figurenaxe beschreibt vielmehr nachher einen Kegel um die Drehaxe $\mathfrak{u}$. Die mittlere Richtung der Figurenaxe fällt dabei indessen immer noch mit der Axe $\mathfrak{u}$, die sie umkreist, zusammen.

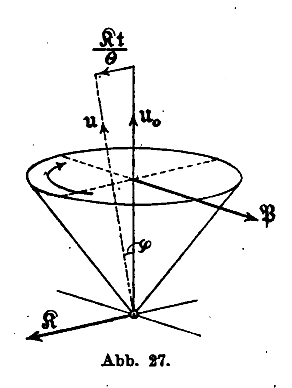


Abb. 27.

Rotirte der Kreisel dagegen zu Anfang nicht, so bewegt er sich einfach im Sinne der Kraft $\mathfrak{P}$. Die Axe $\mathfrak{u}$, die hierbei entsteht, steht zwar auch senkrecht zu $\mathfrak{P}$; darauf achtet man aber bei dieser langsamen Bewegung nicht weiter; man hält sich nur an den handgreiflichen Umstand, dass sich die Figurenaxe im Sinne der Kraft $\mathfrak{P}$ bewegt. Von der Figurenaxe gilt dies im ersten Augenblicke übrigens auch beim rotirenden Kreisel. Auch hier weicht sie unmittelbar nach dem Stosse in Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ aus. Sie entfernt sich aber dabei von der Umdrehungsaxe $\mathfrak{u}$, die sie nach dem Stosse umkreist. Wegen des Umkreisens, das nachher eintritt, gelangt die Ausweichung im ersten Augenblicke nach der Richtung von $\mathfrak{P}$ hin kaum zur Beobachtung (namentlich bei sehr schneller Rotation) und im Ganzen wird die mittlere Richtung nach

derselben Seite wie $\mathfrak{u}$, also senkrecht zu $\mathfrak{P}$ verschoben. Mit dieser Betrachtung hat jene Eigenschaft des rotirenden Kreisels, die wohl als die merkwürdigste zu bezeichnen ist, dass er sich nämlich im Mittel genommen senkrecht zur Richtung der an ihm angreifenden Kraft $\mathfrak{P}$ „bewegt“, während der ruhende Kreisel sich in der Richtung von $\mathfrak{P}$ bewegt, ihre Erklärung gefunden. Es zeigte sich, um es noch einmal mit anderen Worten zu wiederholen, dass der scheinbare Widerspruch zwischen beiden Fällen nur dadurch hervorgebracht wird, dass man den schnell rotirenden Kreisel, so wie er sich dem Auge darstellt, unwillkürlich als einen ungefähr ruhenden Körper ansieht und von der „Bewegung“ dieses ruhend gedachten Körpers spricht, ohne zu bedenken, dass jede Bewegung zu der schon vorhandenen hinzutritt und sich mit dieser zusammensetzt. Dass das Ergebniss dieser Zusammensetzung eine ganz von der ohne Anfangsbewegung zu Stande kommenden Verschiebung des Körperumrisses verschiedene sein kann, ist leicht einzusehen.

Bisher nahm ich immer an, dass auf die Schwerkraft nicht geachtet zu werden brauchte. Von jetzt ab wollen wir diese mit heranziehen. Zunächst sei angenommen, dass die Umdrehungsaxe des Kreisels anfänglich genau senkrecht stand, die Figurenaxe (oder „Kreiselaxe“) dagegen nicht genau mit der Umdrehungsrichtung zusammenfiel. Das statische Moment des Gewichts ist dann im Mittel gleich Null, denn der Schwerpunkt umkreist die Lothrechte. Nach längerer Zeit kann sich daher auch $\mathfrak{u}$ nach Gl. (12) nicht geändert haben. Die Bewegung wird also ohne Unterlass in derselben Weise fortgehen. Freilich ist wohl zu beachten, dass $\mathfrak{R}$ nicht wirklich in jedem Augenblicke, sondern nur im Durchschnitte gleich Null ist. Infolge dessen wird auch $\mathfrak{u}$ Richtungsänderungen von sehr geringem Betrage erleiden, die sich nur nach Ablauf eines Umlaufes, also schon in sehr kurzer Zeit vollständig wieder ausgeglichen haben. Auch die Figurenaxe beschreibt nicht genau einen Kreiskegel, sondern es kommen geringe schnell aufeinanderfolgende und sich gegenseitig tilgende Abweichungen davon vor, die sich

aber dem Beobachter wegen ihrer Kleinheit und kurzen Dauer kaum bemerklich machen können. — Uebrigens kann der Winkel zwischen Figurenaxe und Umdrehungsaxe im vorliegenden Falle auch schon recht gross sein, ohne dass sich an der Zulässigkeit dieser Schlüsse etwas änderte. Ist er klein, dann hat der Beschauer den Eindruck, als wenn der Kreisel sich gar nicht mehr bewegte, sondern im scheinbar labilen Gleichgewichte auf dem Auflagerpunkte balancirte.

Ferner sei jetzt vorausgesetzt, dass die Umdrehungsaxe $\mathfrak{u}_0$ des Kreisels anfänglich einen beliebigen Winkel β mit der Vertikalen bildete, während Figurenaxe und Umdrehungsaxe anfänglich nahe zusammenfielen. Wenn wir dann den Kreisel der Wirkung seines Gewichts überlassen, befindet er sich während der nächsten paar Umläufe unter denselben Bedingungen, wie der vorher betrachtete Kreisel, auf den ein Stoss $\mathfrak{K}t$ ausgeübt wurde. Wir können daher das, was wir dort fanden, auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen. Zunächst ist daran zu erinnern, dass sich $\mathfrak{u}$ innerhalb der kleinen Zeit t der Richtung, aber nicht der Grösse nach ändert und dass diese Richtungsänderung aus Gl. (122) entnommen werden kann. Da $\mathfrak{Q}$ jederzeit lothrecht, $\mathfrak{K}$ daher jederzeit horizontal gerichtet ist, muss $\mathfrak{u}$ nach Gl. (122) dieselbe Vertikalprojektion behalten wie $\mathfrak{u}_0$ und da auch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}_0$ selbst von gleicher Grösse sind, folgt, dass sie gleiche Winkel mit der lothrechten Richtung bilden. In der kleinen Zeit t hat daher $\mathfrak{u}_0$ gegen den festen Raum nur eine Drehung um die lothrechte Axe in die Lage $\mathfrak{u}$ beschrieben. Wenn das Gewicht von nun ab zu wirken aufhörte, würde sich der Kugelkreisel unverändert um $\mathfrak{u}$ weiter drehen.

Wir müssen uns noch fragen, wie sich innerhalb der ersten Zeit t die Drehaxe relativ zur Kreiselaxe verschiebt. Betrachten wir ein kleines Zeitelement dt, innerhalb dessen auch nur eine kleine Drehung udt erfolgt, so ist nach einer schon mehrfach benutzten Ueberlegung die während dt eintretende relative Verschiebung der Drehaxe gegen die Kreiselaxe gleich der absoluten Verschiebung von $\mathfrak{u}$ im Raume. Der Winkelabstand

zwischen Drehaxe und Kreiselaxe wird sich daher innerhalb dt vergrössern, wenn ein auf der Einheitskugel von der Kreiselaxe zur Drehaxe gezogener Bogen grade in die Richtung von $\mathfrak{K}$ fällt. Die Kreiselaxe rotirt aber sehr schnell um die Drehaxe und nimmt innerhalb der ganzen Zeit t alle möglichen, mit der vorhandenen Winkelabweichung verträglichen, Stellungen zu ihr nach einander ein. Daraus folgt, dass sich für eine Anzahl von Umläufen, die in die Zeit t fallen, die kleinen Schwankungen des Winkels zwischen beiden Axen gegen einander ausgleichen. Nach Ablauf der Zeit t bleibt daher nur die Drehung von $\mathfrak{u}$ gegen den festen Raum übrig, während relativ zur Kreiselaxe keine bleibende Verschiebung zu Stande kommt.

Aus dieser Betrachtung merke man sich als besonders beachtenswerth, dass ein schnell um eine Axe, die nahe mit der Figurenaxe zusammenfällt, rotirender Kreisel durch einen Stoss nur dann eine merkliche bleibende Verschiebung der Drehaxe gegen die Figurenaxe erfahren kann, wenn sich der Stoss innerhalb einer so kurzen Zeit abspielt, dass sich der Kreisel inzwischen nur um einen Bruchtheil eines Umlaufs weiterdrehen konnte. Im anderen Falle verschiebt sich die Figurenaxe einfach mit der Drehaxe, d. h. mit der Richtung von $\mathfrak{B}$.

Nachdem wir uns über das Verhalten des Kreisels während der kleinen Zeit t Rechenschaft gegeben haben, bleibt nur übrig, den Stoss $\mathfrak{K}t$ in der neuen Lage immer von Neuem zu wiederholen, um die Bewegung während einer grösseren Zeit zu finden. Dabei ist nur zu beachten, dass sich jedesmal die mittlere Richtung der Kreiselaxe entsprechend der neuen Lage von $\mathfrak{u}$ etwas geändert hat. Jederzeit muss daher $\mathfrak{K}t$ rechtwinklig zu dem jeweiligen $\mathfrak{u}$ gerichtet angenommen werden. Dadurch kommt im Ganzen eine stetige Drehung von $\mathfrak{u}$ um die lothrechte Richtung heraus und die Kreiselaxe selbst folgt im Wesentlichen dieser Drehung von $\mathfrak{u}$, wobei nur noch hinzukommt, dass sie zugleich $\mathfrak{u}$ selbst umkreist. Die Bewegung der Kreiselaxe kann daher als eine epicycloidische bezeichnet werden.

Wegen der — von kleinen Schwankungen abgesehen — regelmässigen Umkreisung von $\mathfrak{u}$ um die lothrechte Richtung ähnelt dem äusseren Anblicke nach die Bewegung der regulären Präcession. Sie ist aber nicht mit ihr identisch, wie schon daraus hervorgeht, dass die Kreiselaxe bei dieser ebenfalls eine Kreiskegelfläche um die lothrechte Richtung beschreibt, während wir erkannt haben, dass sie in unserem Falle eine epicycloidische Bewegung ausführt. Wegen der erwähnten Aehnlichkeit mit der regulären Präcession hat Herr F. Klein die jetzt betrachtete Bewegung des Kreisels als die pseudoreguläre Präcession bezeichnet. Sie darf aber mit der regulären keineswegs verwechselt werden und namentlich dürfen die Rechnungen des vorigen Paragraphen, die sich auf die reguläre Präcession bezogen, im Allgemeinen auf die pseudoreguläre nicht angewendet werden. Nur die „langsame“ reguläre Präcession schliesst sich der pseudoregulären in solcher Art an, dass sie als ein Sonderfall von ihr betrachtet werden kann. Daher stimmt auch die in Gl. (121a) für die Präcessionsgeschwindigkeit der „langsamen“ Präcession aufgestellte Formel mit der für die pseudoreguläre Präcession überein.

Die Umlaufszeit T bei der pseudoregulären Präcession kann leicht berechnet werden. Der Winkel, den $\mathfrak{u}$ mit der lothrechten Richtung bildet, sei wieder mit β bezeichnet. Dann ist

$$K = Qs \sin \beta.$$

Abb. 28.

Der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ beschreibt in T einen Kreis vom Halbmesser $u \sin \beta$ (vgl. Abb. 28, in der die Figur des Kreisels selbst weggelassen ist). Während t wird der Kreisbogen $\frac{Kt}{\Theta}$ durchlaufen. Daraus folgt für den zugehörigen Centriwinkel χ

$$\chi = \frac{Kt}{\Theta u \sin \beta} = \frac{Qst}{\Theta u}$$

und für die Präcessionsgeschwindigkeit w

$$w = \frac{\chi}{t} = \frac{Qs}{\Theta u}$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (121a). Da der Kreis mit constanter Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird, ist

$$T = \frac{2\pi}{\chi} t = \frac{2\pi u \Theta}{Qs}. \tag{123}$$

Die Präcession erfolgt demnach um so langsamer, je grösser die Winkelgeschwindigkeit u ist und die Geschwindigkeit der Präcession ist zugleich unabhängig von der Neigung β des mittleren Ortes der Kreiselaxe (während einer Kreiseldrehung) gegen die Lothrechte. Diese Folgerungen stehen mit den aus dem Experiment oder auch schon von dem Spielkreisel her bekannten Erfahrungen in bester Uebereinstimmung.

Führt man auch hier die reducirte Pendellänge l des Kreisels ein, so vereinfacht sich Gl. (123) zu

$$T = 2\pi \frac{lu}{g}. \tag{124}$$

Man kann also z. B. mit Hülfe dieser Gleichung aus der langsam erfolgenden Präcessionsbewegung, deren Umlaufszeit T sich bei Beobachtung einer Kreiselbewegung leicht hinreichend genau feststellen lässt, ohne Weiteres schliessen, wie gross die Winkelgeschwindigkeit u der Drehung ist.

§ 25. Die Verwendung der Kreiseltheorie in der Praxis. Uebersicht über verwandte Bewegungen.

Wer sich mit den Lehren der Mechanik vertraut machen will, darf das Interesse, das er einem Probleme entgegenbringt, nicht ausschliesslich von dem unmittelbaren Nutzen abhängig machen, der sich daraus für die Anwendungen in der technischen Praxis ergiebt. Er muss von selbst das Bedürfniss empfinden, über einen Bewegungsvorgang von so ausgesprochener Eigenart wie die Kreiselbewegung, ein klares Urtheil zu gewinnen, auch dann, wenn sich die Möglichkeit einer unmittelbaren praktischen Anwendung der vorgetragenen Theorie nicht voraussehen lässt. Nur hierdurch kann die Fähigkeit zur schätzungsweisen Beurtheilung verwickelter Bewegungsvorgänge gewonnen werden, wie sie in der Praxis schon heute gelegent-

lich vorkommen und bei dem Streben des heutigen Maschinenbaues nach Einführung immer höherer Umlaufsgeschwindigkeiten bei vielen Maschinengattungen in Zukunft voraussichtlich noch häufiger vorkommen werden.

Man muss also bereit sein, zum mindesten schätzungsweise die vorausgehenden Lehren auch auf andere Fälle zu übertragen. Dass man sich bei einer solchen Schätzung gelegentlich auch einmal irren kann, ist freilich kaum zu vermeiden; die Gefahr ist aber um so geringer, je genauer man sich mit dem als Ausgangspunkt gewählten einfacheren Falle vertraut gemacht hat. Als nächster Gegenstand eines solchen Abschätzungsversuchs möge das Problem des blos symmetrischen Kreisels gewählt werden, der kein Kugelkreisel mehr ist. Dieser Fall kann freilich auch streng behandelt werden, wenn man die Mühe nicht scheuen will. Aus schon mehrfach erwähnten Gründen thue ich dies aber hier nicht; ich betrachte vielmehr umgekehrt das Problem des blos symmetrischen Kreisels als ein ganz willkommenes Beispiel für die Möglichkeit der erwähnten Abschätzungen.

In erster Linie wird man sich beim symmetrischen Kreisel für die pseudoreguläre Präcession interessiren. Gegenüber dem Kugelkreisel tritt hier der erschwerende Umstand ein, dass die Richtung der Rotationsaxe $\mathfrak{u}$ und die Richtung des Dralls $\mathfrak{B}$ nicht mehr zusammenfallen. Wenn die augenblickliche Richtung von $\mathfrak{B}$ gegeben ist, findet man, wie wir aus den früheren Untersuchungen wissen, die Richtung von $\mathfrak{u}$, indem man eine senkrecht zu $\mathfrak{B}$ stehende Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid legt und nach dem Berührungspunkte vom festen Punkte aus einen Strahl zieht. Bedingung für das Zustandekommen der pseudoregulären Präcession war aber schon früher, dass $\mathfrak{u}$ nicht viel von der Figurenaxe abwich; an dieser Bedingung müssen wir daher jedenfalls auch hier festhalten. Die Figurenaxe ist aber eine Hauptträgheitsaxe und so lange $\mathfrak{u}$ nicht viel von dieser abweicht, kann auch $\mathfrak{B}$ von beiden nur wenig abweichen. Ausserdem liegen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe in einer Ebene. Wenn keine äussere Kraft wirkte, wäre die

Richtung von $\mathfrak{B}$ fest und $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe umkreisten $\mathfrak{B}$. Diese Umkreisung findet auch noch statt, wenn wir, wie im vorigen Paragraphen, während einer kleinen Zeit t eine äussere Kraft einwirken lassen, die $\mathfrak{B}$ nicht merklich zu ändern vermag, in der aber doch eine oder mehrere Umdrehungen stattfinden. Wir entnehmen daraus, dass wir die früheren Betrachtungen auch auf den vorliegenden Fall anwenden können, wenn wir nur $\mathfrak{B}$ an die Stelle von $\mathfrak{u}$ treten lassen. Jetzt ist es der Vektor $\mathfrak{B}$, der sich — von geringfügigen Schwankungen abgesehen — um die lothrechte Richtung langsam dreht und der die Richtungen der Figurenaxe und der Umdrehungsaxe in seine Nähe fesselt und sie dadurch mit herumführt. Da ausserdem sehr nahezu $B = u\Theta$ gesetzt werden kann, lässt sich demnach die Formel (123) für die Dauer eines Umlaufs auch auf diesen Fall übertragen. Unter Θ ist aber jetzt das Trägheitsmoment für die Figurenaxe zu verstehen und Gl. (124) kann daher nicht mit übernommen werden.

Erheblich einfacher als die Kreiseltheorie selbst ist übrigens eine mit dieser verwandte Betrachtung, die sich auf die Drehung eines Schwungrings aus seiner Ebene heraus bezieht und die an dieser Stelle Erwähnung finden möge. Der Ring sitze auf einer schnell rotirenden Welle und das Gestell, in dem die Welle gelagert ist, möge vergleichsweise langsam irgend eine vorgeschriebene Bewegung ausführen. Man denke etwa an einen solchen Schwungring, der auf einer Lokomotive angebracht sein mag. Wenn die Lokomotive eine Curve durchfährt, wird die Ebene des Schwungrings langsam gedreht. Die daneben stattfindende Translation ist hierbei gleichgültig und der Einfachheit halber wollen wir desshalb ganz von ihr absehen.

In Abb. 29 ist der Schwungring in seiner Anfangslage durch ausgezogene Striche angegeben. Die horizontale Welle, auf der er sitzt, möge durch eine Bewegung des Fahrzeugs genöthigt werden, in einer gewissen Zeit t in die durch punktirte Linien angegebene neue Lage einzurücken. Natürlich müssen, um diese Bewegung zu erzwingen, Kräfte von dem Fahrzeuge auf die Welle und durch deren Vermittlung auf

das Schwungrad übertragen werden. Unter Umständen können diese sehr gross werden, so dass sie bei ungenügender Festigkeit zu einer Zerstörung der Welle oder zu einem Herausschleudern der Welle aus den Lagern zu führen vermöchten; jedenfalls wird man sich daher Rechenschaft darüber zu geben haben, von welcher Art diese Kräfte sind und wie gross sie sind.

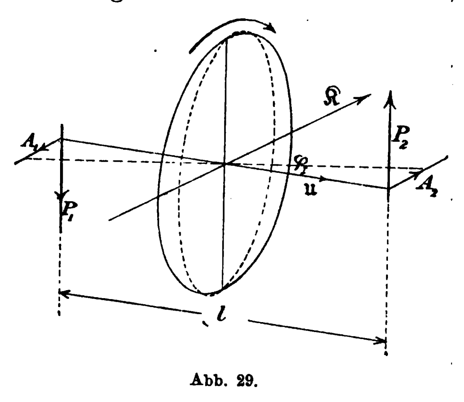


Abb. 29.

Von dem Schwungrade nehme ich an, dass es richtig ausgeglichen und genau auf die Welle aufgekeilt sei, so dass bei stillstehendem Fahrzeuge nur eine Bewegung um eine freie Axe in Frage kommt. Die Lager der Welle haben dann nur das Gewicht und etwaige sonstige Belastungen aufzunehmen, genau so, als wenn der Schwungring ebenfalls in Ruhe wäre. Diese Auflagerkräfte werden auch später noch neben den anderen, die wir suchen, weiter bestehen; sie sind aber verhältnissmässig gering und es soll desshalb weiterhin nicht ausdrücklich von ihnen die Rede sein, vielmehr soll das Schwungrad so behandelt werden, als wenn es gewichtslos (aber nicht masselos) wäre.

Um die angegebene Drehung um die lothrechte Axe auszuführen, wird man natürlich zunächst einmal ein Kräftepaar anbringen müssen, das diese Drehung auch bei dem ruhenden Schwungringe zu Stande brächte. Vorher war nämlich die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Schwungrings horizontal; um diesen in die neue Lage überzuführen, müssen wir ihn aber um die lothrechte Axe drehen, ihm also eine vertikale Winkelgeschwindigkeit ertheilen. Dies kann etwa durch das in Abb. 29 mit $A_1 A_2$ bezeichnete Kräftepaar geschehen. Wenn der Schwungring während der Drehung des Fahrzeuges nicht rotirte, wäre von den Lagern nur einfach dieses Kräftepaar

auf die Welle zu übertragen. Sobald aber der Schwungring schnell umläuft, tritt dazu ein anderes von weit grösserem Betrage. Der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entspricht nämlich ein Drall $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u}\Theta$$

und um diesen um einen Winkel φ zu drehen, muss nach dem Flächensatze ein Drehimpuls $\mathfrak{K}t$ aufgewendet werden, der nach den früher gegebenen Anleitungen leicht zu

$$Kt = \varphi u \Theta$$

berechnet werden kann. Wenn man also die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Wenden des Fahrzeuges erfolgt, mit w bezeichnet, erhält man

$$K = u\Theta w \tag{125}$$

und bei grossem u und Θ kann dies selbst für kleine Werthe von w schon sehr beträchtlich werden. Die Richtung des jetzt der Grösse nach berechneten Moments $\mathfrak{K}$ folgt ebenfalls daraus, dass $\mathfrak{B}$ durch geometrische Summirung von $\mathfrak{K}t$ in den neuen Werth übergeht. In die Abbildung ist der Pfeil von $\mathfrak{K}$ eingetragen. Dieses Moment $\mathfrak{K}$ kann von den Lagern nur in Form eines Kräftepaars übertragen werden, so dass jedes der beiden Lager eine Kraft des Paares überträgt. Auch diese mit $P_1 P_2$ bezeichneten Auflagerkräfte sind in Abb. 29 eingetragen worden; die Pfeile ergeben sich aus den früheren Festsetzungen über den Zusammenhang des Drehsinnes eines Kräftepaares mit dem Pfeile des dazu gehörigen Momentenvektors. Dass die beiden Auflagerkräfte $P_1 P_2$ wirklich von gleicher Grösse sein müssen, folgt übrigens einfach daraus, dass sich der Schwerpunkt des ganzen Systems nicht in vertikaler Richtung verschiebt. Wenn man die Länge der Welle mit l bezeichnet, hat man für jede dieser Kräfte

$$P_1 = P_2 = \frac{u\Theta w}{l}.$$

Wir sprachen bisher von den Kräften, die vom Gestelle auf die Welle und den Schwungring übertragen werden. Am Fahrzeuge selbst kommen die Reaktionen dieser Kräfte in Be-

tracht; wenn wir die Beanspruchung des Fahrzeugs durch diese Auflagerkräfte untersuchen wollen, müssen wir daher die Pfeile umkehren. Wir sehen daraus, dass das Fahrzeug am linken Lager der Welle (in der Abbildung) gehoben, am anderen niedergedrückt wird. Unter Umständen kann es dadurch vollständig umgeworfen werden.

Natürlich kann man von dieser Betrachtung auch unmittelbar Gebrauch machen, um die Abänderung in der senkrechten Componente des Raddrucks zu berechnen, die infolge der Umdrehung der Räder beim Fahren eines Eisenbahnfahrzeugs in einer Curve zu Stande kommt, denn dass hier zwei Räder auf einer Axe sitzen, während bisher nur von einem Schwungringe die Rede war, macht offenbar nichts aus. Man bezeichne den Halbmesser des Radumfangs mit r, die Fahrgeschwindigkeit des Eisenbahnzugs mit v, den Krümmungshalbmesser des Geleises mit R, so wird

$$u = \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad w = \frac{v}{R}$$

also

$$P_1 = P_2 = \frac{v^2 \Theta}{R r l}.$$

Unter Θ ist jetzt das Doppelte vom Trägheitsmomente eines einzelnen Rades zu verstehen, unter l die Spurweite. Betrachtet man zum Zwecke einer Abschätzung ein Rad nur als einfachen Reifen vom Radius r und vom Gewichte Q, so kann näherungsweise (aber sicher etwas zu gross) $\Theta = 2 \frac{Q}{g} r^2$ gesetzt werden und die vorige Gleichung geht damit über in

$$P_1 = P_2 = Q \cdot \frac{2 v^2 r}{g R l}.$$

Wenn v so gross wird, dass der als Faktor von Q auftretende Bruch gleich Eins wird, sinkt der Raddruck auf der nach innen hin gelegenen Schiene um das ganze Gewicht eines Rades. Eine allein auf dem Geleise dahin rollende, mit zwei aufgekeilten Rädern versehene Axe müsste bei Ueberschreitung der angegebenen Geschwindigkeit entgleisen.

Setzt man etwa $r = 1$ m (Lokomotivräder sind zuweilen

so hoch), $R = 200$ m (scharfe Curve, wie sie aber bei Weichen u. s. f. vorkommt) und $l = 1{,}435$ m (Normalspur der Haupteisenbahnen), so erhält man für die fragliche Geschwindigkeit

$$v = 37{,}5 \text{ m sec}^{-1}.$$

Ein Rad, das ganz besonders schnell umläuft, ist das Laufrad einer Laval'schen Dampfturbine. Man denke sich eine solche auf einem Schiffe montirt und das Schiff möge die schaukelnden Bewegungen ausführen, die bei einem heftigen Sturme eintreten können. Wenn die Welle der Laval'schen Turbine steif construirt wäre, müsste sie nach Gl. (125) ein sehr erhebliches Kräftepaar K übertragen, um das Rad aus seiner Rotationsebene abzulenken, denn hier ist nicht nur u ungewöhnlich gross, sondern auch w, die Winkelgeschwindigkeit, mit der das Schiff seine pendelnde Bewegung ausführt, ist nicht allzuklein. Um ein Zahlenbeispiel anzuführen, setze man etwa $u = 2000 \text{ sec}^{-1}$ (entsprechend etwa 19000 Touren in der Minute), $w = 0{,}2 \text{ sec}^{-1}$, das Gewicht des Laufrads gleich 100 kg und den Trägheitsradius gleich 0,2 m. Dann wird nach Gl. (125)

$$K = 163 \text{ mkg}.$$

Das Kräftepaar wirkt verbiegend auf die Welle. Die Welle ist aber so dünn construirt, dass sie sich schon bei kleinen Biegungsmomenten ziemlich stark verbiegt. Desshalb folgt die Rotationsebene des Rades nur zum Theile den Schwingungen des Schiffskörpers. Wenn die Welle ganz biegsam wäre, würde sich die Rotationsebene des Rades überhaupt nicht verrücken; sie würde im Raume feststehen und die durch die Schwingungen des Schiffes hervorgerufenen relativen Bewegungen würden in den Verbiegungen der Welle allein zum Ausdrucke kommen. Auch über die der pseudoregulären Präcession des Kreisels verwandten Bewegungserscheinungen, die das Laufrad zeigt, wenn der Schiffskörper etwa einfache Sinusschwingungen ausführt, vermag man sich leicht ungefähre Rechenschaft zu geben, falls man aus hinreichenden Angaben über die Stärke der Welle, den Elasticitätsmodul und die Entfernungen des

Rades von den Lagern die elastische Verbiegung der Welle für ein Biegungsmoment $K = 1$ mkg nach den Sätzen der Festigkeitslehre zuvor berechnet hat.

Bei dem eben besprochenen Beispiele konnte die Masse des Laufrades als so gering gegenüber dem schwingenden Schiffskörper angesehen werden, dass man auf die Rückwirkung, die es auf diesen ausübt, nicht zu achten brauchte. Unter anderen Umständen kann dies aber nöthig werden; man muss sich dann erinnern, dass das von dem rotirenden Rade auf das Fahrzeug ausgeübte Kräftepaar dieses nicht im Sinne der Hauptdrehung, die es ausführt, sondern um eine rechtwinklig dazu stehende Axe zu drehen sucht. Es wird nicht nöthig sein, dies noch weiter auszuführen, da schon bei dem Beispiele des Schwungrings auf der Lokomotive darauf eingegangen würde.

Ein ferneres Beispiel für Betrachtungen dieser Art bildet der Bumerang. Auf dessen Beschreibung selbst will ich hier zwar nicht eingehen, sondern ihn durch ein einfacheres Beispiel ersetzen, bei dem der Bewegungsvorgang im Wesentlichen der gleiche ist, Man denke sich eine Scheibe (den Diskus der Alten) fortgeworfen, indem man ihr zugleich eine schnelle Drehung um die auf der Scheibenebene senkrechte Figurenaxe ertheilt. Wenn der Wurf durch den luftleeren Raum erfolgte, würde der Schwerpunkt der Scheibe einfach eine Parabel beschreiben und die Rotationsaxe, die eine freie Axe ist, behielte unverändert ihre Richtung im Raume; die Scheibenebene würde also stets der Anfangslage parallel bleiben. Im lufterfüllten Raume kann aber die Bewegung nicht in dieser Weise erfolgen. Der Luftwiderstand wird sehr gross, sobald die Scheibenebene nicht mehr parallel zur Bewegungsrichtung ist. Wie sich der Luftwiderstand im vorliegenden Falle im Einzelnen vertheilt, ist freilich schwer zu sagen; wir wollen es aber, um nicht in eine Erörterung darüber eintreten zu müssen, als ausgemacht ansehen, dass er sich jedenfalls in solcher Weise geltend macht, dass ein merkliches Heraustreten der Scheibenebene aus der Bewegungsrichtung durch ihn ver-

hütet wird. Ausserdem wird eine merkliche Aenderung des Dralls $\mathfrak{B}$ der sehr schnell rotirenden Scheibe so bald nicht zu erwarten sein. Dann kann sich die Scheibe nahezu nur innerhalb der Ebene bewegen, die durch die Anfangslage der Scheibe gegeben ist. Der Bewegungsvorgang ist demnach ungefähr derselbe, als wenn die unterhalb an die Scheibenfläche angrenzende Luft sich wie eine starre schiefe Ebene verhielte, die sich jeder Bewegung rechtwinklig zu ihr widersetzte. An Stelle der in einer lothrechten Ebene liegenden gewöhnlichen Wurfparabel muss jetzt der Schwerpunkt der Scheibe eine in der ursprünglichen Scheibenebene liegende Bahn beschreiben. Wenn er sich anfänglich senkrecht zur Horizontalspur der Scheibenebene nach oben hin bewegte, wird er sich in dieser schief nach aufwärts gehenden geraden Linie bis zu einem höchsten Punkte hin bewegen und nachdem er diesen erreicht hat, dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung zurück durchlaufen und so zum Ausgangspunkte zurückkehren. Wirft man die Scheibe in horizontaler Richtung, so wird sie nahezu in gerader horizontaler Richtung weiterfliegen und wenn die vorausgehenden Betrachtungen streng anwendbar wären, müsste sie, allen Fallgesetzen zum Trotze, beliebig weit fortfliegen können, ohne zu sinken. Das ist natürlich nicht genau richtig; man wird sich aber erinnern, dass geschickte Taschenspieler in ihren Vorstellungen gelegentlich Spielkarten mit grosser Kunstfertigkeit so hinausschleudern, dass sie in der That weite Strecken durcheilen, ohne in gewohnter Weise aus der Wurfrichtung abgelenkt zu werden und das, was ich vorher auseinandersetzte, giebt wenigstens eine ungefähre Erklärung des Vorganges, der dem beim Werfen des Bumerangs gleicht.

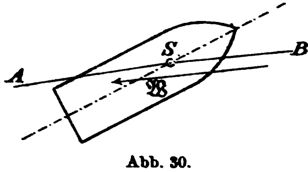


Abb. 30.

Auch die bekannte seitliche Ablenkung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen Wurfgeschosse gehört hierher. Der Luftwiderstand spielt hier nur eine andere Rolle. Wir wollen uns davon summarisch in folgender Weise Rechenschaft geben. In Abb. 30 sei AB ein Theil der Bahn

des Schwerpunktes S. Wenn kein Luftwiderstand wirkte, hätte die Rotationsaxe ihre ursprüngliche Richtung beibehalten und die Granate würde etwa die in Abb. 30 gezeichnete Stellung einnehmen. Der Luftwiderstand, dem sie in dieser Lage begegnet, sei etwa durch $\mathfrak{W}$ angegeben. Es kommt dann wesentlich darauf an, wie der Schwerpunkt S gegen die Richtungslinie von $\mathfrak{W}$ liegt. Liegt er oberhalb, wie in der Figur, so gehört zu $\mathfrak{W}$ ein statisches Moment $\mathfrak{K}$, das eine Drehung der Granate in die Richtung der Flugbahn herbeizuführen sucht. Diese Drehung setzt sich aber mit jener zusammen, die die Granate schon um ihre Längsaxe ausführte. Der Erfolg wird, wie in den früheren analogen Fällen, zunächst darin bestehen, dass sich $\mathfrak{B}$ und mit ihm $\mathfrak{u}$ und die Figurenaxe aus der Ebene der Flugbahn etwas herausdrehen. Auch der Sinn dieser Ablenkung ist leicht festzustellen. Wenn das Geschütz mit Linksdrall versehen ist, haben wir $\mathfrak{u}$ vom Schwerpunkte aus nach oben hin abzutragen und $\mathfrak{B}$ ist mit ihm gleichgerichtet. Das Moment von $\mathfrak{W}$ dreht in der Abbildung im Sinne des Uhrzeigers und der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ geht daher vom Zeichenblatte aus nach dem Beschauer hin. Vereinigen wir nun $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}t$, so erhalten wir eine Richtung, die nach vorn hin (d. h. nach dem Beschauer hin) etwas geneigt ist. Das vordere Ende der Granate zeigt daher auch nach dieser Richtung. Sobald das Geschoss im Grundrisse ein wenig schräg gestellt ist, erfährt es auf der vorausgehenden Seite einen grösseren Luftwiderstand, als auf der ein wenig nach hinten zu gedrehten. Es wird dadurch seitlich abgelenkt und zwar vom Geschütz aus gesehen nach rechts hin (bei Rechtsdrall nach links hin). Gerade die nun im Grundrisse etwas excentrische Angriffslinie des Winddrucks bringt dann ein statisches Moment hervor, das die Geschossaxe in die Richtung der Flugbahn dreht. — Natürlich soll diese Betrachtung nur eine ungefähre Vorstellung geben; im Einzelnen sind die pendelnden Bewegungen des Geschosses sehr verwickelt. Ausserdem ist auch darauf zu achten, dass die Seitenablenkung nach der entgegengesetzten Seite hin erfolgt, wenn der Schwerpunkt S in Abb. 30 unter-

halb von $\mathfrak{W}$ liegt. Bei den gewöhnlich verwendeten Geschossformen scheint dies übrigens in der Regel der Fall zu sein.

Eng verwandt mit der Kreiselbewegung ist auch die Bewegung des rollenden Rades, die in unserer Zeit des Fahrradsports von allgemeinerem Interesse ist. Eine brauchbare Theorie des zweiräderigen Fahrrads ist, soweit mir bekannt ist, bisher nicht aufgestellt worden. Jedenfalls wird es auch, wenn sie einmal gegeben sein wird, immer noch viel leichter sein, das Radfahren praktisch zu erlernen, als die Theorie dieser Bewegung zu studiren. — Hier beschränke ich mich auf die Besprechung des einfachsten Falles der Bewegung eines einzelnen Rades unter dem Einflusse seines Gewichtes auf einer horizontalen Ebene.

Den Umfang des Radreifs denke ich mir etwas gewölbt, so dass das Rad — abgesehen von der elastischen Abplattung, die dabei entsteht — den Boden immer in einem Punkte berührt. Der Punkt, mit dem es im gegebenen Augenblicke auf dem Boden aufsitzt, möge als der Auflagerpunkt bezeichnet werden. Damit das Rad rollt, ohne zu gleiten, muss der Auflagerpunkt in augenblicklicher Ruhe sein, d. h. die Bewegung des Rades aus einer Lage in die folgende kann immer nur in einer Drehung um eine durch den Auflagerpunkt gezogene Axe bestehen. Die Richtung dieser Axe kann beliebig sein. In Abb. 31, die das Rad in irgend einer seiner Stellungen angiebt, ist die Richtung der Drehaxe und die Grösse der Winkelgeschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{u}$ angegeben. Geschwindigkeiten kann man zerlegen wie Kräfte. Man thut hier am besten daran, $\mathfrak{u}$ nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen zu zerlegen, die in Abb. 31 durch die Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$ kenntlich gemacht sind. Die $\mathfrak{i}$-Richtung steht senkrecht

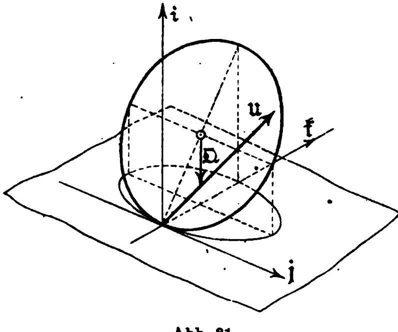


Abb. 31.

zum Fussboden, die $\mathfrak{j}$-Richtung fällt mit der Horizontalspur der Radebene zusammen und die $\mathfrak{k}$-Richtung ist schon durch die beiden vorigen mit bestimmt.

Die augenblickliche Bewegung des Rades kann man sich stets aus einem Zusammenwirken von Drehungen um die genannten Hauptrichtungen bestehend denken. Es wird daher nützlich sein, wenn man zunächst nur die Drehungen um jede der drei Hauptrichtungen für sich betrachtet. Zunächst möge das Rad nur eine Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe besitzen. Der Auflagerpunkt bleibt dann dauernd an seiner Stelle und das Rad kann einfach als ein Kreisel aufgefasst werden, der eine Präcessionsbewegung ausführt. Das Rad bildet freilich keinen Kugelkreisel und nicht einmal einen „symmetrischen“ Kreisel und daher können die in § 23 für die reguläre Präcession abgeleiteten Formeln hier nicht übernommen werden Man muss vielmehr beachten, dass die Richtung von $\mathfrak{B}$ recht erheblich von der Richtung der Drehaxe abweichen wird. Im anderen Falle wäre auch eine dauernde Rotation um die $\mathfrak{i}$-Axe überhaupt ausgeschlossen, denn wir wissen schon, dass $\mathfrak{B}$ unter dem Einflusse des Gewichtes und des ihm zugehörigen statischen Moments eine Kegelfläche beschreiben muss. In der That kann aber nun eine reguläre Präcession stattfinden, und zwar so, dass jedem Neigungswinkel der Radebene gegen den Fussboden eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Axe entspricht, die zu einer regulären Präcession führt. Ich erinnere nur an das bekannte Experiment, bei dem man einen Thaler auf einem Tische in dieser Weise rotiren lässt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit abnimmt, neigt sich der Thaler immer mehr. Auch rechnerisch lässt sich der Zusammenhang zwischen Neigungswinkel und Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{i}$-Axe leicht verfolgen; ich sehe aber hier davon ab.

Drehungen um die $\mathfrak{j}$-Axe sind als Pendelbewegungen aufzufassen; volle Pendelschwingungen können hier freilich nicht zu Stande kommen, die Bewegung endet vielmehr mit dem Umfallen des Rades auf den Fussboden. Ueberdies ist auch zu beachten, dass schon vor dem vollständigen Umfallen ein

Gleiten des Rades auf dem Boden zu erwarten ist. Auch darüber kann man sich ohne Schwierigkeit Rechenschaft geben; am einfachsten wendet man dazu das d'Alembert'sche Princip an. Man betrachtet das fallende Rad in irgend einer seiner Stellungen, führt die Trägheitskräfte ein und ermittelt nach der Lehre vom Gleichgewichte eines starren Körpers den im Auflagerpunkte übertragenen Druck. Solange die Richtung des Auflagerdrucks noch innerhalb des Reibungskegels liegt, tritt kein Abgleiten ein; die Bewegung setzt sich vielmehr einstweilen noch so wie eine Pendelschwingung fort. Gegen das Ende der Bewegung hin wird man aber die Bedingung nicht mehr erfüllt finden und dann gleitet der Auflagerpunkt über den Fussboden.

Die beiden bis jetzt betrachteten Drehungen führen überhaupt nicht zu einem Rollen des Rades; dieses wird nur durch die Drehung um die $\mathfrak{k}$-Axe bewirkt. Freilich kann von einer dauernden Drehung um eine fest liegende $\mathfrak{k}$-Axe hier nicht die Rede sein; die Drehung führt sofort zu einem Wechsel des Auflagerpunktes und die $\mathfrak{k}$-Axe kann daher nur als Momentanaxe in Betracht kommen. Wir können uns aber eine Bewegung vorstellen, bei der in jeder neuen Lage des Rades die nach der gegebenen Vorschrift stets von Neuem construirte Richtung der $\mathfrak{k}$-Axe die augenblickliche Drehungsaxe angiebt. Eine solche Bewegung mag als eine rein rollende bezeichnet werden; im Gegensatze zu ihr kann die Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe als eine Wendung und die Drehung um die $\mathfrak{j}$-Axe als eine Fallbewegung des Rades bezeichnet werden, wobei im letzten Falle nicht ausgeschlossen ist, dass sie im gegebenen Augenblicke auch nach oben hin erfolgt.

Im allgemeinen Falle bestehen alle drei Bewegungscomponenten zugleich und sie beeinflussen sich gegenseitig. Ein besonderes Interesse kann aber die rein rollende Bewegung, die sich leicht theoretisch behandeln lässt, immerhin beanspruchen. Um sie zu untersuchen, denke man sich eine Senkrechte zur Radebene vom Radmittelpunkte aus gezogen. Sie trifft den Fussboden auf der $\mathfrak{k}$-Axe. Vom Schnittpunkte aus

als Spitze denke man sich einen Kegel konstruirt, dessen Grundlinie der Radumfang ist und der mit dem Rade fest verbunden sein mag. Dann muss die Kegelspitze während der rollenden Bewegung des Rades dauernd in Ruhe bleiben, da sie in jedem Augenblicke auf der $\mathfrak{t}$-Axe, also auf der Momentanaxe enthalten ist. Wir können daher die Bewegung geradezu durch das Rollen des Kegels auf der Bodenfläche beschreiben, d. h. der Kegel bildet in Anlehnung an die früher eingeführten Bezeichnungen den Polodiekegel für die Bewegung um die als festen Punkt anzusehende Kegelspitze. Der Herpolodiekegel ist hier in eine ebene Fläche, nämlich in die Oberfläche des Bodens ausgeartet.

Von äusseren Kräften wirken auf das Rad das Gewicht und der Auflagerdruck. Die senkrechte Componente des Auflagerdrucks muss dem Gewichte gleich sein, da der Schwerpunkt des Rades Geschwindigkeitscomponenten in senkrechter Richtung weder besitzt noch erlangt. Daneben muss freilich zugleich eine Horizontalcomponente des Auflagerdrucks auftreten, die die Centripetalkraft für die vom Schwerpunkte ausgeführte kreisförmige Bewegung abgiebt. Die Horizontalcomponente geht hiernach in jedem Augenblicke durch die Kegelspitze und wenn wir den Flächensatz für die Kegelspitze als Momentenpunkt anwenden ist ihr Moment stets gleich Null.

Man sieht jetzt leicht, wie die Rechnung durchzuführen ist. Wenn das Rad im Anfangszustande gegeben ist, kennt man sofort die Kegelspitze, die von ihm bei der rein rollenden Bewegung umkreist wird. Man konstruire nun das Trägheitsellipsoid für die Kegelspitze als festen Punkt. Mit dessen Hülfe findet man in schon oft benutzter Weise die Richtung des Dralls $\mathfrak{B}$, bezogen auf den festen Punkt. Das Moment $\mathfrak{K}$ der äusseren Kräfte ist ebenfalls bekannt; es ist das statische Moment des aus dem Gewichte und der senkrechten Componente des Auflagerdrucks bestehenden Kräftepaars. Beim Weiterrollen des Rades dreht sich mit ihm sowohl $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{K}$, die stets rechtwinklig zu einander bleiben. Die Grösse von $\mathfrak{K}$ ist nur von der Neigung der Radebene gegen den Fussboden,

die absolute Grösse von $\mathfrak{B}$ aber zugleich von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig. Wie gross aber diese Anfangsgeschwindigkeit sein muss, damit bei der gegebenen Neigung des Rades eine rein rollende Bewegung zu Stande kommen kann, folgt aus der Gleichung des Flächensatzes

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{R}.$$

Auf die wirkliche Durchführung der Rechnung, die nach dem angegebenen Plane leicht erfolgen kann, gehe ich nicht ein. Dagegen mache ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass die rein rollende Bewegung nur bei einer ganz bestimmten Beziehung zwischen der Schiefstellung des Rades gegen die Vertikale und der Geschwindigkeit der Rollbewegung möglich ist. Wenn das Rad im Anfangszustande eine rein rollende Bewegung hatte und die genannte Bedingung nicht erfüllt war, kann sie sich nicht in dieser Weise fortsetzen; es tritt vielmehr alsbald noch eine „Fallbewegung“ (nach unten oder auch nach oben hin) dazu. Dadurch wird die Neigung der Radebene gegen den Fussboden geändert und zwar in solchem Sinne, dass eine Annäherung an jene Radstellung stattfindet, für die bei der gegebenen Fahrgeschwindigkeit die Bedingung des reinen Rollens erfüllt ist.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass man zu einer allgemeineren Theorie der Radbewegung dadurch gelangen kann, dass man zwar immer noch die „Wendebewegung“ um die $\mathfrak{i}$-Axe ausschliesst, dagegen das Auftreten von Drehungen um die $\mathfrak{j}$- und die $\mathfrak{k}$-Axe zugleich zulässt. Diese würde sich dem allgemeinen Verhalten des Rades beim Rollen ziemlich genau anschliessen, da die als Wendebewegung bezeichnete Drehung um die $\mathfrak{i}$-Axe auf eine „bohrende“ Reibung stösst und daher, wenn sie nicht schon anfänglich mit hinreichender Winkelgeschwindigkeit gegeben, also absichtlich herbeigeführt war, späterhin schnell erlischt und auch nicht von selbst wieder entstehen kann.

Sehr eng verwandt mit der vorigen ist auch die Bewegung einer Kugel auf einer rauhen horizontalen Ebene

(Billardball) bei beliebigen Anfangsbedingungen. Man hat diese Fälle schon ausführlich behandelt, ich gehe aber aus vielen gewichtigen Gründen nicht darauf ein, wovon ich auch den einen — aber nicht den ausschlaggebenden, da er sich bald beseitigen liesse — ganz offen eingestehen will, nämlich den, dass ich mich selbst mit diesem Probleme noch nicht eingehender beschäftigt habe.

§ 25a. Stösse am starren Körper.

Auf einen völlig freien starren Körper, der vorher in Ruhe war, möge ein Stoss einwirken, d. h. es soll während einer sehr kurzen Zeit an irgend einem Angriffspunkte eine Kraft $\mathfrak{P}$ angreifen, derart dass das Zeitintegral der Kraft $\int \mathfrak{P} dt$ über die ganze Stosszeit erstreckt von gegebener Richtung und Grösse ist. Ausser $\mathfrak{P}$ sollen während des Stossvorgangs keine äusseren Kräfte an dem Körper angreifen. Es handelt sich zunächst darum, die Bewegung anzugeben, die der Körper durch den Stoss erlangt.

Hierbei ist daran zu erinnern, dass das Bild des starren Körpers keineswegs ausreicht, um alle Fragen zu beantworten, die sich auf den Stoss beziehen. Je kleiner wir uns die Stosszeit vorstellen, desto grösser muss während ihr der durchschnittliche Werth des Stossdruckes $\mathfrak{P}$ angenommen werden, damit der Antrieb $\int \mathfrak{P} dt$ die vorgeschriebene Grösse erlange. Allzugross darf aber $\mathfrak{P}$ nicht werden, ohne Formänderungen von merklicher Grösse oder einen Bruch des Körpers herbeizuführen. Im ersten Bande wurde dies schon ausführlich besprochen. Hier soll aber einstweilen vorausgesetzt werden, dass die Stosszeit, wenn auch klein, so doch nicht so kurz bemessen sei, dass es nöthig würde, auf die durch den Stoss bewirkten Formänderungen einzugehen. Unter dieser ausdrücklichen Voraussetzung können wir an dem Bilde des starren Körpers bei der Lösung der aufgeworfenen Frage festhalten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, die der Schwerpunkt S des gestossenen Körpers erlangt, lässt sich nach dem Satze von der

Bewegung des Schwerpunkts sofort angeben. Wenn die Masse des Körpers mit M bezeichnet wird, ist in jedem Augenblicke während des Stosses

$$M \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \mathfrak{P}$$

und durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{\int \mathfrak{P}\,dt}{M} = \frac{\mathfrak{A}}{M}, \tag{125a}$$

wenn für den Antrieb $\int \mathfrak{P}\,dt$ des Stosses ausserdem noch zur Abkürzung der Buchstabe $\mathfrak{A}$ gebraucht wird.

Zur Schwerpunktsbewegung $\mathfrak{v}_0$ tritt noch eine Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, deren Winkelgeschwindigkeit nach Richtung und Grösse mit $\mathfrak{u}$ bezeichnet werden soll. Wir finden sie, indem wir zunächst den auf den Schwerpunkt bezogenen Drall $\mathfrak{B}$ des rotirenden Körpers berechnen. Nach dem Flächensatze ist in jedem Augenblicke

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{p},$$

wenn $\mathfrak{p}$ den vom Schwerpunkte nach dem Angriffspunkte des Stosses gezogenen Radiusvektor bedeutet. Durch Integration nach der Zeit folgt daraus

$$\mathfrak{B} = \mathrm{V}\int \mathfrak{P}\,dt \cdot \mathfrak{p} = \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{p}. \tag{125b}$$

Um von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{u}$ überzugehen, zerlegen wir $\mathfrak{B}$ in seine drei rechtwinkligen Componenten $B_1 B_2 B_3$ nach den Richtungen der drei Hauptträgheitsaxen des starren Körpers. Werden in diesen Richtungen drei Einheitsvektoren oder Richtungsfaktoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ angegeben, so ist nach Gl. (97) S. 162

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{B_3}{\Theta_3}.$$

Die Componenten von $\mathfrak{B}$ finden sich durch Entwickelung des äusseren Produkts $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ zu

$$B_1 = A_2 p_3 - A_3 p_2, \quad B_2 = A_3 p_1 - A_1 p_3, \quad B_3 = A_1 p_2 - A_2 p_1$$

und wenn man diese einsetzt, erhält man

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\,\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\,\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\,\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3}. \qquad (125\text{c})$$

Nachdem $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ berechnet sind, kennt man die durch den Stoss hervorgerufene Bewegung bereits vollständig. Um auch noch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zu berechnen, die ein beliebiger Punkt des starren Körpers erlangt hat, ziehen wir nach diesem Punkte vom Schwerpunkte aus einen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und setzen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{r}\mathfrak{u}.$$

Durch Entwickelung des äusseren Produkts und Einsetzen der für $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ gefundenen Werthe geht dies über in

$$\begin{aligned}\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\left(\frac{A_1}{M} + r_2\,\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - r_3\,\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2}\right)\\ + \mathfrak{j}\left(\frac{A_2}{M} + r_3\,\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - r_1\,\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3}\right)\\ + \mathfrak{k}\left(\frac{A_3}{M} + r_1\,\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - r_2\,\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1}\right). \qquad (125\text{d})\end{aligned}$$

Hiermit sind wir auch in den Stand gesetzt, den **Satz von der Gegenseitigkeit der Stossgeschwindigkeiten** zu beweisen. Man denke sich nämlich am starren Körper zwei Punkte, die jetzt mit I und II bezeichnet werden mögen, beliebig ausgewählt und ausserdem an jedem von ihnen eine beliebig gewählte Richtung α und β angegeben, ganz so wie es bei dem Maxwell'schen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen in der Festigkeitslehre geschieht. **Dann lässt sich behaupten, dass ein Stoss am Punkte I in der Richtung α dem Punkte II eine Geschwindigkeit verleiht, deren Componente in der Richtung β ebenso gross ist, als die Geschwindigkeitscomponente in der Richtung α, die ein Stoss am Punkte II von gleich grossem Antriebe am Punkte I hervorbringt.**

Zum Beweise der Behauptung beachte man, dass der für $\mathfrak{v}$ aufgestellte Ausdruck sofort auch zur Berechnung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ benutzt werden kann, die der Punkt vom Radiusvektor $\mathfrak{p}$ erlangt, wenn ein Stoss von irgend einem Impulse $\mathfrak{J}$ am Punkte vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ angebracht wird.

Man braucht nur die Bezeichnungen entsprechend zu vertauschen und erhält dann

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{i}\left(\frac{J_1}{M} + p_2\frac{J_1 r_2 - J_2 r_1}{\Theta_3} - p_3\frac{J_3 r_1 - J_1 r_3}{\Theta_2}\right)$$
$$+ \mathfrak{j}\left(\frac{J_2}{M} + p_3\frac{J_2 r_3 - J_3 r_2}{\Theta_1} - p_1\frac{J_1 r_2 - J_2 r_1}{\Theta_3}\right)$$
$$+ \mathfrak{k}\left(\frac{J_3}{M} + p_1\frac{J_3 r_1 - J_1 r_3}{\Theta_2} - p_2\frac{J_2 r_3 - J_3 r_2}{\Theta_1}\right).$$

Um auf die Componenten von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in den Richtungen von $\mathfrak{J}$ und von $\mathfrak{A}$ zu kommen, bilden wir die inneren Produkte $\mathfrak{v}\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{v}'\mathfrak{A}$ und subtrahiren sie des Vergleiches wegen von einander. Dabei beachte man, dass z. B.

$$\mathfrak{v}\mathfrak{J} = J_1\left(\frac{A_1}{M} + r_2\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - r_3\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2}\right)$$
$$+ J_2\left(\frac{A_2}{M} + \cdots\right) + \cdots$$

zu setzen ist. Nachdem auch $\mathfrak{v}'\mathfrak{A}$ in derselben Weise entwickelt ist, heben sich beim Subtrahiren alle Glieder gegen einander fort und man erhält daher

$$\mathfrak{v}\mathfrak{J} = \mathfrak{v}'\mathfrak{A}. \tag{125e}$$

Da aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ nach Voraussetzung den gleichen absoluten Werth haben sollten, folgt hieraus, dass auch die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die Richtung von $\mathfrak{J}$ ebenso gross sein muss, wie die Projektion von $\mathfrak{v}'$ auf die Richtung von $\mathfrak{A}$, womit der Satz bewiesen ist. — Ein anderer Beweis des Satzes, der sich dem in der Festigkeitslehre gegebenen Beweise des ihm ähnlichen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen auch der Form nach aufs Engste anschliesst, ergiebt sich aus dem Zusammenhange zwischen der vom Stossdrucke geleisteten Arbeit und der lebendigen Kraft, die der Körper durch den Stoss erlangt.

Zwar folgt schon ohne Weiteres aus dem Satze von der lebendigen Kraft, dass die Arbeit des Stossdruckes gleich der von ihr hervorgebrachten lebendigen Kraft sein muss. Wegen des Verlustes an lebendiger Kraft, der in manchen Fällen des Stosses eintritt, ist es aber der Vorsicht wegen, um sich

nämlich vor naheliegenden irrigen Schlüssen zu schützen, rathsam, sich auch noch unmittelbar davon zu überzeugen, dass der Satz von der lebendigen Kraft in unserem Falle ebenfalls zu Recht besteht. Um diesen Nachweis zu führen, wende man den in Gl. (125d) für $\mathfrak{v}$ aufgestellten Ausdruck zur Berechnung der Geschwindigkeit an, die der Angriffspunkt des Stosses selbst erlangt hat. Dazu ist nur nöthig, die Componenten $r_1\, r_2\, r_3$ des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ durch die Componenten $p_1\, p_2\, p_3$ von $\mathfrak{p}$ zu ersetzen. Nebenbei bemerkt, ergiebt sich daraus zugleich, dass sich der Angriffspunkt des Stosses im Allgemeinen keineswegs in der Stossrichtung selbst, sondern in einer davon abweichenden Richtung bewegt.

Wir wollen ferner ein Zeitelement dt auswählen, das in die Stosszeit hineinfällt. Bis zum Beginne dieses Zeitelements hat der Angriffspunkt des Stosses noch nicht seine volle Geschwindigkeit erlangt. Wir können aber die zu dieser Zeit bereits bestehende Geschwindigkeit ebenfalls nach der früheren Formel berechnen, wenn wir darin jetzt unter $A_1\, A_2\, A_3$ die Componenten jenes Theiles des ganzen Antriebs $\int \mathfrak{P}\, dt$ verstehen, der zeitlich vor dt liegt. Der Weg $d\mathfrak{s}$ des Angriffspunktes während dt ergiebt sich dann zu

$$d\mathfrak{s} = dt \left\{ \mathfrak{i} \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + \mathfrak{j} (\cdots) + \mathfrak{k} (\cdots) \right\}$$

und die Arbeit des Stossdruckes $\mathfrak{P}$ während dt wird gleich

$$dt \left\{ P_1 \left(\frac{A_1}{M} + p_2 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - p_3 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} \right) + P_2 \left(\frac{A_2}{M} + p_3 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - p_1 \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right) + P_3 \left(\frac{A_3}{M} + p_1 \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - p_2 \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} \right) \right\}.$$

Andererseits wollen wir berechnen, um wie viel sich die lebendige Kraft des gestossenen Körpers während dt vermehrt. Beziehen sich auch hier $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ auf den Anfang des Zeitelementes dt, so ist die zugehörige lebendige Kraft L (vgl. Gl. (97a), S. 162)

$$L = \frac{1}{2} M \mathfrak{v}_0^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 u_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 u_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_3 u_3^2$$

oder, wenn man die früher berechneten Componenten von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ einsetzt,

$$L = \frac{1}{2} \frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{(A_2 p_3 - A_3 p_2)^2}{\Theta_1} + \frac{1}{2} \frac{(A_3 p_1 - A_1 p_3)^2}{\Theta_2} + \frac{1}{2} \frac{(A_1 p_2 - A_2 p_1)^2}{\Theta_3}.$$

In diesem Ausdrucke sind nur die Componenten von $\mathfrak{A}$ mit der Zeit veränderlich und zwar so, dass

$$\frac{dA_1}{dt} = P_1, \quad \frac{dA_2}{dt} = P_2, \quad \frac{dA_3}{dt} = P_3$$

ist. Für den Zuwachs dL von L während dt findet man daher

$$dL = dt \left\{ \frac{A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3}{M} + (P_2 p_3 - P_3 p_2) \frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} + (P_3 p_1 - P_1 p_3) \frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} + (P_1 p_2 - P_2 p_1) \frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} \right\}.$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem vorher für die Arbeit des Stossdruckes aufgestellten — abgesehen von der etwas abweichenden Anordnung der einzelnen Glieder — genau überein und die Anwendbarkeit des Satzes von der lebendigen Kraft ist hiermit auch unmittelbar bewiesen.

Ehe ich weiter gehe, möchte ich hier noch darauf aufmerksam machen, dass die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft in der gewöhnlichen Form wesentlich von der an die Spitze dieser Betrachtungen gestellten Voraussetzung abhängt, dass die Gestaltänderung des Körpers während des Stossvorgangs vernachlässigt werden dürfe. Erfährt der Körper Formänderungen, die selbst nur in der Nachbarschaft des Stossangriffspunktes von merklicher Grösse zu sein brauchen, so hört die Gültigkeit der vorhergehenden Entwickelungen auf. Der Angriffspunkt legt nämlich, wenn das Material des Körpers etwas nachgiebig ist, wegen der Zusammendrückung an der Kraftübertragungsstelle einen etwas grösseren Weg zurück, als vorher berechnet wurde und damit wird auch die Arbeit des Stossdruckes grösser als vorher und hiermit zugleich auch grösser als die lebendige Kraft, die durch den Stoss her-

vorgebracht wird. Der Grund für diese Abweichung vom Satze von der lebendigen Kraft in der üblichen Form liegt darin, dass nun auch die inneren Kräfte Arbeit leisten. Der Ueberschuss der Arbeit des Stossdrucks über die hervorgebrachte lebendige Kraft wird zur Ueberwindung der inneren Kräfte verwendet und falls der Körper vollkommen elastisch sein sollte, in Gestalt von Formänderungsarbeit aufgespeichert.

In je kürzerer Zeit sich ein Stoss von gegebenem Antriebe abspielt, um so mehr tritt der Einfluss der Formänderung hervor und zwar aus doppeltem Grunde. Zunächst muss nämlich der Stossdruck um so grösser sein, je kürzer die Stosszeit ist, damit der Impuls den vorgeschriebenen Werth behalte. Der grösseren Kraft entspricht aber eine grössere Formänderung. Dazu kommt ferner noch, dass zugleich der Weg, den der Angriffspunkt des Stosses, abgesehen von der Formänderung, während der Stossdauer zurücklegt, in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Stosszeit selbst. Aus beiden Gründen wächst daher der aus der Formänderung hervorgehende Antheil des ganzen Weges, auf dem die Arbeit des Stossdrucks geleistet wird, gegenüber dem Antheile, der von der Bewegung des als starr aufgefassten gesammten Körpers herrührt, wenn die Stossdauer kürzer wird. Man erkennt hieraus, in welche Widersprüche und Fehler man gerathen kann, wenn man, wie es immer noch oft genug geschieht, eine Lehre vom Stosse starrer Körper bis in ihre letzten Folgerungen hinein durchführen will, ohne auf die Unzulänglichkeit des gebrauchten Bildes zu achten, sobald die Stossdauer zu kurz wird.

Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, mögen die vorhergehenden Schlüsse auf den Fall angewendet werden, dass zwei freie Körper auf einander stossen. Dabei soll für den Augenblick auf die — von mir freilich keineswegs getheilte — Vorstellung eingegangen werden, dass es ein zulässiges Problem der Mechanik sei, den Stoss von Körpern zu untersuchen, die in Gedanken ohne fernere Bedingungen nur als absolut starr betrachtet werden könnten. Der Schluss

liegt dann nahe, die Arbeit der inneren Kräfte wegen des Fehlens jeder Formänderung gleich Null zu setzen und daraus zu folgern, dass die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper durch den Stoss keine Aenderung erfahre, während man doch im Gegentheile gewöhnlich einen Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse starrer Körper herausrechnet. Der Widerspruch klärt sich einfach dadurch auf, dass der auf die Formänderung verwendete Antheil der Arbeit des Stossdruckes, sobald man den Grenzübergang zum starren Körper vollzieht, in der Form $\infty \cdot 0$ auftritt. Dies ist, solange keine weitere Bedingung hinzutritt, ein unbestimmter Ausdruck, der je nach der Art, wie man sich den Grenzübergang vollzogen denkt, verschiedene Werthe annimmt. Der Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse starrer Körper kann daher ohne Zuhülfenahme bestimmter willkürlicher Voraussetzungen durch kein allgemein bewährtes Grundgesetz der Mechanik berechnet werden.

Nach diesen Abschweifungen kehre ich zum Satze von der Gegenseitigkeit der Stossgeschwindigkeiten zurück. Man denke sich an den Punkten I und II in den Richtungen α und β, von denen früher die Rede war, nach einander zwei Stösse von den Impulsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angebracht. Dabei ist es, wenn nur beide Stösse so schnell aufeinanderfolgen, dass sich der Körper in der Zwischenzeit nicht merklich aus der anfänglichen Lage verschoben hat, nach dem Gesetze von der Superposition der Bewegungen gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Stösse ausgeübt werden. Bei jeder Reihenfolge der Stösse erlangt der Körper dieselbe lebendige Kraft und daher muss auch die Summe der Arbeiten beider Stossdrücke denselben Werth annehmen. Diese Arbeiten lassen sich aber sofort berechnen. Dazu möge die Geschwindigkeit von Punkt I in jedem Falle mit $\mathfrak{v}_I$ und zwar jene, die durch den Impuls $\mathfrak{A}$ am Punkte I hervorgebracht wird, speciell mit $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{A}}$, jene, die vom Impuls $\mathfrak{B}$ erzeugt wird, mit $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{B}}$ bezeichnet werden und in demselben Sinne sollen für den Punkt II die Bezeichnungen $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{B}}$ gebraucht werden. Wird nun der Stoss $\mathfrak{A}$ zuerst und unmittelbar darauf der Stoss $\mathfrak{B}$ ausgeführt, so legt

der Angriffspunkt I von $\mathfrak{A}$, wegen des allmählichen Anwachsens der Geschwindigkeit von 0 bis $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{a}}$ während der Stosszeit τ einen Weg $\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{a}} \cdot \tau$ zurück und die Arbeit von $\mathfrak{A}$ während der ganzen Stosszeit ist daher gleich

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Angriffspunkt II von $\mathfrak{J}$ hat zu Beginn des zweiten Stosses bereits die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{a}}$ und dazu summirt sich noch während des Stosses die von 0 bis zu ihrem Endwerthe anwachsende Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{z}}$. Die Arbeitsleistung des zweiten Stosses berechnet sich daher zu

$$\left(\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{z}}\right) \cdot \mathfrak{J}.$$

Die der erzeugten lebendigen Kraft gleiche Arbeitsleistung beider Stösse ergiebt sich daher zu

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{v}_{II,\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{J} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{z}} \cdot \mathfrak{J}.$$

Erfolgen dagegen beide Stösse in umgekehrter Reihenfolge, so findet man die gesammte Arbeitsleistung auf dem gleichen Wege zu

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{z}} \cdot \mathfrak{J} + \mathfrak{v}_{I,\mathfrak{z}} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Beide Werthe müssen einander gleich sein und der Vergleich liefert

$$\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{v}_{I,\mathfrak{z}} \cdot \mathfrak{A}.$$

Sind demnach die Antriebe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ von gleicher absoluter Grösse, so folgt für die Projektionen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{I,\mathfrak{z}}$ und $\mathfrak{v}_{II,\mathfrak{a}}$ auf deren Richtungslinien

$$v_{I,\mathfrak{z}}' = v_{II,\mathfrak{a}}' \tag{125f}$$

womit der Satz von Neuem und zwar diesmal auf ganz gleichem Wege wie früher der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen an elastischen Körpern bewiesen ist. — Hierbei mag noch bemerkt werden, dass die Punkte I und II auch in einen einzigen zusammenfallen dürfen, während die Richtungslinien der Stösse $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ verschieden von einander sind. Auch für diesen Fall gilt der Satz.

Schliesslich sei hier noch darauf hingewiesen, wie sich das Princip von d'Alembert gestaltet, wenn es auf Stösse am starren Körper angewendet wird. Solange der Stoss vom Antriebe $\mathfrak{A} = \int \mathfrak{P}\, dt$ einwirkt, bringt er an jedem Massenpunkte des Körpers eine gewisse Beschleunigung hervor, die gleich $\frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ geschrieben werden kann und die zu jeder Zeit proportional mit $\mathfrak{P}$ ist. Bringt man die Trägheitskräfte $-m \frac{d^2 \mathfrak{s}}{dt^2}$ an, so bilden sie mit $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke ein Gleichgewichtssystem. Um dieses Gleichgewichtssystem näher zu untersuchen, kann man sich an Stelle von $\mathfrak{P}$ auch $\int \mathfrak{P}\, dt$ gesetzt denken, wenn man nur auch für jede Trägheitskraft ihr Zeitintegral, also $-m\left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt} - \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0\right)$ oder mit anderen Worten $-m(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)$ einsetzt, falls hier unter $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit verstanden wird, die der betreffende materielle Punkt etwa schon vor dem Stosse hatte. In Worten heisst dies, dass der durch eine Kraft in irgend einem Maassstabe dargestellte Impuls mit den im entgegengesetzten Sinne genommenen Zuwüchsen der Bewegungsgrössen, falls man sie sich im gleichen Maassstabe durch Kräfte wiedergegeben denkt, ein Gleichgewichtssystem bildet. Schreibt man an, dass des Gleichgewichts wegen die geometrische Summe der darstellenden Kräfte gleich Null sein und dass die Summe ihrer statischen Momente verschwinden muss, wobei man den Schwerpunkt zum Momentenpunkte wählen kann, so gelangt man wieder zu denselben Gleichungen, die vorher aus dem Schwerpunkts- und dem Flächensatze abgeleitet worden waren.

§ 25b. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse starrer Körper.

Unter einem starren Körper soll jetzt der Grenzfall eines weichen oder plastischen, d. h. eines Körpers vom Elasticitätsgrade Null verstanden werden, der aus einem solchen dadurch hervorgeht, dass man sich die Zusammendrückbarkeit des

Körpers unter stetiger Festhaltung der genannten Eigenschaft bis auf Null vermindert denkt. Eine solche nähere Bestimmung ist, wie wir vorher erkannten, nöthig, um den Aufgaben über den Stoss starrer Körper gegeneinander eine physikalisch zulässige Bedeutung zu geben. Wenn dies von anderen Autoren auch nicht ausdrücklich ausgesprochen wird, liegt diese Vorstellung doch überall stillschweigend zu Grunde, wo anderwärts vom Stosse starrer Körper geredet wird oder die darüber angestellten Betrachtungen bleiben wenigstens nur dann richtig, wenn man dem unbestimmt gelassenen Begriffe des starren Körpers nachträglich überall den hier genauer angegebenen Sinn unterlegt.

Wenn zwei weiche Körper aufeinander stossen, endigt der Stoss mit der ersten Stossperiode, d. h. mit dem Augenblicke, in dem die Körper an der Berührungsstelle gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die durch die Zusammendrückung der Körper hervorgerufene Annäherung hat dann zugleich ihren grössten Werth erreicht. Auch für den Stoss starrer Körper in dem hier definirten Sinne ist daher die Bedingung festzuhalten, dass die Körper an der Stossstelle gleiche Geschwindigkeiten durch den Stoss erlangen. Dabei ist zunächst an den graden Stoss gedacht. Für den allgemeinsten Fall des Stosses zweier starrer Körper gegeneinander soll die Aussage dahin ergänzt werden, dass die Stossstellen gleiche Geschwindigkeits-Componenten in der Richtung der Stossnormalen erlangen und dass ferner einem Gleiten der Oberflächen über einander während des Stosses keine Reibung entgegenstehe. Die letzte Voraussetzung ist freilich abermals vollkommen willkürlich eingeführt und sie entspricht, wie wir wissen, dem wahren Verhalten der festen Körper keineswegs. Als nähere Definition des idealen starren Körpers ist sie aber zulässig und da der Satz von Carnot, der sich auf starre Körper von den hier vorausgesetzten Eigenschaften bezieht, in manchen Theilen der technischen Mechanik eine nicht unerhebliche Rolle spielt, mag sie an dieser Stelle gelten.

Dabei möchte ich freilich sofort bemerken, dass meine

Absicht bei der Behandlung des Carnot'schen Satzes hauptsächlich darauf hinausgeht, meine Leser durch eine genauere Darlegung des wahren Sachverhaltes vor einer Ueberschätzung dieses Satzes, auf den man sich in der technischen Hydraulik sehr häufig bezieht, zu schützen und sie dadurch davor zu behüten, manche Formeln, die als Näherungsannahmen eine gewisse Berechtigung haben, für streng beweisbare und daher entsprechend zuverlässige Folgerungen aus den Grundgesetzen der Mechanik anzusehen. Im letzten Abschnitte dieses Bandes werde ich hierauf zurückkommen.

Der Verlust an lebendiger Kraft beim graden centralen Stosse weicher (und hiermit auch der „starren") Körper ist schon im ersten Bande ermittelt worden. Bezeichnet man die Massen beider Körper mit m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten vor dem Stosse mit v_1 und v_2, wobei $v_2 > v_1$ sein möge, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der ersten Stossperiode, die hier vorübergehend mit w bezeichnet werden mag,

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

und der Verlust an lebendiger Kraft stellt sich zunächst in der Form

$$\text{Verl} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2)\frac{w^2}{2}$$

dar. Dieser Ausdruck kann auf verschiedene Art umgeformt werden, und zwar, um auf den Carnot'schen Satz zu kommen, auch in folgender Weise

$$\text{Verl} = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2) w^2 - 2(m_1 + m_2) w^2\right)$$

oder, wenn man in dem letzten mit w^2 behafteten Gliede für den einen Faktor w den vorher dafür festgestellten Werth einsetzt,

$$\text{Verl} = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_1 w^2 + m_2 w^2 - 2w(m_1 v_1 + m_2 v_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2. \qquad (125\,\text{g})$$

Die beiden Glieder dieses Ausdrucks haben eine einfache Bedeutung. Die Differenzen $w - v_1$ und $v_2 - w$ geben nämlich

die Geschwindigkeitsänderungen an, die beide Körper durch den Stoss erfahren. Fasst man daher diese Geschwindigkeitsänderungen als selbständige Bewegungszustände auf, so ist die Summe der zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte ebenso gross als der in Wirklichkeit eintretende Verlust an lebendiger Kraft, den wir berechnen wollten. Diese Aussage spricht den Carnot'schen Satz aus, der indessen, wie sich sofort zeigen wird, nicht nur für den graden centralen Stoss, sondern auch noch in viel allgemeineren Fällen seine Gültigkeit behält.

Zunächst gilt der Satz auch für den beliebigen — schiefen und excentrischen — Stoss von zwei freien starren Körpern gegeneinander. Um dies zu beweisen, bezeichne ich die Geschwindigkeit der vom Stosse getroffenen Stelle des ersten Körpers in irgend einem Augenblicke während der Stosszeit mit $\mathfrak{w}_1$, die Geschwindigkeit der Stossstelle des zweiten Körpers mit $\mathfrak{w}_2$. Da sich die Körper an der Stossstelle während der ganzen Stossdauer berühren — obschon die Oberflächen im allgemeinen zugleich übereinander gleiten —, müssen die in der Richtung der Stossnormalen genommenen Componenten von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ gleich gross sein. Der ebenfalls in die Richtung der Stossnormalen fallende Stossdruck am ersten Körper sei mit $\mathfrak{P}$, das bis zu dem betrachteten Augenblicke genommene Zeitintegral von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}$ und das über die ganze Stossdauer erstrebte Zeitintegral mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet. Am zweiten Körper kehren sich die Richtungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ dem Wechselwirkungsgesetze zufolge um und man hat daher für ihn $-\mathfrak{P}$ bezw. $-\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}'$ zu setzen. Die Arbeit von $\mathfrak{P}$ am ersten Körper während eines Zeitelementes dt ist gleich

$$\mathfrak{P}\mathfrak{w}_1 dt,$$

und die Arbeit des Stossdrucks am zweiten Körper gleich

$$-\mathfrak{P}\mathfrak{w}_2 dt.$$

Nach dem, was vorher über $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ bemerkt wurde, sind beide Arbeiten von gleicher Grösse und entgegengesetzten Vorzeichen, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) = 0. \tag{125h}$$

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ der Stossstellen sind aber nicht jene, die diesen zukämen, wenn sie sich so bewegten, wie es dem starren Zusammenhange mit den fern von der Stossstelle gelegenen Körpermassen entspräche. So klein auch die Formänderungen sein mögen und wenn wir sie beim Grenzübergange vom weichen zum starren Körper schliesslich selbst ganz verschwinden lassen: während der dann ebenfalls gegen Null hin convergirenden Stossdauer müssen wir jedenfalls darauf Rücksicht nehmen, dass sich die Stossstelle der minimalen Formänderung wegen mit anderer Geschwindigkeit zu bewegen vermag, als es dem starren Zusammenhange mit der Hauptmasse des gestossenen Körpers entsprechen würde. Jene Geschwindigkeiten der Stossstellen, die den Bewegungszuständen der beiden Körper im gegebenen Augenblicke mit Vernachlässigung der Formänderung an der Stossstelle zugehörten, seien zum Unterschiede von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ bezeichnet.

Die Aenderung, die die lebendige Kraft des ersten Körpers während dt erfährt, ist gleich jener Arbeit des Stossdrucks $\mathfrak{P}$, die zum Wege $\mathfrak{v}_1 dt$ gehört, denn wir wissen schon aus den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen, dass die Arbeit eines Impulses $\mathfrak{P} dt$ gleich der von ihr verursachten Aenderung der lebendigen Kraft ist, falls während dt keine Formänderung eintritt. Der Rest, also

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1)\,dt$$

wird auf die Formänderungsarbeit am ersten Körper verwendet. Hierbei ist übrigens wohl zu beachten, dass auch beim starren Körper eine endliche Formänderungsarbeit möglich ist, denn wenn auch der Weg der Zusammendrückung gegen Null convergirt, so convergirt gleichzeitig die Grösse des Stossdrucks gegen Unendlich und das Produkt $0 \cdot \infty$ behält bei der hier zu Grunde gelegten Definition des starren Körpers einen endlichen Werth.

Ebenso wird während des Zeitelementes dt die Arbeit

$$-\mathfrak{P}(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{v}_2)\,dt$$

auf die Formänderung des zweiten Körpers verwendet. Die

Summe beider Formänderungsarbeiten ist gleich dem Verluste an lebendiger Kraft während dt, also

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{v}_2)\,dt$$

und daher mit Berücksichtigung von Gl. (125h) auch

$$d\,\mathrm{Verl} = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\,dt.$$

Der gesammte Verlust an lebendiger Kraft während der ganzen Stossdauer folgt daraus zu

$$\mathrm{Verl} = \int (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)\,\mathfrak{P}\,dt.$$

Um die Integration nach der Zeit auszuführen, bezeichne ich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$, die dem Anfange des Stosses entspricht, mit $\mathfrak{v}_1{}^0$ und die am Ende des Stosses mit $\mathfrak{v}_1'$. Die Aenderung $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1{}^0$ entspricht dem ganzen Stossimpulse $\mathfrak{A}'$, die Aenderung $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1{}^0$ bis zu dem betrachteten Augenblicke dem bis dahin bereits verstrichenen Impulse $\mathfrak{A}$ und die beiden Aenderungen verhalten sich zu einander wie die absoluten Werthe A und A' dieser Impulse, da die Richtung des Stossdrucks fortwährend mit der Stossnormalen zusammenfällt und sich daher nicht ändert. Man hat daher

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_1{}^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1{}^0) \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2{}^0 + \frac{A}{A'}(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2{}^0).$$

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\mathrm{Verl} = (\mathfrak{v}_2{}^0 - \mathfrak{v}_1{}^0)\int \mathfrak{P}\,dt + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2{}^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1{}^0)\int \frac{A}{A'}\,\mathfrak{P}\,dt.$$

Nun ist aber $\mathfrak{P}\,dt = d\mathfrak{A}$ und daher

$$\mathrm{Verl} = (\mathfrak{v}_2{}^0 - \mathfrak{v}_1{}^0)\,\mathfrak{A}' + (\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2{}^0 - \mathfrak{v}_1' + \mathfrak{v}_1{}^0)\cdot\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}'.$$

Beachtet man ferner noch, dass am Ende des Stosses die Projektionen von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ auf die Stossnormale gleich gross geworden sind, so vereinfacht sich dies zu

$$\mathrm{Verl} = \frac{1}{2}(\mathfrak{v}_2{}^0 - \mathfrak{v}_1{}^0)\,\mathfrak{A}'. \tag{125i}$$

Hiermit ist ein Ausdruck für den Verlust an lebendiger Kraft gefunden, von dem nur noch gezeigt zu werden braucht, dass er mit dem nach dem Carnot'schen Satze berechneten übereinstimmt. Zu diesem Zwecke sein nun irgend ein fern

von der Stossstelle liegender materieller Punkt des ersten Körpers ins Auge gefasst, dessen Geschwindigkeit vor dem Stosse mit $\mathfrak{v}^0$ und nach dem Stosse mit $\mathfrak{v}'$ (also unter Weglassung des untern Zeigers gegenüber den vorher gebrauchten Bezeichnungen) bezeichnet werden soll. Wir können dann sagen, dass der spätere Bewegungszustand des ersten Körpers aus dem früheren dadurch hervorgeht, dass sich ihm ein Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ zugesellt. Betrachtet man, wie es bei der Aussage des Carnot'schen Satzes geschieht, den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ für sich, so gehörte ihm, wenn er allein vorkäme, eine gewisse lebendige Kraft zu, die mit L_1 bezeichnet werden mag. Nach dem Satze von der Superposition der Bewegungen liesse sich der Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ jedenfalls dadurch getrennt für sich hervorbringen, dass man an dem ruhend gedachten ersten Körper den Stoss vom Impulse $\mathfrak{A}'$ wirken liesse. Unter der Voraussetzung, dass sich dieser Stoss ohne Formänderung abspielte, wäre dann die lebendige Kraft L_1, die durch den Stoss hervorgebracht würde, gleich der Arbeit des Impulses zu setzen. Dabei müsste die Geschwindigkeit der Stossstelle während des Stosses von Null bis zu dem Endwerthe $\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0$ wachsen. Die Arbeit des Impulses und hiermit die lebendige Kraft L_1 berechnet sich demnach zu

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0\right)\mathfrak{A}'$$

und ebenso findet man für den zweiten Körper

$$L_2 = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}'\left(\mathfrak{v}_2' - \mathfrak{v}_2^0\right),$$

wobei nur zu beachten ist, dass bei ihm $-\mathfrak{A}'$ an Stelle von $\mathfrak{A}'$ tritt. Die Summe liefert

$$L_1 + L_2 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_1' - \mathfrak{v}_1^0 - \mathfrak{v}_2' + \mathfrak{v}_2^0\right)\mathfrak{A}'.$$

Da nun, wie vorher schon bemerkt war, am Ende des plastischen Stosses die Projektion von $\mathfrak{v}_1'$ auf die Stossnormale oder auf die Richtung von $\mathfrak{A}'$ ebenso gross ist wie die Projektion von $\mathfrak{v}_2'$, stimmt dies genau mit dem Werthe in Gl. (125i) überein und man findet

$$\text{Verl} = L_1 + L_2, \tag{125k}$$

womit der Carnot'sche Satz auch für den allgemeinsten Fall des Stosses von zwei „plastisch-starren" Körpern gegeneinander bewiesen ist.

Auch auf den Fall, dass die stossenden Körper nicht völlig frei, sondern bestimmten Bedingungen unterworfen sind, lässt sich der Satz unter Beibehaltung der früheren Schlussweise übertragen, falls dabei nur immer vorausgesetzt wird, dass alle Körper, durch die diese Bedingungen verwirklicht sind, auch wenn sie in der Grenze als starr angesehen werden, selbst im Grenzfalle noch den Elasticitätsgrad Null haben und dass ferner kein weiterer Verlust an lebendiger Kraft durch Reibungen herbeigeführt wird. Ich begnüge mich damit, dies hier noch an einem einfachen Falle dieser Art zu zeigen.

Ein starrer Körper möge zunächst völlig frei sein und eine beliebige Anfangsbewegung besitzen. Dann soll irgend ein Punkt von ihm durch eine geeignete Vorrichtung plötzlich festgehalten werden, so dass sich der Körper von da ab nur noch um diesen festen Punkt weiter zu drehen vermag. Man soll angeben, wie er sich weiterhin bewegt und wie gross der Verlust an lebendiger Kraft ist, den er durch den Stoss erleidet.

Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes vor dem Stosse sei wieder mit $\mathfrak{v}^0$, die nach dem Stosse mit $\mathfrak{v}'$ bezeichnet, die Geschwindigkeiten der Stossstelle insbesondere, sofern von der Formänderung abgesehen wird, mit $\mathfrak{v}_1{}^0$ und $\mathfrak{v}_1{}'$, wobei freilich zu beachten ist, dass auch hier wieder während der Stosszeit die wahre Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_1$ des Punktes, den man festzuhalten im Begriffe ist, der unvermeidlichen Formänderung wegen, von $\mathfrak{v}_1$ verschieden ist. Die Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_1{}'$ ist übrigens nach der im vorliegenden Falle vorgeschriebenen Bedingung gleich Null zu setzen. — Durch den Stoss wird der Bewegungszustand um $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ abgeändert und wir können uns einen selbständigen Bewegungszustand denken, der sich dem vorhergehenden überlagert und bei dem

jeder Punkt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$, die Stossstelle also speciell die Geschwindigkeit $-\mathfrak{v}_1{}^0$ besitzt. Der Stossimpuls, von dem zunächst nur der Angriffspunkt gegeben ist, muss jedenfalls so gerichtet und von solcher Grösse sein, dass er für sich den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ hervorruft, insbesondere also seinem Angriffspunkte die gegebene Geschwindigkeit $-\mathfrak{v}_1{}^0$ ertheilt. Dadurch ist aber, wie aus § 25a hervorgeht, der Stossimpuls schon vollständig bestimmt. Nach Gl. (125d) (S. 215) folgt nämlich, wenn man darin die Componenten von $\mathfrak{r}$ noch speciell durch die von $\mathfrak{p}$ ersetzt, die zu einem gegebenen Stossimpulse $\mathfrak{A}$ gehörige Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Angriffspunktes von $\mathfrak{A}$. Zerlegt man diese Gleichung in drei Componenten. gleichungen nach den Richtungen der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so lassen sich diese drei Gleichungen auch nach den Componenten A_1 A_2 A_3 von $\mathfrak{A}$ auflösen, indem sie für diese Unbekannten vom ersten Grade sind. Nachdem dies geschehen ist, kennt man den Stossimpuls $\mathfrak{A}$ nach Richtung und Grösse, der auf den festzuhaltenden Punkt vom Gestelle aus übertragen werden muss- Hiermit ist auch der Bewegungszustand nach dem Stosse als bekannt zu betrachten.

Für den Verlust an lebendiger Kraft können wir ohne Weiteres den Ausdruck in Gl. (125i) in Anspruch nehmen, wenn wir unter dem zweiten Körper, auf den sich $\mathfrak{v}_2{}^0$ bezieht, das Gestell verstehen, also die Vorrichtung, durch die der betreffende Punkt genöthigt wird, nach Ablauf des Stosses in Ruhe zu bleiben. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2{}^0$ selbst ist daher gleich Null zu setzen und man hat

$$\text{Verl} = -\frac{1}{2}\mathfrak{v}_1{}^0\mathfrak{A}'.$$

Das hier auftretende Minus-Zeichen erklärt sich leicht damit, dass $\mathfrak{A}'$ den Stossimpuls am ersten Körper bedeutet, der die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1{}^0$ vernichtet, also ungefähr — wenn auch keineswegs genau — entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{v}_1{}^0$ sein muss. Das innere Produkt $\mathfrak{v}_1{}^0\mathfrak{A}'$ hat daher an sich einen negativen, der Verlust an lebendiger Kraft dagegen, des Minuszeichens wegen, einen positiven Werth.

Nun beachte man, dass der Stossimpuls $\mathfrak{A}'$ am ruhend gedachten Körper den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ hervorbrächte. Die diesem zugehörige lebendige Kraft sei wieder mit L_1 bezeichnet. Dann ist L_1 ebensogross wie die Arbeit des Stossimpulses $\mathfrak{A}'$, wenn dieser den Bewegungszustand $\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}^0$ aus dem Ruhezustande heraus hervorbringt. Dabei steigt aber die Geschwindigkeit des Angriffspunktes von $\mathfrak{A}'$ von Null an bis auf $-\mathfrak{v}_1{}^0$ an und für die Arbeit von $\mathfrak{A}'$ und hiermit zugleich für L_1 erhält man daher

$$L_1 = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{v}_1{}^0\mathfrak{A}'.$$

Mit dem vorher für Verl gefundenen Werthe stimmt dies aber genau überein und wir finden daher auch hier den Carnot'schen Satz durch die Gleichung

$$\text{Verl} = L_1$$

bestätigt.

Man sieht nun auch leicht ein, dass sich derselbe Beweisgang auch auf andere Arten von Zwangsbedingungen übertragen lässt, so lange es sich um einen rein plastischen Stoss handelt, für den die zu Gl. (125i) führende Betrachtung stets ohne Aenderung übernommen werden kann.

Dagegen wird der Carnot'sche Satz stets ungültig, sobald der Stoss entweder nicht ganz unelastisch ist oder sobald (etwa beim schiefen Stosse) Reibungen vorkommen, die sich dem Uebereinanderweggleiten der Stossstellen widersetzen.

§ 26. Schwingungen von Stäben mit gleichförmig vertheilter Masse.

In der theoretischen Physik hat das Problem der schwingenden Saiten, also etwa der Violinsaiten, das zuerst von Fourier vollständig gelöst wurde, von jeher eine wichtige Rolle gespielt. Die Mathematiker behandeln es mit Vorliebe schon deshalb, weil sich an die Lösung dieses Problems einige der wichtigsten Fortschritte der Mathematik geknüpft haben. Ich werde hier nicht darauf eingehen, sondern an Stelle davon

das Problem des schwingenden Stabs behandeln, das mit jenem sehr verwandt, dabei aber von grösserem Interesse für den Techniker ist, weil es Licht über die Schwingungen verbreitet, die z. B. ein Brückenbalken oder überhaupt ein belasteter Träger auszuführen vermag. Dagegen möchte ich noch hervorheben, dass dieses Problem nicht mit einem anderen verwechselt werden darf, das schon früher von Stokes und neuerdings besonders von Zimmermann in sehr geschickter und ausführlicher Weise behandelt worden ist. Bei diesem wird nämlich der Fall untersucht, dass ein Fahrzeug, das als materieller Punkt aufgefasst werden kann, auf einen Brückenträger mit gegebener Geschwindigkeit auffährt und dabei vorausgesetzt, dass die Masse des Brückenträgers vernachlässigt werden könne. Auf die Zimmermann'sche Untersuchung werde ich hier nicht eingehen, weil mich dies zu weit führen würde; ich empfehle aber den sich dafür Interessirenden die darüber veröffentlichte Schrift „Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last“ von H. Zimmermann, Berlin 1896. Ich muss freilich leider hinzufügen, dass diese an sich sehr schöne Untersuchung durch die Vernachlässigung der Masse des Trägers sehr an Werth einbüsst.

Darum, wie die Schwingungen des Trägers, die wir untersuchen wollen, ursprünglich angeregt wurden, werde ich mich überhaupt nicht kümmern; es wird sich nur darum handeln, zu untersuchen, wie sie sich, nachdem sie einmal bestanden haben, weiterhin fortsetzen. Aber auch dieses Problem behandle ich nicht vollständig; ich begnüge mich vielmehr, die allerwichtigsten Betrachtungen, die sich darüber anstellen lassen, hier wiederzugeben.

Gegenüber dem Probleme der schwingenden Saiten besteht hier nur der Unterschied, dass bei den Saiten der Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann, so dass nur die Längsspannungen in Frage kommen, während bei den Stäben der Biegungswiderstand die ausschlaggebende Rolle spielt, von dem Hinzutreten einer Längszugspannung dagegen abgesehen werden kann.

Unter der gleichmässig vertheilten Last, die dem Träger aufgebürdet ist, und die die Schwingungen mit ihm zusammen ausführt, erfährt der Träger schon im Ruhezustande eine geringe elastische Durchbiegung, die als Function der Querschnittsabscisse aus der Gleichung der elastischen Linie nach bekannten Entwickelungen der Festigkeitslehre berechnet werden kann. Diese „statische“ Durchbiegung y_s kümmert uns hier wenig. Wenn der Träger schwingt, wird die gesammte Durchbiegung in einem bestimmten Augenblicke von y_s im Allgemeinen verschieden sein. Der Unterschied möge mit y und die totale Durchbiegung mit y_d oder als „dynamische“ Durchbiegung bezeichnet werden. Man hat also

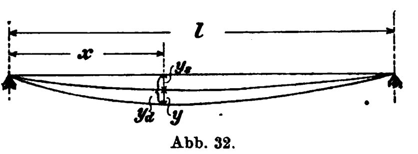


Abb. 32.

$$y_d = y_s + y$$

und in Abb. 32 ist dieser Zusammenhang noch näher nachgewiesen. Die eine Linie soll die elastische Linie für den Ruhezustand, die andere die Mittellinie des Stabs in irgend einem Augenblicke während der Schwingung andeuten.

Um die Aufgabe nach den Methoden der Festigkeitslehre behandeln zu können, machen wir von dem d'Alembert'schen Princip Gebrauch. Wir können voraussetzen, dass im Wesentlichen nur Verschiebungen senkrecht zur Stabaxe in Frage kommen und wollen uns auch von vornherein nur auf Verschiebungen in der Vertikalebene beschränken. Natürlich lassen sich aber die erlangten Resultate auch auf Horizontalschwingungen ohne Weiteres anwenden. Dann ist die Beschleunigung im gegebenen Augenblicke für die im Abstande x vom linken Auflager liegenden Massentheilchen ebenfalls nach abwärts (oder bei negativem Vorzeichen nach aufwärts) gerichtet und gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

zu setzen. Wenn die auf die Längeneinheit kommende Masse

der Belastung (sammt Eigengewicht des Stabs) mit μ bezeichnet wird, erhalten wir für die Trägheitskraft, die wir an dem Längenelement dx anbringen müssen, um die Aufgabe auf ein Gleichgewichtsproblem zurückzuführen,

$$-\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Es möge noch bemerkt werden, dass man in diesem Ausdrucke y auch durch y_d ersetzen könnte, da y_s der Zeit nach constant ist. Es ist aber bequemer, sofort überall mit y zu rechnen.

Die Trägheitskräfte, als Lasten an dem Stabe angebracht, führen am ruhenden Stabe im Vereine mit den wirklich vorhandenen Lasten zu der elastischen Durchsenkung y_d. Anstatt dessen können wir auch sagen, dass die Trägheitskräfte für sich genommen, als Lasten am ruhenden Stabe eine elastische Linie hervorrufen würden, deren Ordinaten y wären. Natürlich ist dabei vorausgesetzt, dass das Material des Stabes dem Hooke'schen Gesetze gehorcht, dass also die Proportionalitätsgrenze im Verlaufe der Schwingung niemals überschritten wird. In diesem Falle setzen sich aber in der That, wie aus den Untersuchungen der Festigkeitslehre bekannt ist, die von zusammengesetzten Lastensystemen erzeugten Durchbiegungen durch algebraische Summirung aus jenen zusammen, die den einzelnen Lasten für sich genommen entsprechen.

Die Gleichung der elastischen Linie für die Durchbiegungen y lautet

$$E\Theta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M.$$

Das Biegungsmoment M ist aber hier nicht unmittelbar gegeben; wir haben nur einen Ausdruck für die Belastung irgend eines Stabelements dx. Wir befinden uns also genau in derselben Lage wie bei den im 6. Abschnitte der „Festigkeitslehre“ untersuchten Stäben auf nachgiebiger Unterlage; wir müssen daher auch genau so verfahren wie dort. Wir diffe-

rentiiren also die Gleichung der elastischen Linie zweimal nach x und erhalten

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Für das Differential ∂V der Scheerkraft, das zum Differential ∂x der Abscisse gehört, haben wir

$$\partial V = + \mu \partial x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

denn die Trägheitskräfte sind nach aufwärts gekehrte Lasten, wenn sie negativ sind und sie führen in diesem Falle zu einer Vergrösserung der Scheerkraft, die nach oben hin positiv gerechnet wird. Die vorhergehende Gleichung geht hiermit über in

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{126}$$

Das ist die Differentialgleichung unseres Problems. Sie ist eine partielle Differentialgleichung, in deren allgemeine Lösung daher willkürliche Functionen eintreten müssen. Die Schwingungen des Stabes können daher von sehr mannichfaltiger Art sein. Das kann auch nicht überraschen, wenn wir bedenken, dass die Gestalt des Stabes zu Anfang ganz willkürlich gegeben sein kann und dass auch die anfänglichen Geschwindigkeiten ganz beliebige stetige Functionen der Querschnittsabscisse x sein können. Jedem anderen Anfangszustande müssen aber in der Folge auch andere Schwingungen entsprechen.

Unter diesen Umständen sucht man zunächst partikuläre Lösungen der Gleichung von möglichst einfacher Form. Man gelangt dadurch zur Kenntniss besonderer möglicher Schwingungen und aus einer Combination der einzeln als möglich erkannten Schwingungen sucht man die allgemeine Lösung oder die zu gegebenen Anfangsbedingungen gehörige Lösung zusammenzusetzen. Das Zusammensetzen der einzelnen Lösungen wird mathematisch gesprochen dadurch ermöglicht, dass die Differentialgleichung linear ist, oder physikalisch gesprochen dadurch, dass sich die Schwingungen zu superponiren vermögen, so dass eine die andere nicht stört.

Die einfachste Lösung von Gl. (126) ist von der Form

$$y = A \sin \alpha x \sin \beta t. \tag{127}$$

Von den hierbei vorkommenden Constanten ist indessen nur A willkürlich; es giebt den grössten Ausschlag an, der an irgend einer Stelle und zu irgend einer Zeit vorkommt. Zwischen den anderen Constanten α und β muss zunächst eine Bedingungsgleichung erfüllt sein, damit Gl. (127) wirklich eine Lösung von Gl. (126) darstelle. Setzt man nämlich den für y vorgeschlagenen Werth in Gl. (126) ein, so geht sie nach Wegheben gleicher Faktoren auf beiden Seiten über in

$$E\Theta\alpha^4 = \mu\beta^2. \tag{128}$$

Ausserdem muss α auch so gewählt werden, dass die Grenzbedingungen an den Enden erfüllt werden. Für $x = 0$ ist y nach Gl. (127) schon von selbst gleich Null; ausserdem muss aber y auch für $x = l$ zu jeder Zeit gleich Null bleiben. Hiernach muss der Winkel αl entweder gleich π oder 2π oder überhaupt gleich irgend einem ganzen Vielfachen von π sein. Je nachdem man sich für die eine oder die andere Annahme entscheidet, erhält man verschiedene Schwingungsbewegungen des Stabes. Jene, die zum Werthe $\alpha = \frac{\pi}{l}$ gehört, wird die Grundschwingung des Stabes genannt. Es ist jene, die dem tiefsten Tone der von dem schwingenden Stabe ausgesendeten Schallwellen entspricht. Für β hat man dann nach Gl. (128)

$$\beta = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}}$$

und Gl. (127) nimmt für die Grundschwingung die bestimmtere Form an

$$y = A \sin \frac{\pi x}{l} \sin t \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}}. \tag{129}$$

Während der Dauer einer vollen Schwingung wächst der Winkel βt um 2π an; für die Schwingungsdauer T hat man daher

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{E\Theta}}. \tag{130}$$

Wählt man α gleich einem Vielfachen von $\frac{\pi}{l}$, so treten nach Gl. (127) Schwingungsknoten auf, d. h. es giebt Punkte, die die ganze Stablänge in gleiche Abschnitte eintheilen und die während der Schwingungsbewegung fortwährend in Ruhe bleiben. Die dazwischen liegenden Abschnitte deformiren sich, so wie im vorigen Falle der ganze Stab, nach dem Gesetze einer Sinuscurve; sie bilden die zwischen den Knoten liegenden „Schwingungsbäuche“. Setzt man z. B. $\alpha = 2\frac{\pi}{l}$, so hat man einen Schwingungsknoten in der Mitte, denn für $x = \frac{l}{2}$ wird αx zu π und der Sinus zu Null. Die Stabmittellinie zerfällt beim Schwingen in zwei Schwingungsbäuche. Wenn α auf das Doppelte wächst, steigt β nach Gl. (128) auf das Vierfache. Die Schwingungsdauer beträgt daher bei dieser Schwingung nur den vierten Theil von der Schwingungsdauer der Grundschwingung. Je mehr Bäuche der Stab bei den einfachen Sinusschwingungen bildet, desto kleiner ist die Schwingungsdauer und um so höher ist daher der Ton der von dem Stabe ausgesendeten Schallwellen. Man nennt diese Töne die „Obertöne“ des schwingenden Stabs im Gegensatze zu dem von der Grundschwingung ausgehenden „Grundtone“.

In je mehr Abschnitte die ganze Stablänge durch die Schwingungsknoten zerlegt ist, um so kleinere Schwingungsamplituden A sind noch mit einem gewissen Krümmungsradius von gegebener Grösse oder auch mit einer gegebenen Formänderungsarbeit des Stabes möglich. Die Grundschwingung vermag daher schon zu grossen Ausschlägen zu führen, ohne dass etwa die Proportionalitätsgrenze schon bald erreicht wäre, oder ohne dass eine besonders grosse Arbeit äusserer Kräfte zur Herstellung der Schwingungen und der dazu gehörigen Formänderungen aufgewendet werden müsste. Je höher aber die Schwingungszahlen der Oberschwingungen liegen, um so kleiner müssen nothwendig die Schwingungen schon desshalb bleiben, weil sonst die Proportionalitätsgrenze überschritten und damit die Schwingungen sofort gedämpft würden und zu-

gleich auch weil eine viel grössere Arbeit zu ihrer Erregung bei gleicher Amplitude aufgewendet werden müsste. Ausserdem werden die Schwingungen auch an sich schon um so stärker gedämpft, je schneller sie erfolgen, da der Luftwiderstand mit der Geschwindigkeit wächst. Von der Schwingungsamplitude hängt aber die Schallstärke der von dem schwingenden Stab auf die Luft übergehenden Schallwellen ab und man erkennt daher, dass sich der Grundton bei beliebiger Erregung der Schwingungen im Allgemeinen am stärksten bemerkbar machen wird und jeder Oberton um so weniger, je höher er liegt.

§ 27. Schwingungen von schnell umlaufenden schwanken Wellen. (Laval'sche Turbinenwelle.)

Solange die Mittellinie einer Welle eine freie Axe des aus ihr und den darauf sitzenden Rädern u. dgl. bestehenden rotirenden Körpers bleibt, liegt kein Grund zur Befürchtung vor, dass die Welle eine schädliche Beanspruchung durch eine hohe Umlaufsgeschwindigkeit erfahren könne. Nun ist es aber zunächst sehr schwer, die genannte Bedingung genau genug zu erfüllen; man kann es auch bei genauester Centrirung nicht erreichen, dass die Umdrehungsaxe wirklich durch den Schwerpunkt des rotirenden Körpers geht, wenn sich die Abweichung vielleicht auch nur auf kleine Bruchtheile eines Millimeters beschränkt. Noch schwerer ist es häufig, die Umdrehungsaxe in die Richtung der Hauptträgheitsaxe zu legen. Ausserdem ist man aber, selbst wenn die beiden Bedingungen anfänglich vollständig erfüllt wären, im Zweifel darüber, ob sie auch während des Ganges der Maschine, bei der sich zufällige Erschütterungen nicht vermeiden lassen, dauernd erfüllt bleiben werden.

Solange die Geschwindigkeiten nicht allzugross wurden, genügte es, durch möglichst genaue Centrirung die freie Axe so gut als möglich mit der Wellenmittellinie zusammen fallen zu lassen. Die Welle wurde hierbei steif genug construirt, um ihr die Uebertragung der zur Aufrechterhaltung der Umdrehungsaxe wegen der unvermeidlichen Abweichung von der

Hauptträgheitsaxe erforderlichen Zwangskräfte unbesorgt zumuthen zu können. Dieses Verfahren musste aber versagen, sobald die Umlaufsgeschwindigkeiten über ein gewisses Maass hinaus wuchsen; denn die Zwangskräfte wachsen mit dem Quadrate der Geschwindigkeit und beim Uebergange zur zehnfachen Geschwindigkeit hatte man daher schon mit einem 100-fachen Biegungsmomente der Zwangskräfte zu rechnen, das von der Welle übertragen werden musste. In der That hat man früher öfters Rechnungen darüber angestellt, welche Geschwindigkeiten höchstens erreicht werden könnten; man setzte dabei genaueste Centrirung voraus, beachtete aber, dass eine kleine Erschütterung schon genügt, den Schwerpunkt ein wenig aus der Mittellinie der Welle zu entfernen. Die hiermit hervorgerufene Centrifugalkraft sucht dann die zufällig entstandene kleine Ausbiegung noch weiter zu vergrössern und je mehr diese wächst, wächst auch die Centrifugalkraft. Es war hiermit genau wie bei der Knickfestigkeit und die Rechnung schloss, wie bei dieser, damit ab, dass bei gegebener Länge, bei gegebener Last und gegebenem Querschnitte eine gewisse Geschwindigkeit (der Euler'schen Knicklast entsprechend) nicht erreicht werden dürfe, um trotz anfänglich genauester Centrirung ein Ausweichen und hiermit eine Zerstörung der Welle zu vermeiden.

Betrachtungen dieser Art führten zu verhältnissmässig niedrigen gefährlichen Umlaufszahlen, die heute thatsächlich nicht nur erreicht, sondern noch weit überschritten sind. Diese Betrachtungen waren in einem sehr wesentlichen Punkte ungenau und führten daher zu ganz falschen Resultaten: man hatte nämlich nicht auf die Schwingungen geachtet, die sofort entstehen müssen, wenn sich die schnell rotirende Welle etwas ausbiegt. Der schwedische Ingenieur de Laval war der Erste, der durch praktische Versuche nachwies, dass man eine Welle viel schneller umlaufen lassen kann, als man es früher für möglich hielt. Anstatt die Welle so stark zu machen, dass sie die Umdrehung um ihre Mittellinie trotz nicht völlig genauer Centrirung erzwingen konnte, machte er sie umgekehrt

viel schwächer; er verzichtete damit auf die vollständige Beherrschung des rotirenden Körpers durch die Welle, liess ihm vielmehr die Möglichkeit, sich leicht ein wenig in der Richtung quer zur Welle zu verschieben oder sich auch ein wenig dagegen zu drehen.

Als die Laval'schen Versuchsergebnisse bekannt wurden, stiessen sie anfänglich überall auf Unglauben. Nachdem aber der experimentelle Nachweis ihrer Richtigkeit auch die hartnäckigsten Zweifler überzeugt hatte, begann man mit Erklärungsversuchen, die oft ganz verfehlt waren. Man sprach von der „Selbsteinstellung" eines rotirenden Körpers in die freie Axe und that dabei so, als wenn jeder sich selbst überlassene Körper mit der Zeit seine Rotationsaxe in die benachbarte freie Axe verlege. Diese viel nachgesprochene Phrase bewies nur, dass ihre Urheber und ihre Verbreiter eine ganz falsche Vorstellung von der Dynamik des sich selbst überlassenen Körpers hatten.

Wie die Theorie des Vorganges zu fassen ist, um einerseits in Uebereinstimmung mit den allgemein gültigen Sätzen der Mechanik zu bleiben und andererseits durch passende Vereinfachungen zu bequem anwendbaren Formeln und Regeln zu gelangen, die sich in hinreichender Uebereinstimmung mit den thatsächlichen Beobachtungen befinden, habe ich selbst gezeigt und ich werde diese Theorie hier wiederholen. Dass sich meine Lösung mit dem wirklich beobachteten Vorgange so weit deckt, als die Genauigkeit der Beobachtung überhaupt zu reichen vermag, ist durch eine besondere Experimentaluntersuchung bewiesen worden, die Herr Professor Ludw. Klein, der damals Assistent unserer Hochschule war, in meinem Laboratorium ausführte.

Zunächst mache ich darauf aufmerksam, dass ein geringer Richtungsunterschied zwischen der Rotationsaxe und der Hauptträgheitsaxe des rotirenden Körpers nicht viel Bedeutung hat, wenn die Welle sehr biegsam ist. Man kann sich davon sowohl auf Grund des Flächensatzes wie mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips überzeugen. Ich wähle den letzten Weg.

In Abb. 33 sei AB die zunächst gradlinig gedachte Mittellinie der Welle und DE die davon ein wenig abweichende Hauptträgheitsaxe des rotirenden Körpers. Wenn der Körper mit constanter Geschwindigkeit um AB rotirt, reduciren sich die Trägheitskräfte auf Centrifugalkräfte, die mit C bezeichnet und in Abb. 33 eingetragen sind. Wir können jetzt den Körper und die Welle im Ruhezustande betrachten und finden, dass die Centrifugalkräfte C ein Kräftepaar bilden, das eine Verbiegung der Welle herbeiführt.

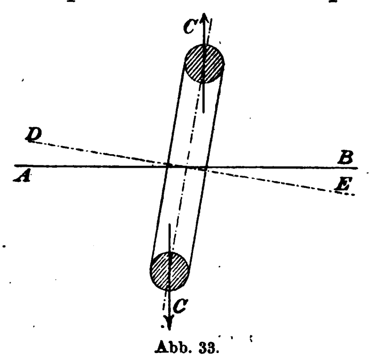


Abb. 33.

Diese Verbiegung erfolgt aber in solchem Sinne, dass sich die Hauptaxe DE der Verbindungslinie AB der Zapfenmittelpunkte der die Welle stützenden Lager nähert. Die ursprünglich vorhandene Abweichung zwischen DE und AB gleicht sich demnach zum Theile von selbst aus und zwar um so mehr, je biegsamer die Welle ist und zugleich je mehr die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, denn mit dieser wächst auch das Moment des Kräftepaars der Centrifugalkräfte. Allerdings kann DE hierdurch nicht vollständig zum Zusammenfallen mit AB gebracht werden, da immer noch ein Moment der Centrifugalkräfte zurückbleiben muss, das die erforderliche Verbiegung der Welle aufrecht erhält. Die Folge davon wird eine Kreiselbewegung des rotirenden Körpers von der Art der pseudoregulären Präcession sein. Wenn man schon beim Aufkeilen des rotirenden Körpers darauf achtete, den anfänglichen Richtungsunterschied zwischen DE und AB so gering zu machen, dass die Welle sich leicht um so viel verbiegen kann, als er ausmacht, so kann diese Präcessionsbewegung niemals für sich zu grossen Wellenverbiegungen und zu einer Gefahr des Bruches führen. Ich kann daher weiterhin von dieser Erscheinung ganz absehen und die Aufgabe so behandeln, als wenn überhaupt kein Richtungsunterschied zwischen DE und AB vorkäme.

Ganz anders gestaltet sich die Betrachtung, wenn wir annehmen, die Wellenmittellinie AB gehe nicht genau durch den Schwerpunkt des rotirenden Körpers. Auch hier denken wir uns den Körper unter Einführung der Trägheitskräfte zur Ruhe gebracht. In Abb. 34 gebe S die augenblickliche Lage des Schwerpunktes an. Die Centrifugalkräfte geben dann eine Resultirende, die S von AB zu entfernen sucht. Hierdurch entsteht eine Biegung der Welle, durch die die Excentricität e vergrössert wird. Gerade auf Grund dieser Ueberlegung schloss man früher, dass eine gewisse grösste Winkelgeschwindigkeit überhaupt nicht überschritten werden könnte, ohne eine dauernde Verbiegung oder den Bruch der Welle und ein Herausschleudern des rotirenden Körpers herbeizuführen.

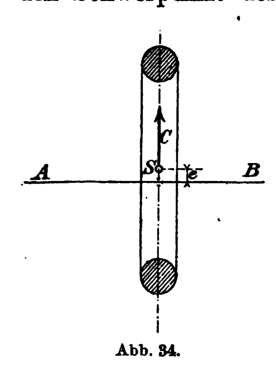


Abb. 34.

Die Erfahrung lehrt indessen, dass bei wachsender Geschwindigkeit ein absichtlich etwas excentrisch aufgekeiltes Rad zunächst in der That in Uebereinstimmung mit der vorausgehenden Betrachtung zu immer stärkeren Biegungen der Welle führt und daher immer stärker schleudert. Das gilt aber nur bis zu einer gewissen Grenze. An dieser wird das Schleudern so stark, dass die Welle, wie man es früher schon vorausgesehen hatte, ganz verbogen oder zerbrochen werden müsste, wenn sie nicht durch eine Führung, die sie umgiebt, an stärkeren Formänderungen verhindert würde. Die Welle stösst nun bei der fraglichen Geschwindigkeit, die als ihre kritische Geschwindigkeit bezeichnet werden soll, gegen die Führungen, hat einen stark unregelmässigen Gang, verbraucht wegen der Reibung und der Stösse gegen die sie ringartig umgebende Führung viel Arbeit und versetzt den ganzen Apparat in starke Erschütterungen. Bei der kritischen Geschwindigkeit liesse sich in der That trotz des Auskunftsmittels der „Führung", das schliesslich auf eine zeitweilige Herabsetzung der freien Länge der Welle hinauskommt, kein

geordneter Maschinenbetrieb aufrecht erhalten. Sowie man aber nun die Geschwindigkeit der Welle noch weiter steigert, bemerkt man, dass die Welle anfängt, wieder ruhiger zu laufen und wenn die Geschwindigkeit gross genug geworden ist, läuft sie ruhiger als jemals vorher. Man kann die Führung jetzt vollständig entfernen und bemerkt, dass selbst äussere Stösse zu keinen grossen Ausschlägen der Welle mehr führen. Schaltet man hierauf den Antrieb aus und überlässt den rotirenden Körper sich selbst, so läuft die Welle anfänglich ruhig weiter; sobald sich aber in Folge der Reibungen u. s. f. die Geschwindigkeit so weit vermindert hat, dass sie sich wieder der kritischen nähert, treten wieder stärkere Schwingungen ein und es wird Zeit, dass man von Neuem eine Führung oder überhaupt irgend eine Sicherung gegen zu grosse Ausschläge der Welle anbringt, um ein Herausschleudern zu verhüten. Die als Führung bezeichnete Schutzvorkehrung ist daher immer nur für das Ueberschreiten der kritischen Geschwindigkeit, sei es im einen oder im anderen Sinne erforderlich. Vorher und nachher läuft die Welle ganz frei und sicher.

Ausserdem zeigt auch die Erfahrung, dass man die Welle selbst ohne Benutzung einer Schutzvorkehrung der genannten Art zu regelmässigen Umläufen ohne grosse Schwingungen bringen kann, wenn man sie nur schnell genug in sehr grosse Umdrehungsgeschwindigkeit versetzt. Dazu muss man natürlich nach Art eines „Drehstosses“ ein sehr grosses Kräftepaar auf sie einwirken lassen, das ihr schon nach ganz kurzer Zeit die erforderliche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen vermag.

Ich habe die Beschreibung dieser Erfahrungen vorausgeschickt, weil sich auch die theoretische Erklärung erst an sie anknüpfte. Es ist zwar möglich, aber nicht wahrscheinlich, dass man auf theoretischem Wege zur Erkenntniss der Möglichkeit gekommen wäre, eine Welle über ihrer kritischen Geschwindigkeit laufen zu lassen, wenn die Erfahrung nicht den Weg dazu gewiesen hätte. Es wäre aber verfehlt, wenn man die erst nachträglich gefundene Theorie des Vorgangs darum

geringschätzig beurtheilen wollte. Solange man sich nicht theoretisch Rechenschaft über diesen zu geben vermochte, besass man nichts als einige vereinzelte Erfahrungen, über deren Zusammenhang man so wenig auszusagen vermochte, als über die Bedingungen, unter denen die gesehenen Erscheinungen stets sicher zu erwarten seien. Erst durch die theoretische Bearbeitung wurden die vereinzelten Erfahrungen zu einem wohlgeordneten Bilde vereinigt, aus dem sich erkennen lässt, warum und unter welchen Umständen so hohe Umlaufsgeschwindigkeiten zulässig sind.

Ich beginne zunächst mit der Erklärung der zuletzt beschriebenen Erscheinung, bei der die Welle in sehr kurzer Zeit in eine Geschwindigkeit versetzt wird, die über der kritischen liegt. In Abb. 35 sei durch den äusseren Kreis der Umriss des auf der biegsamen Welle sitzenden Rades in der Anfangslage angegeben. Die Zeichenebene steht senkrecht auf der Mittellinie der Welle in der Ruhelage, oder wie wir sagen wollen, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zapfenmittelpunkte der Welle, die sich in O projiciren möge. Der Wellenquerschnitt ist in der Zeichnung nicht angegeben. Der Schwerpunkt des rotirenden Körpers soll anfänglich in S liegen. Die Strecke OS giebt also die Excentricität e an; sie ist der Deutlichkeit wegen in der Zeichnung viel grösser angegeben, als sie in Wirklichkeit zu erwarten sein wird.

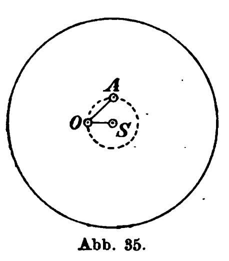


Abb. 35.

Nun möge die Welle und mit ihr das Rad in schnelle Umdrehung versetzt werden. Das Kräftepaar, das wir hierzu am Rade angreifen lassen müssen, wird durch die auf Torsion beanspruchte Welle auf das Rad übertragen. Nun wissen wir aber, dass ein Kräftepaar stets nur eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, aber keine Verschiebung des Schwerpunkts herbeizuführen vermag. Das Rad wird also, sobald wir durch Torsion der Welle drehend auf es einzuwirken beginnen, nicht eine Drehung um O, sondern eine

Drehung um S auszuführen suchen. Da die Welle hinreichend biegsam sein sollte, wird es daran auch nicht merklich gehindert. Wenn die Welle gar keine Biegungssteifigkeit hätte, könnte sogar dauernd überhaupt nur eine Drehung um S erfolgen. Der Befestigungspunkt der Welle, der ursprünglich mit O zusammenfiel, müsste dann einen Kreis um S beschreiben, der in die Abbildung punktirt eingetragen ist. Ganz ohne Biegungswiderstand dürfen wir die Welle freilich nicht voraussetzen. Denken wir uns also den Befestigungspunkt des Rades auf der Welle in seiner kreisförmigen Bahn um den Schwerpunkt S etwa nach A gelangt, so ist OA der Biegungspfeil der Welle und wegen der Biegung wird die Welle ausser dem Kräftepaare, das die Umdrehung herbeiführt, auch noch eine Kraft auf das Rad übertragen, die A nach O zurückzuführen sucht. Erst diese Kraft wird nun auch eine Bewegung des Schwerpunktes S veranlassen. Wir mussten uns aber ohnehin vorstellen, dass das Rad sehr schnell in Umdrehung versetzt werden sollte und können daher annehmen, dass das diese Umdrehung bewirkende Kräftepaar so gross ist, dass es das Rad schon mehrmals umgedreht hat, bevor die durch die Biegungselasticität hervorgerufene Kraft den Schwerpunkt merklich von seiner Stelle rücken konnte. Wie gross das Kräftepaar hierzu sein müsste, liesse sich leicht ausrechnen; wir können aber darauf verzichten, da es sich jetzt nur um eine qualitative Untersuchung handelt und man sich das Kräftepaar jedenfalls immer gross genug vorstellen kann, um die gestellte Bedingung zu erfüllen.

Nach dem Satze vom Antriebe ist die Bewegungsgrösse, die das Rad wegen der Schwerpunktsbewegung während eines Umlaufs erlangt, gleich dem Zeitintegrale der Biegungskraft. Ausserdem kann dieses Zeitintegral gleich der Dauer eines Umlaufs multiplicirt mit dem graphischen Mittelwerthe der Biegungskraft während eines Umlaufs gesetzt werden. Wir wollen uns daher überlegen, welche Richtung diesem Mittelwerthe zukommt. In Abb. 36 (s. S. 246) ist der Kreis, den A in Abb. 35 beschrieb, vergrössert herausgezeichnet. A fällt der Reihe nach

mit O, A_1 A_2 u. s. f. zusammen, um dann wieder nach O zu gelangen. In jedem Augenblicke ist die von der gebogenen Welle auf das Rad übertragene „Biegungskraft" von A aus nach O zu gerichtet; ausserdem ist die Grösse der Kraft der Sehne AO, d. h. dem Biegungspfeile, proportional. Jedem Punkte A_1 auf der oberen Hälfte des Kreises entspricht ein zum Durchmesser durch O symmetrisch liegender Punkt A_5 auf der unteren Hälfte. Die durch die Sehnen $A_1 O$ und $A_5 O$ dargestellten Biegungskräfte haben gleiche und gleichgerichtete horizontale, aber entgegengesetzt gerichtete Vertikalcomponenten. Solange der Punkt A die obere Hälfte des Kreises durchläuft, wird der Schwerpunkt nach links und zugleich nach abwärts beschleunigt; durchläuft A die untere Kreishälfte, so wird S immer noch nach links, aber jetzt zugleich nach aufwärts beschleunigt. Nun durchläuft freilich A den Kreis nicht gleichförmig, sondern beschleunigt. Wir wollen aber, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesem Umstande jetzt absehen. Dann können wir sagen, dass der Mittelwerth der Biegungskraft für einen ganzen Umlauf im Allgemeinen nach links hin gerichtet ist. Jedenfalls erkennen wir daraus, dass sich im Mittel S nach O hin verschieben muss und nicht nach aussen hin. Das ist es aber, worauf es ankommt.

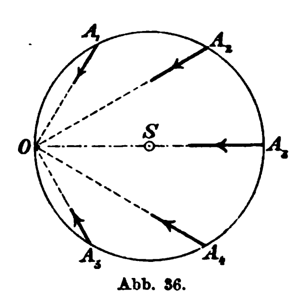


Abb. 36.

Nehmen wir nun an, S sei nach einigen Umläufen so nahe an O hin gerückt, dass es als mit O zusammenfallend betrachtet werden kann, so wird nachher A einen Kreis um O beschreiben, dessen Halbmesser gleich der Excentricität e oder gleich der Strecke OS in der Anfangslage ist. Die Biegungskraft wirkt dann während eines Umlaufs der Reihe nach von allen möglichen Richtungen her mit stets gleicher Stärke auf das Rad ein und $\int \mathfrak{P} dt$ für einen Umlauf wird zu Null. Der Schwerpunkt vermag also späterhin dauernd in der Nähe von O zu bleiben. Die anfängliche Excentricität ist durch die

geringe Ausbiegung der Welle ausgeglichen und das Rad hat sich, wenn man so will, von selbst so eingestellt, dass es um eine freie Axe rotirt.

Bei dieser Betrachtung wird man freilich einen Nachweis dafür vermissen, dass diese Bewegung nun auch eine stabile Bewegung ist, d. h. man sieht wohl leicht ein, dass die Bewegung so wie beschrieben weiter gehen kann; aber es bleibt zweifelhaft, ob nicht etwa durch einen zufälligen Stoss von aussen her, der den Schwerpunkt S etwas aus der Nähe von O verrückt, der ganze Charakter der Bewegung geändert und das Rad schliesslich doch noch abgeschleudert werden könnte. Um uns hierüber Gewissheit zu verschaffen, müssen wir nun noch in eine genauere quantitative Untersuchung der Bewegung eintreten.

Hierbei nehme ich an, dass der Anfangszustand des bereits in schneller Rotation begriffenen Rades beliebig gegeben sei und dass es hierauf ohne äussere Einwirkung sich selbst überlassen werde. Ich nehme also mit anderen Worten an, dass von der Welle nur noch ein Torsionsmoment von solcher Grösse und solchem Sinne auf das Rad übertragen werde, um die Rotation auf gleicher Höhe zu erhalten, also um entweder die Bewegungswiderstände aufzuheben oder um (bei einem Turbinenrade) die fernere Beschleunigung durch die daran angreifenden äusseren Kräfte zu verhindern. Ausserdem soll auch das Gewicht des Rades nicht in Berücksichtigung gezogen werden. Man kann sich dessen Einfluss etwa dadurch beseitigt denken, dass die Welle, um die das Rad rotirt, lothrecht steht; im Uebrigen ist aber das Eigengewicht des Rades auch so gering gegenüber den gewaltigen Centrifugalkräften, die bei merklichen Excentricitäten und bei den grossen Geschwindigkeiten, um die es sich hier handelt, vorkommen, dass es ohnehin keine grosse Rolle spielt. Ausserdem soll schliesslich noch vorausgesetzt werden, dass die Excentricität auf jeden Fall gering gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Rades ist, so dass sie genau genug diesem gegenüber als unendlich klein betrachtet werden darf.

In Abb. 37 bedeutet wie vorher O die Projektion der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Zapfen, mit denen die Welle im Gestelle gelagert ist. S ist der Ort des Schwerpunktes und A der Ort des Befestigungspunktes zur Zeit t, OA demnach der Biegungspfeil. Alle Strecken sind in die Abbildung stark vergrössert eingetragen. Ausserdem sind zwei Coordinatenaxen gezogen und der Winkel, den AS mit der X-Axe bildet, ist mit φ bezeichnet. Die X-Axe möge man sich in solcher Richtung gezogen denken, dass der Winkel φ zur Zeit $t = 0$, also im Anfange der Bewegung, gleich Null war. Die Rotation des Rades mit der constanten Winkelgeschwindigkeit u möge in solcher Richtung erfolgen, dass der Winkel φ mit der Zeit wächst. Dann kann der Winkel φ zur Zeit t

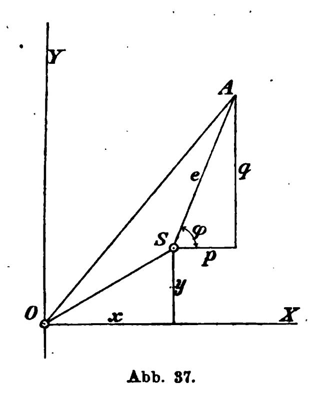


Abb. 37.

$$\varphi = ut$$

gesetzt werden. Die Biegungskraft $\mathfrak{P}$ ist gleichgerichtet mit AO und hat die Grösse $c \,.\, AO$, wenn c einen von der Biegungsfähigkeit der Welle abhängigen constanten Faktor bedeutet, der nach bekannten Sätzen der Festigkeitslehre aus der Spannweite, dem Querschnitte der Welle und dem Elasticitätsmodul stets leicht berechnet werden kann. Die Biegungskraft $\mathfrak{P}$ geht zwar nicht durch den Schwerpunkt S; wenn wir sie uns parallel nach S verlegt denken, tritt vielmehr noch ein Kräftepaar auf. Der Hebelarm dieses Kräftepaars kann aber nach einer schon vorher ausgesprochenen Voraussetzung als unendlich klein angesehen werden, so dass der Einfluss des Kräftepaars auf die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit ausser Betracht bleiben, u also in der That als constant angesehen werden kann.

Horizontal- und Vertikalprojektion der Excentricität e oder

SA sind in der Abbildung mit den Buchstaben p und q bezeichnet; man hat dafür

$$p = e \cos ut; \quad q = e \sin ut.$$

Die dynamische Grundgleichung soll ebenfalls für jede Axenrichtung gesondert angeschrieben werden. Wenn die Masse des Rades mit m bezeichnet wird, ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c(x + p)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c(y + q),$$

denn $x + p$ ist die Horizontalprojektion des Biegungspfeiles OA, daher $c(x + p)$ die Horizontalprojektion der Biegungskraft $\mathfrak{P}$ und das Minuszeichen drückt aus, dass $\mathfrak{P}$ und daher auch die Horizontalprojektion von $\mathfrak{P}$ nach dem Ursprunge O hin, der positiven Seite der X-Axe also entgegengesetzt gerichtet ist. Durch Einführung der für p und q aufgestellten Werthe, gehen die vorigen Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{c} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + x + e \cos ut = 0 \\ \frac{m}{c} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y + e \sin ut = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (131)$$

Hiermit haben wir die Differentialgleichungen des Problems gefunden. Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen können auch sofort angegeben werden; sie lauten

$$\left.\begin{aligned} x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut \\ y = C \sin \alpha t + D \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \sin ut \end{aligned}\right\} . \qquad (132)$$

Hierin ist α eine Constante, die so ermittelt werden muss, dass die Lösungen richtig sind; dagegen sind A, B, C, D willkürliche Integrationsconstanten, durch deren geeignete Wahl man sich jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anzupassen vermag. Hieraus folgt, dass wir in der That die allgemeinste Lösung gefunden haben, falls nur überhaupt die angegebenen Werthe die Gleichungen (131) befriedigen. Man überzeugt sich davon leicht; ich will die kleine Zwischenrechnung, die

dazu erforderlich ist, wenigstens für die sich auf die X-Richtung beziehende Gleichung durchführen.

Aus Differentiation nach t folgt aus Gl. (132)

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha \cos \alpha t - B\alpha \sin \alpha t - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} u \sin ut$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - A\alpha^2 \sin \alpha t - B\alpha^2 \cos \alpha t - e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} u^2 \cos ut.$$

Setzt man nun x und seinen zweiten Differentialquotienten in die erste der Gleichungen (131) ein, so erhält man

$$- \frac{m}{c} \alpha^2 \left(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + e \frac{u^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut\right) + A \sin \alpha t$$
$$+ B \cos \alpha t + e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut + e \cos ut = 0.$$

Die zwei letzten Glieder auf der linken Seite vereinigen sich aber zu

$$e \frac{u^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut$$

und die ganze Gleichung lässt sich daher schreiben

$$\left(1 - \frac{m}{c} \alpha^2\right) \left(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + e \frac{u^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist nun in der That identisch, d. h. für jeden Werth der Veränderlichen t und zugleich für beliebige Werthe der Constanten A und B erfüllt, wenn der in der ersten Klammer stehende Faktor durch eine passende Wahl von α zum Verschwinden gebracht wird. Man muss also

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{133}$$

setzen. — Für die sich auf die Y-Richtung beziehende Gleichung lässt sich die Rechnung genau in derselben Form wiederholen; man findet dabei für α denselben Werth.

Fassen wir nun die durch die Gleichungen (132) beschriebene Bewegung näher ins Auge, so bemerken wir sofort, dass nur die ersten beiden Glieder des dreigliederigen Ausdrucks für x oder y von den Integrationsconstanten, also vom Anfangszustande abhängen; das dritte Glied ist im Uebrigen unabhängig vom Anfangszustande, wohl aber abhängig von

dem constanten Werthe der Winkelgeschwindigkeit u, die ihrerseits wieder in den ersten Gliedern nicht vorkommt. Hiernach können wir uns die Gesammtbewegung des Schwerpunkts in zwei Theile zerlegt denken, also etwa

$$x = x_1 + x_2;$$

$$x_1 = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t; \qquad x_2 = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut$$

setzen und ähnlich für y. Die Integrationsconstanten bestimmen sich aus der anfänglichen Lage des Schwerpunkts zur Zeit $t = 0$ und aus der Geschwindigkeit, die er zu dieser Zeit hatte. Dagegen kommt u in x_1 nicht vor, d. h. der durch x_1 und y_1 beschriebene Bewegungsantheil erfolgt genau so, als wenn das Rad überhaupt nicht rotirte. In diesem Falle hätten wir es aber mit einer gewöhnlichen harmonischen Schwingung zu thun und wir wissen schon, dass der Schwerpunkt hierbei eine Ellipse beschreibt, die auch (bei passenden Anfangsbedingungen) in einen Kreis oder in eine Gerade übergehen kann. Jedenfalls kann dieser Bewegungsantheil, auch wenn etwa zu Anfang durch einen Stoss eine grössere Entfernung des Schwerpunkts von O herbeigeführt wurde, niemals zu dauernd wachsenden Ausschlägen führen. Wir werden vielmehr zu erwarten haben, dass wegen der in der Rechnung nicht berücksichtigten Dämpfung, diese harmonischen Schwingungen in Wirklichkeit nach einem etwa erfolgten Stosse mit der Zeit ebenso abklingen, wie wir dies früher bei der Untersuchung der gedämpften Schwingungen gefunden haben.

Ganz anders ist es aber mit dem durch x_2 und y_2 dargestellten zweiten Bewegungsantheile, der nur von u und sonst gar nicht von den Anfangsbedingungen abhängt. Wäre etwa (nach dem Abklingen der ursprünglich vorhandenen harmonischen Schwingung und bei Fernhalten jedes späteren Stosses von aussen her) x_1 und y_1 zu Null geworden, so müsste der durch x_2 und y_2 dargestellte Bewegungsantheil jedenfalls immer noch fortdauern. Die Bewegung $x_1 y_1$ (wie wir der Kürze halber sagen wollen) giebt demnach eine von zufälligen Umständen abhängige Bewegung an, die der rotirende Körper genau so

ausführt, als wenn er nicht rotirte und die daher nicht als ein wesentlicher Bewegungsantheil aufgefasst werden kann. Jene Bewegung, die grade der rotirenden Welle eigenthümlich ist und die für alle Erscheinungen bestimmend auftritt, für die wir uns hier interessiren, ist vielmehr die Bewegung $x_2 y_2$. Setzen wir also, um diese für sich zu untersuchen, vorläufig den unwesentlichen Bewegungsantheil $x_1 y_1$ gleich Null, so bleibt nur noch die Bewegung

$$x_2 = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \cos ut; \qquad y_2 = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2} \sin ut$$

übrig. Man erkennt sofort, dass diese in einer kreisförmigen Bewegung des Schwerpunkts besteht, die mit der Winkelgeschwindigkeit u beschrieben wird. Der Halbmesser des Kreises r ist

$$r = e \frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2}. \tag{134}$$

Kommt dagegen die Bewegung $x_2 y_2$ zur harmonischen Schwingung $x_1 y_1$ hinzu, so legt der Schwerpunkt eine epicycloidische Bahn zurück; er durchläuft nämlich einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Ellipse der harmonischen Schwingung fortschreitet.

Die Stärke der Ausschläge, die man zu erwarten hat, hängt nun vor allem von der Grösse des Halbmessers r ab. Für kleine Werthe von u wird r negativ; das Vorzeichen ist indessen hier unwesentlich. Jedenfalls ist dem Absolutwerthe nach r etwas grösser als die Excentricität e. Sobald sich nun u dem Werthe von α nähert, fängt r stark zu wachsen an und für $u = \alpha$ liefert Gl. (134) sogar $r = \infty$. Wir sehen hiermit, dass bei dieser Geschwindigkeit oder in ihrer Nähe unter allen Umständen sehr starke Ausschläge zu erwarten sind, d. h. $u = \alpha$ ist die schon aus den Versuchen bekannte kritische Geschwindigkeit. Bezeichnen wir diese mit u_k, so erhalten wir nach Einsetzen des Werthes von α aus Gleichung (133)

$$u_k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \tag{135}$$

Wenn u grösser wird als u_k, nimmt der Absolutwerth von r wieder ab und für eine sehr grosse Geschwindigkeit u wird r fast zu Null. In diesem Falle beschreibt (nahezu wenigstens) der Schwerpunkt nur noch die Ellipse der harmonischen Schwingung oder er bleibt, wenn diese abgeklungen ist und äussere Störungen fern gehalten werden, in Ruhe, indem er dauernd mit O zusammenfällt. Damit kommen wir auf jene Bewegung zurück, die wir schon vorher bei der blos qualitativen Untersuchung als möglich erkannt hatten. Wir wissen aber jetzt auch, dass diese Bewegung eine stabile ist, d. h. dass durch einen äusseren Stoss nur eine harmonische Schwingung von derselben Art wie beim nichtrotirenden Körper hervorgerufen wird, die allmählich abklingt, so dass der Schwerpunkt wieder nach O zurückgeführt wird. Ein Herausschleudern des Rades ist also bei Geschwindigkeiten, die weit über der kritischen liegen, auf keinen Fall zu befürchten.

Man gewinnt noch eine anschaulichere Vorstellung von der schwingenden Bewegung des Rads durch die folgende Construction. Man trage auf der Geraden SA in Abb. 38, die im Uebrigen vollständig mit Abb. 37 übereinstimmt, eine Strecke SP ab, so dass

$$SP = -e\frac{\alpha^2}{u^2-\alpha^2} \qquad (136)$$

ist. Für Werthe von u, die unter dem kritischen Werthe u_k liegen, wird dieser Ausdruck positiv und dann soll SP in jener Richtung abgetragen werden, wie es in der Abbildung geschehen ist. Ein negativer Werth von SP wäre dagegen in der entgegengesetzten Richtung, also von S aus in der Verlängerung von AS abzutragen.

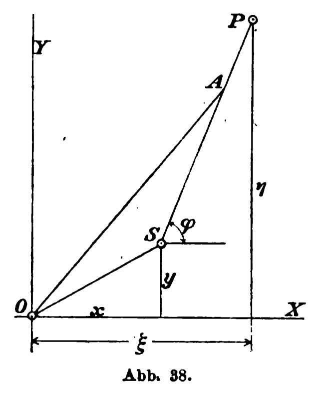


Abb. 38.

Man beachte, dass P hiernach niemals zwischen S und A liegen kann. Bei kleinen Werthen von u liegt P in der Nähe von A, aber ausserhalb der Strecke AS; wenn u wächst, rückt P von A ab und für $u = u_k$ rückt es ins Unendliche. Wenn u noch

grösser wird, rückt P aus dem Unendlichen von der anderen Seite der Geraden her auf S zu; für sehr grosse Werthe von u liegt P ganz in der Nähe von S und für $u = \infty$ fällt P mit S zusammen.

Der in dieser Weise für ein bestimmtes u construirte Punkt P möge auf dem Rade markirt werden und wir wollen zusehen, welche Bewegung dieser Punkt ausführt. Die Coordinaten des Punktes seien mit $\xi\eta$ bezeichnet. Dann ist mit Rücksicht auf Gl. (136)

$$\xi = x - e\,\frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2}\cos ut,$$

$$\eta = y - e\,\frac{\alpha^2}{u^2 - \alpha^2}\sin ut,$$

also, wenn man die Werthe von x und y aus den Gleichungen (132) einführt,

$$\xi = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t,$$
$$\eta = C\sin\alpha t + D\cos\alpha t.$$

Wir erkennen hieraus, dass im allgemeinsten Falle nicht der Schwerpunkt, sondern der Punkt P eine einfache harmonische Schwingung ausführt; der Schwerpunkt, wie schon vorher gefunden, nur dann, wenn P mit S zusammenfällt, d. h. für $u = \infty$. Die ganze Bewegung kann nun in eine Translation zerlegt werden, die den Punkt P auf seiner elliptischen Bahn herumführt und in eine Rotation mit der constanten Winkelgeschwindigkeit u um den Punkt P. Bei dieser Darstellung überblickt man vielleicht noch deutlicher als vorher, dass grosse Bewegungen des Schwerpunktes, also ein starkes Schaukeln des Rades, von der Lage des Punktes P und hiermit von dem Werthe der Winkelgeschwindigkeit u bedingt werden.

Schliesslich möge noch der in Gl. (135) für die kritische Geschwindigkeit aufgestellte Werth in eine Form gebracht werden, die für die unmittelbare Anwendung in der Praxis möglichst bequem ist. Hierzu führe ich eine Kraft P ein, die als Biegungslast an der ruhenden Welle angebracht einen Biegungspfeil von 1 cm herbeiführen würde. Wenn die Abmessungen der Welle u. s. f. gegeben sind, wird man P nach

den Formeln der Festigkeitslehre immer leicht berechnen können. An einer fertigen Maschine kann man P auch durch einen unmittelbaren Belastungsversuch sofort experimentell feststellen. Wenn die Welle zu steif ist, um eine Durchbiegung um 1 cm ohne dauernde Verbiegungen zu ertragen, ist unter P das 10-fache der Biegungslast zu verstehen, die einen Biegungspfeil von 1 mm hervorruft oder überhaupt das n-fache der zum Biegungspfeile $\frac{1}{n}$ cm gehörigen Last. Nach der Bedeutung der Constanten c, die in den vorausgehenden Rechnungen vorkam, hat man dann

$$P = c \cdot 1\,\text{cm} \quad \text{oder} \quad c = \frac{P}{1\,\text{cm}}.$$

Das Gewicht des Rades sei mit Q bezeichnet; an Stelle der Masse m tritt daher jetzt

$$m = \frac{Q}{981\,\text{cm}}\,\text{sec}^2.$$

Ferner soll noch an Stelle der auf Bogenmaass bezogenen Winkelgeschwindigkeit u die Zahl der in der Minute ausgeführten Umdrehungen N eingeführt werden, wie es in der Praxis gebräuchlich ist. Unter N_k ist also die kritische Tourenzahl zu verstehen. Dann ist

$$N_k = \frac{60\,\text{sec} \cdot u_k}{2\pi}$$

und Gl. (135) geht nach Einführung dieser Werthe über in

$$N_k = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{P}{Q} \cdot 981}$$

oder zur Abrundung und genau genug für die praktische Anwendung

$$N_k = 300\sqrt{\frac{P}{Q}}. \tag{137}$$

Die Tourenzahl N_k muss jedenfalls vermieden werden. Wenn die Welle mindestens $1\frac{1}{2}$ bis 2mal so viel Touren macht, kann bereits auf einen ruhigen Gang der Welle gerechnet werden. Besser ist es aber, wenn man die Welle bei gegebener Tourenzahl so schwank construirt, also P so klein macht, dass das nach Gl. (137) berechnete N_k möglichst weit

unter der beabsichtigten Umlaufsgeschwindigkeit liegt. Diese Bemerkung bezieht sich aber natürlich nur auf sehr schnell umlaufende Wellen; bei langsam umlaufenden construirt man umgekehrt die Welle so steif, dass das nach Gl. (137) berechnete N_k weit über der beabsichtigten Geschwindigkeit liegt.

§ 28. Schwingungen von schnell umlaufenden Hängespindeln.

Unter einer Hängespindel soll hier ein Stab verstanden werden, der oben an einem Gelenkbolzen drehbar befestigt ist, von da aus herabhängt und am unteren Ende eine Last trägt, die etwa mit Hülfe eines Hakens daran aufgehängt sein mag. Der Gelenkbolzen ist an einer schnell rotirenden Welle befestigt, er wird von dieser mit herumgenommen und dadurch wird auch die Hängespindel sammt dem daran aufgehängten Körper (etwa einer Centrifugentrommel) in Umdrehung um die lothrechte Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit erhalten.

In der Lage einer solchen Hängespindel ist z. B. jedes Pendel eines gewöhnlichen Watt'schen Centrifugalregulators. Nur wird ein solcher Regulator gewöhnlich mit Geschwindigkeiten betrieben, die weit unter jenen liegen, bei denen sich die merkwürdigen Bewegungserscheinungen einstellen, die hier erörtert werden sollen. Bei Milchcentrifugen und ähnlichen Maschinen von hoher Umdrehungsgeschwindigkeit kommen aber Fälle dieser Art öfters vor.

Wir wissen schon von früher her (Bd. I, § 18), dass ein solches Pendel einfach lothrecht herabhängt, so lange die Winkelgeschwindigkeit einen gewissen Werth, der jetzt mit u_1 bezeichnet werden mag, nicht überschreitet. Bei grösseren Geschwindigkeiten entsteht ein Ausschlag des Pendels, der nach den früher dafür entwickelten Betrachtungen leicht berechnet werden kann. Bei jenen einfachen Ueberlegungen war aber keine Rücksicht auf die Schwingungen genommen worden, die das Pendel (oder die „Hängespindel") um diese Gleichgewichtslage herum auszuführen vermag und es liess sich daher damals nicht voraussehen, dass bei sehr hohen Geschwindigkeiten

ein Zustand eintreten kann, der ganz ähnlich dem bei der Laval'schen Turbinenwelle ist. In der That wird aus der nachfolgenden Untersuchung hervorgehen, dass es für die Hängespindel eine gewisse Geschwindigkeit u_2 giebt, nach deren Ueberschreitung die Spindel wieder im stabilen Zustande lothrecht herabhängt. Dass überhaupt eine genau lothrechte Stellung der Spindel möglich ist bei beliebigen Winkelgeschwindigkeiten, die grösser als u_1 sind, erkennt man freilich leicht, denn wenn die Spindel anfänglich lothrecht herabhing und Stösse von aussen her ferngehalten werden, besteht kein Grund, dass sie nach irgend einer Seite hin ausweichen sollte. Das ist aber im Allgemeinen nur eine labile Lage der Spindel, die von ihr bei der geringsten Störung aufgegeben würde, wobei die Ausschläge schnell wachsen und zu einem Fortschleudern der an ihr aufgehängten Last führen müssten. Praktisch verwendbar wäre daher eine solche Anordnung nicht; sie wird es erst, wenn die Geschwindigkeit über u_2 hinaus gewachsen ist, weil sich zeigen wird, dass die äusseren Erschütterungen dann nicht zu grösseren Ausschlägen führen. Natürlich muss hier, ebenso wie im Falle der Laval'schen Turbinenwelle eine Vorrichtung angeordnet werden, die beim Anlaufen der Maschine, so lange die Geschwindigkeit noch zwischen u_1 und u_2 liegt, stärkere Ausschläge der Spindel verhindert. Sobald u_2 überschritten ist, wird aber diese Anordnung überflüssig und die Spindel läuft frei.

Auch in diesem Falle spielt die elastische Verbiegung der Spindel eine entscheidende Rolle; je schwanker sie construirt ist, um so niedriger liegt u_2 und um so sicherer kann man die Spindel mit hohen Geschwindigkeiten umlaufen lassen. Das ist auch von manchen Praktikern schon wohl bemerkt worden, bevor die Theorie des Vorgangs bekannt war.

Zur rechnerischen Verfolgung der Schwingungsbewegungen, die das untere Spindelende ausführt, denke ich mir durch die Mitte des Gelenkbolzens senkrecht zur Gelenkaxe eine lothrechte Ebene E gelegt, die mit der constanten Winkelgeschwindigkeit u um die lothrechte Axe der Antriebswelle herum-

rotirt. Wir wollen uns auf die Untersuchung der Schwingungsbewegungen beschränken, bei denen sich das Spindelende nur so wenig von der lothrechten Umdrehungsaxe entfernt, dass die Ausschläge im Vergleiche zur Länge der Spindel als unendlich klein angesehen werden können. Dann bewegt sich das Spindelende (genau genug) in einer horizontalen Ebene. Diese Ebene sei die Zeichnungsebene von Abb. 39; O ist die Spur der lothrechten Umdrehungsaxe, EE die Spur der Ebene E. Wenn keine Verbiegungen der Spindel vorkämen, müsste das Spindelende stets in der rotirenden Ebene E enthalten sein. Der Ausschlag der Spindel würde dann durch eine auf EE liegende Strecke a gemessen, die gleich der Spindellänge mal dem Winkel wäre, um den sich die Spindel gegen den Gelenkbolzen gedreht hat. In Wirklichkeit liegt aber das Spindelende S im gegebenen Augenblicke nicht in EE, sondern es ist wegen der Verbiegung um eine Strecke b davon entfernt. Der Umdrehungssinn der Hängespindel möge so angenommen werden, dass der Winkel φ, den die Ebene EE mit der X-Axe des festliegenden Coordinatensystems bildet, im Laufe der Zeit wächst. Dann können wir sagen, dass in der Abbildung S hinter der Ebene EE zurückgeblieben ist und immer, wenn dies der Fall ist, wollen wir die Biegung b positiv rechnen.

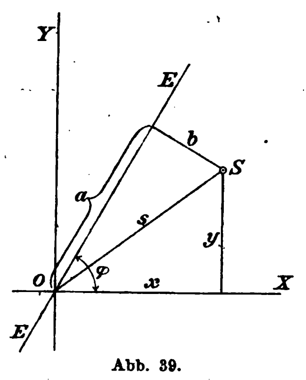


Abb. 39.

Dass überhaupt ein Anlass zu Biegungen und zwar zu starken Biegungen der Hängespindel besteht, ist übrigens leicht einzusehen. Man nehme z. B. an, dass der Ausschlag a, der von der Drehung im Gelenke herrührt, grade im Wachsen begriffen sei. Dann erlangt die Masse m der am Ende der Spindel hängenden Last eine grössere Geschwindigkeit, denn bei constanter Winkelgeschwindigkeit u wird die lineare Geschwindigkeit von m um so grösser, je mehr sich m von der Um-

drehungsaxe entfernt. Die Geschwindigkeit von m kann aber nur durch eine daran angreifende Tangentialkraft beschleunigt werden. Es muss also eine Kraft an m angreifen, die senkrecht zur Ebene E steht und die einzige Kraft, die in dieser Richtung auf m übertragen werden kann, kann nur die durch eine Verbiegung b geweckte Biegungskraft sein. Man sieht sofort, dass das Spindelende S in der That hinter der Ebene E zurückbleiben muss, wenn der Ausschlag a im Wachsen begriffen sein soll, denn die Spindel sucht sich dann wieder grad zu strecken, also b zu vermindern und sie treibt hierbei die Masse m, die wir uns in S concentrirt denken können, gegen E hin, bewirkt also damit die erforderliche Tangentialbeschleunigung von m. Umgekehrt muss bei abnehmendem Ausschlage a die Biegung b negativ sein, S also vor der Ebene E (im Sinne der Umdrehung gezählt) liegen. Bei grossen Winkelgeschwindigkeiten sind die Tangentialbeschleunigungen, die zu Aenderungen des Ausschlags a gehören, sehr beträchtlich; sie wachsen, wie man leicht erkennt, mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit, sind also z. B. bei Centrifugengeschwindigkeiten von 6000 Touren 10000 Mal so gross als bei einer langsamen Rotation von 60 Touren in der Minute. Hieraus sieht man auch, wie wichtig die Verbiegungen, die unter dem Einflusse von Kräften entstehen, die nach diesem Gesetze zunehmen, bei grossen Umdrehungszahlen werden müssen, wenn sie auch bei den gewöhnlich vorkommenden niedrigen Geschwindigkeiten nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen. Jedenfalls müssen wir also darauf rechnen, dass bei hinreichend hohen Geschwindigkeiten die Biegungen b von gleicher Grössenordnung mit den Ausschlägen a selbst zu werden vermögen und wir sehen, dass die Theorie der Schwingungsbewegungen nur unter Berücksichtigung dieser Biegungen zu richtigen Resultaten führen kann.

Die rechtwinkligen Coordinaten von S sind mit x und y bezeichnet; sie lassen sich mit Hülfe des Winkels φ, wie man aus Abb. 39 sofort erkennt, leicht in a und b ausdrücken und zwar erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + b\sin\varphi \\ y &= a\sin\varphi - b\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{138}$$

Um die Beschleunigungen von S in den Richtungen der Coordinatenaxen zu erhalten, differentiire ich diese Gleichungen zweimal nach t, wobei zu beachten ist, dass

$$\frac{d\varphi}{dt} = u$$

oder gleich der constanten Winkelgeschwindigkeit ist. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2b}{dt^2}\sin\varphi - 2\frac{da}{dt}u\sin\varphi \\ &\quad + 2\frac{db}{dt}u\cos\varphi - au^2\cos\varphi - bu^2\sin\varphi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2}\sin\varphi - \frac{d^2b}{dt^2}\cos\varphi + 2\frac{da}{dt}u\cos\varphi \\ &\quad + 2\frac{db}{dt}u\sin\varphi - au^2\sin\varphi + bu^2\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{139}$$

Diese Werthe mit der Masse m multiplicirt geben nach dem dynamischen Grundgesetze die in den Richtungen der Coordinatenaxen genommenen Componenten der resultirenden Kraft an, die auf die Masse m (die hier stillschweigend stets als materieller Punkt behandelt wurde) wirkt. Auf m wirken aber drei Kräfte ein: das Gewicht Q von der Grösse mg, die von der Spindel in axialer Richtung (d. h. längs der Verbindungslinie beider Spindelenden) übertragene Aufhängekraft und die „Biegungskraft", die wie bei der Untersuchung der Lavalschen Turbinenwelle gleich cb gesetzt werden kann; die Constante c ist also wiederum ein Maass für die Elasticität der Spindel. Die zuletzt angeführte Kraft liegt schon in der Coordinatenebene und auch die beiden ersten müssen sich zu einer Resultirenden in der Coordinatenebene vereinigen lassen, da die Bewegung in dieser Ebene verläuft. Diese Resultirende ist vom Spindelende nach dem Coordinatenursprunge hin gerichtet und gleich $Q\frac{s}{l}$ zu setzen, wenn mit s der Abstand beider Punkte und mit l die Spindellänge bezeichnet wird.

Zerlegt man die Resultirende und die Biegungskraft in Componenten nach den Coordinatenaxen, so hat man nach der dynamischen Grundgleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2} &= -Q\frac{x}{l} - cb\sin\varphi \\ \frac{Q}{g}\frac{d^2y}{dt^2} &= -Q\frac{y}{l} + cb\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

Hier sind noch für die Beschleunigungscomponenten ihre Werthe aus den Gleichungen (139) einzusetzen. Führt man dies aus und ordnet nach den Faktoren $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so gehen die Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} &\sin\varphi\left\{\frac{Q}{g}\frac{d^2b}{dt^2} - 2\frac{Q}{g}u\frac{da}{dt} - \frac{Q}{g}u^2b + \frac{Q}{l}b + cb\right\} + \\ &+\cos\varphi\left\{\frac{Q}{g}\frac{d^2a}{dt^2} + 2\frac{Q}{g}u\frac{db}{dt} - \frac{Q}{g}u^2a + \frac{Q}{l}a\right\} = 0 \\ &\sin\varphi\left\{\frac{Q}{g}\frac{d^2a}{dt^2} + 2\frac{Q}{g}u\frac{db}{dt} - \frac{Q}{g}u^2a + \frac{Q}{l}a\right\} + \\ &+\cos\varphi\left\{-\frac{Q}{g}\frac{d^2b}{dt^2} + 2\frac{Q}{g}u\frac{da}{dt} + \frac{Q}{g}u^2b - \frac{Q}{l}b - cb\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Man bemerkt nun sofort, dass der Faktor von $\cos\varphi$ in der ersten Gleichung mit dem Faktor von $\sin\varphi$ in der zweiten übereinstimmt, während der Faktor von $\sin\varphi$ in der ersten Gleichung das Negative des Faktors von $\cos\varphi$ in der zweiten Gleichung ist. Die beiden Gleichungen sind also, wenn man die Klammerwerthe zur Abkürzung mit Φ und Ψ bezeichnet, von der Form

$$\Phi\sin\varphi + \Psi\cos\varphi = 0,$$
$$\Psi\sin\varphi - \Phi\cos\varphi = 0.$$

Aus der ersten erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\Psi}{\Phi}$$

und aus der zweiten

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Phi}{\Psi}.$$

Wenn beide mit einander verträglich sein sollen, muss also

$$-\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad \text{d. h.} \quad \Phi^2 = -\Psi^2$$

sein, und da sowohl Φ als Ψ stets reelle Werthe besitzen, kann dies nur dadurch erfüllt sein, dass beide gleich Null sind.

Man kann hiernach die Gleichungen (141) durch zwei einfachere ersetzen, die aussprechen, dass Φ und Ψ Null sind. Nach Wegheben des Faktors $\frac{Q}{g}$ erhält man daher

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 b}{dt^2} - 2u\frac{da}{dt} - u^2 b + \frac{g}{l} b + \frac{cg}{Q} b = 0 \\ \frac{d^2 a}{dt^2} + 2u\frac{db}{dt} - u^2 a + \frac{g}{l} a = 0 \end{array}\right\} . \tag{142}$$

Das sind die Differentialgleichungen unseres Problems. Da die abhängigen Variabeln a und b noch in beiden vorkommen, eliminire ich zunächst die Veränderliche b, indem ich die erste Gleichung nach t differentiire und für $\frac{db}{dt}$ und $\frac{d^3 b}{dt^3}$ die sich durch Auflösen der zweiten Gleichung nach $\frac{db}{dt}$ ergebenden Werthe einführe. Hierdurch erhält man für den Ausschlag a die gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{d^4 a}{dt^4} + \frac{d^2 a}{dt^2}\left(\frac{2g}{l} + \frac{cg}{Q} + 2u^2\right) + a\left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q} - u^2\right) = 0. \tag{143}$$

Eliminirt man auf dieselbe Weise a anstatt b, so findet man, dass auch b genau derselben Differentialgleichung wie a genügen muss. Man braucht in Gl. (143) nur überall b anstatt a zu schreiben, um die Differentialgleichung für b zu erhalten.

Die in Gl. (143) vorkommenden Klammerwerthe sind constante Grössen. Zur Abkürzung möge dafür gesetzt werden

$$\left.\begin{array}{c} \frac{2g}{l} + \frac{cg}{Q} + 2u^2 = \lambda \\ \left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q} - u^2\right) = \mu \end{array}\right\}, \tag{144}$$

so dass Gl. (143) in der einfacheren Form

$$\frac{d^4 a}{dt^4} + \lambda\frac{d^2 a}{dt^2} + \mu a = 0 \tag{145}$$

angeschrieben werden kann. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich aber sofort in der Form

$$a = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 t} + C_4 e^{\alpha_4 t} \tag{146}$$

angeben, wobei die C die willkürlichen Integrationsconstanten, die α aber constante Werthe sind, die als Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\alpha^4 + \lambda \alpha^2 + \mu = 0 \tag{147}$$

zu ermitteln sind. Der Nachweis dafür, dass der in Gl. (146) für α angegebene Werth in der That der Gl. (145) unter Beachtung der Nebenbedingung (147) genügt, kann leicht erbracht werden; diese einfache Zwischenrechnung soll aber weggelassen werden.

Die Auflösung der Gl. (147) liefert

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}}. \tag{148}$$

Von den vier Wurzeln sind also mindestens zwei imaginär, denn λ setzt sich aus lauter positiven Gliedern zusammen und ist daher selbst positiv.

Exponentialglieder mit rein imaginären Exponenten in Gl. (146) lassen sich in bekannter Weise auf reelle trigonometrische Functionen zurückführen; sie stellen also periodische Aenderungen des Ausschlags a dar, die kein dauerndes Anwachsen des Ausschlags herbeiführen können. Nimmt man dagegen das positive Vorzeichen vor der inneren Wurzel, so kann man reelle Werthe von α erhalten. In diesem Falle kommt in Gl. (146) ein Glied vor, das mit wachsendem t unbegrenzt weiter wächst. Wenn auch der Ausschlag a im Anfangszustande sehr klein war, so muss er in diesem Falle immer weiter anwachsen; ohne Führung kann also die Hängespindel dann nicht laufen.

Wir erkennen also zunächst als nothwendige Bedingung für den ruhigen Gang, dass μ jedenfalls nicht negativ sein darf, denn sonst hätten wir sofort reelle Werthe von α. Wenn dagegen μ positiv und kleiner als $\frac{\lambda^2}{4}$ ist, kommen nur imaginäre Werthe von α vor und Gl. (146) stellt eine periodische Bewegung dar. In diesem Falle haben wir einen ruhigen Gang der Spindel zu erwarten. Wäre schliesslich μ grösser als $\frac{\lambda^2}{4}$,

so hätten die Wurzeln in Gl. (148) neben einem imaginären auch einen reellen Theil und wir hätten abermals in Gl. (146) Glieder, die mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Sobald man aber für λ und μ ihre Werthe aus den Gleichungen (144) einsetzt, erkennt man, dass μ niemals grösser als $\frac{\lambda^2}{4}$ werden kann, so dass dieser Fall thatsächlich ausgeschlossen ist.

Als einzige Bedingung für den ruhigen Gang bleibt demnach diese bestehen, dass der Werth

$$\mu = \left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q} - u^2\right)$$

positiv ist. Bei kleinen Werthen von u ist μ jedenfalls positiv und wir finden damit nur bestätigt, dass die Hängespindel bei niedrigen Geschwindigkeiten jedenfalls ruhig laufen kann, ohne zu grösseren Ausschlägen zu gelangen. Sobald aber u den Werth

$$u_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{149}$$

überschritten hat, wird μ negativ. Es ist dies derselbe Werth, der schon in Band I, § 18 auf einfacherem Wege gefunden und dort mit $u_{\min}$ bezeichnet wurde.

Wenn aber u noch weiter wächst, wird schliesslich auch der zweite Faktor in dem Ausdrucke für μ negativ und damit das ganze Produkt wieder positiv. Der Grenzwerth ist

$$u_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q}}. \tag{150}$$

Rechnet man wie am Schlusse des vorigen Paragraphen die Winkelgeschwindigkeit u_2 auf Touren N_2 in der Minute um und führt an Stelle von c die Kraft P ein, die das untere Ende der Hängespindel um 1 cm aus der Ebene E herauszubiegen vermag, so erhält man an Stelle von Gl. (150), wenn auch die Spindellänge l in cm ausgedrückt wird,

$$N_2 = 300\sqrt{\frac{1}{l} + \frac{P}{Q}}, \tag{151}$$

eine Gleichung, die sich von der für die kritische Tourenzahl bei der Laval'schen Turbine nur durch das Hinzutreten des Summanden $\frac{1}{l}$ unter dem Wurzelzeichen unterscheidet. Bei

praktisch vorliegenden Fällen wird aber dieser Summand gewöhnlich nur klein sein gegenüber dem anderen, so dass sich N_2 nur wenig von dem kritischen Werthe N_k des vorigen Paragraphen unterscheidet. — Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht aber hier darin, dass wir jetzt ein ganzes Geschwindigkeitsgebiet (von u_1 bis u_2) haben, innerhalb dessen ursprünglich kleine Ausschläge bis zu endlicher Grösse anwachsen müssen, wenn dies nicht durch eine Hülfsführung verhindert wird, während bei der Laval'schen Turbinenwelle nur für eine ganz bestimmte einzelne Geschwindigkeit ein unbegrenztes Anwachsen der ursprünglich sehr klein vorausgesetzten Ausschläge zu erwarten war.

Bei der Hängespindel reichen die Gebiete für den ruhigen Gang

a) bei kleinen Geschwindigkeiten

$$\text{von } u = 0 \quad \text{bis } u = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

b) für grosse Geschwindigkeiten

$$\text{von } u = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q}} \text{ bis } u = \infty.$$

Construirt man die Hängespindel sehr steif, so wird P sehr gross und man kann den ruhigen Gang in dem oberen Geschwindigkeitsgebiete erst bei sehr hohen Umdrehungszahlen erreichen; man wird daher besser thun, die Spindel ziemlich biegsam zu wählen.

Aufgaben.

10. Aufgabe. Ein Stab, auf den sonst keine äusseren Kräfte wirken und der vorher in Ruhe war, erhält plötzlich einen Stoss von gegebenem Impulse an seinem einen Ende rechtwinklig zur Längsrichtung; man soll die zu Stande kommende Bewegung angeben.

Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hülfe des Flächensatzes (so wie in §. 25a) oder mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips lösen; wir entscheiden uns hier für das d'Alembert'sche Princip, weil man dieses ohnehin anwenden muss, wenn etwa daneben noch nach der Biegungsbeanspruchung gefragt werden sollte, die der Stab bei dem Stosse erfährt.

Es wird sich vor allen Dingen darum handeln, den Bewegungszustand des Stabs unmittelbar nach dem Stosse zu erfahren. Die Bewegung ist jedenfalls eine ebene; der Stab bewegt sich nämlich in jener Ebene, die durch die Stabmittellinie und durch die Richtung der Stosskraft gelegt werden kann. Eine ebene Bewegung kann in jedem Augenblicke als eine Drehung um eine zur Bewegungsebene senkrechte Axe oder, wie man einfacher sagen kann, als eine Drehung um einen in dieser Ebene enthaltenen Punkt aufgefasst werden. Wir wollen zunächst die Lage dieses Momentancentrums aufsuchen.

Dazu bringen wir an jedem Massenelement des Stabes in einem bestimmten Augenblicke während des Stosses eine Trägheitskraft an. In Abb. 40 sei AB die Stabmittellinie; die Stosskraft P wirke am Ende B. Wenn die Masse des Stabs mit m und seine Länge mit l bezeichnet wird, kommt auf ein Längenelement dx im Abstande x vom Momentancentrum O die Masse $\frac{m\,dx}{l}$. Wenn die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t (während des Stosses) mit u bezeichnet wird, ist die Geschwindigkeit v dieses Massenelementes gleich ux und man hat

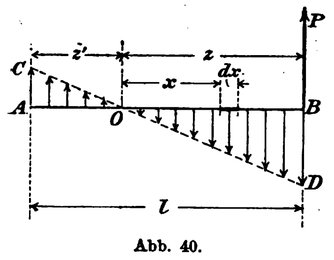


Abb. 40.

$$\frac{dv}{dt} = x\frac{du}{dt}.$$

Dieser Beschleunigung entspricht eine Trägheitskraft von der Grösse

$$\frac{m\,dx}{l}\,x\,\frac{du}{dt},$$

die also mit x proportional ist. Denkt man sich die Trägheitskräfte überall abgetragen, so liegen die Endpunkte auf einer durch O gehenden graden Linie, die in der Abbildung mit CD bezeichnet ist. Die Trägheitskräfte müssen nun in jedem Augenblicke während des Stosses mit der Stosskraft P im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben eine Momentengleichung für O als Momentenpunkt an und erhalten

$$Pz = \frac{m}{l}\frac{du}{dt}\left(\int_0^z x^2\,dx + \int_0^{z'} x_1^2\,dx_1\right).$$

Mit x_1 sind hier die Abstände der nach links hin von O liegenden Stabtheile bezeichnet. Die Ausführung der Integrationen liefert

$$Pz = \frac{m}{l}\frac{du}{dt}\cdot\frac{z^3 + z_1^3}{3}.$$

Zugleich muss aber die algebraische Summe aller Kräfte gleich Null sein. Wir haben daher noch die weitere Gleichung (die auch schon aus dem Satze über die Bewegung des Schwerpunkts hervorgeht)

$$P = \frac{m}{l}\frac{du}{dt}\left(\int\limits_0^z x\,dx - \int\limits_0^{z_1} x_1\,dx_1\right) = \frac{m}{l}\frac{du}{dt}\frac{z^2 - z_1^2}{2}.$$

Der Vergleich beider Gleichungen liefert

$$\frac{z^3 + z_1^3}{3} = \frac{z^3 - zz_1^2}{2} \quad \text{oder} \quad z^3 = 2z_1^3 + 3zz_1^2.$$

Setzt man nun noch $z_1 = l - z$ ein, so geht dies über in

$$z^3 = 2(l - z)^3 + 3z(l - z)^2 \quad \text{und hieraus} \quad z = \frac{2l}{3}.$$

Die vorausgehende Gleichung für P geht damit über in

$$P = \frac{m}{l}\frac{du}{dt}\cdot\frac{l^2}{6}$$

und hiernach ist die Winkelgeschwindigkeit, die der Stab nach Ablauf des Stosses erlangt hat,

$$u = \frac{6}{ml}\int P\,dt.$$

Wenn von einem Stosse gesprochen wird, setzt man dabei stillschweigend voraus, dass die Zeit, während deren er ausgeübt wird, so klein ist, dass sich der Körper inzwischen nicht merklich aus der Anfangslage verschieben kann. Wir kennen daher jetzt den Bewegungszustand des Stabes unmittelbar nach dem Stosse vollständig. Weiterhin wirken keine äusseren Kräfte mehr auf ihn ein und er bewegt sich daher nach den Lehren über die Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers. Der Schwerpunkt beschreibt also eine gradlinige Bahn mit der Geschwindigkeit $\frac{ul}{6}$, die er beim Stosse erlangt hat. Zugleich dreht sich der Körper mit der Geschwindigkeit u stetig weiter, denn die zugehörige Drehaxe ist offenbar eine freie Axe. Alle übrigen Punkte ausser dem Schwerpunkte beschreiben daher cycloidische Bahnen. — Sieht man P und die Trägheitskräfte als Lasten an dem ruhenden Stabe an, so kann auch die Biegungsbeanspruchung, die er erfährt, berechnet werden; man muss aber hierzu nicht nur wissen, wie gross der Stossimpuls

$\int P dt$ im Ganzen ist, sondern auch, wie gross die Kraft P zu irgend einer Zeit selbst ist. Je schneller der Stoss bei gegebenem Impuls sich abspielt, um so grösser wird die Biegungsbeanspruchung und bei sehr grossen Werthen von P wird es auch nöthig, die elastische Formänderung des Stabes während des Stosses selbst zu verfolgen, wovon bei der vorausgegangenen Rechnung abgesehen werden konnte.

11. Aufgabe. Man soll auf Grund des d'Alembert'schen Princips die Biegungsbeanspruchung berechnen, die die Pleuelstange einer schnelllaufenden Dampfmaschine erfährt.

Lösung. Schon im ersten Bande sind einige Betrachtungen über den Kurbelmechanismus der Dampfmaschine durchgeführt

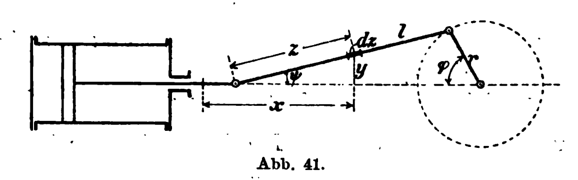


Abb. 41.

worden, an die ich hier anknüpfen kann. Abb. 41 gleicht sonst ganz der Abb. 55 auf S. 206 der 2. Aufl. des ersten Bandes und es ist hier nur noch ein Längenelement dz der Pleuelstange im Abstande z vom Kreuzkopfzapfen besonders hervorgehoben. Die Ordinate von dz ist mit y und die von der linken Todpunktlage aus gerechnete Abscisse mit x bezeichnet.

Mit der schon früher benützten und für den vorliegenden Fall stets hinreichenden Annäherung $\cos\psi = 1$ erhält man

$$x = z + r - r\cos\varphi; \quad y = \frac{z}{l} r \sin\varphi.$$

Beachtet man nun, dass z constant ist, so lange man immer nur dasselbe Massentheilchen ins Auge fasst und dass auch

$$\frac{d\varphi}{dt} = u$$

als constant betrachtet werden kann, so erhält man für die Beschleunigungscomponenten des Massentheilchens

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ru^2\cos\varphi; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{z}{l} ru^2 \sin\varphi = -yu^2.$$

Die zum Längenelemente dz der Stange gehörige Masse sei mit m bezeichnet; dann sind die mit X und Y bezeichneten Componenten der Trägheitskraft, die an dz angebracht werden muss,

$$X = - mru^2 \cos\varphi; \quad Y = myu^2.$$

Hiernach ist X unabhängig von z, also für alle Massentheilchen der Stange gleich gross (bei gleichem m), während Y mit y oder mit z proportional von dem Kreuzkopfende der Stange zum Kurbelzapfenende hin wächst. Die durch die Vorzeichen ausgewiesenen Richtungen von X und Y sind in Abbildung 42 noch besonders eingetragen.

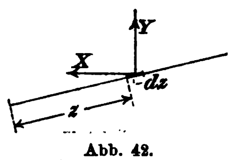


Abb. 42.

Um die Biegungsbeanspruchung der Pleuelstange zu berechnen, muss man sich die Stange, die hierbei als ein auf zwei Stützen ruhender Balken aufzufassen ist, in Ruhe denken und die Trägheitskräfte als Lasten daran anbringen. Es fragt sich dann, bei welcher Stellung der Stange die Biegungsbeanspruchung am grössten wird. Auf die Lastcomponenten X, die im Uebrigen zu den schon im ersten Bande besprochenen Erscheinungen des „Massendrucks" führen, kommt bei der Biegung offenbar nicht viel an, da sie nur wenig von der Richtung der Stange abweichen, also im Wesentlichen nur eine axiale Beanspruchung der Stange herbeiführen. Die Lastcomponenten Y stehen dagegen in allen Lagen nahezu senkrecht zur Stange und wir müssen uns daher fragen, wann sie am grössten werden. Dies trifft dann zu, wenn $\sin\varphi = 1$ wird, oder (was hier mit Rücksicht auf die Vernachlässigungen, die wir von vornherein machten, auf dasselbe hinauskommt) wenn ψ seinen grössten Werth annimmt.

Das Belastungsschema wird demnach durch Abb. 43 zum Ausdruck gebracht. Die grösste Intensität nimmt die Belastung am rechten Auflager an. Für jedes Massentheilchen m ist dort die Last mru^2 anzubringen. Das ist übrigens genau der Werth der Centrifugalkraft für das den Kurbelwarzenkreis durchlaufende Theilchen und die Last muss auch diese Grösse annehmen, da ja an dieser Stelle die Trägheitskraft sich in der That auf eine einfache Centrifugalkraft reducirt. Vom rechten Auflager nimmt die Belastung nach links hin gleichmässig ab.

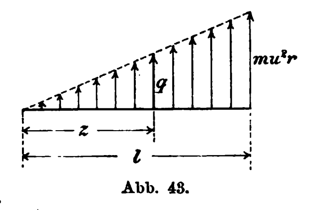


Abb. 43.

Wir haben nun eine einfache Aufgabe der Festigkeitslehre vor uns, die mit der in Aufg. 16 des zweiten Bandes auf graphischem Wege gelösten fast vollkommen übereinstimmt. Die auf die Längeneinheit entfallende Belastung q im Abstande z vom linken Auflager ist

$$q = \frac{Q}{gl} ru^2 \cdot \frac{z}{l},$$

wenn das ganze Gewicht der hierbei als cylindrisch vorausgesetzten Stange mit Q bezeichnet wird. Man kann nun leicht die Auflagerkräfte auf beide Stützpunkte und hiernach das Biegungsmoment für einen Querschnitt z berechnen. Dann sucht man das Maximalmoment auf und berechnet die Biegungsspannung σ mit Hülfe der gewöhnlichen Biegungsgleichung.

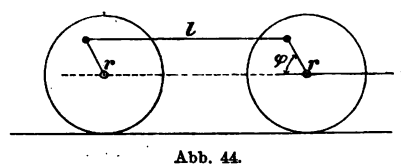


Abb. 44.

12. Aufgabe. Man soll die Biegungsbeanspruchung einer Kuppelungsstange AB zwischen zwei Treibrädern einer Lokomotive berechnen (vgl. Abb. 44).

Lösung. Die Aufgabe kann ganz ähnlich wie die vorhergehende behandelt werden; sie ist aber insofern einfacher, als sich die Bewegung der Kuppelungsstange in zwei Antheile zerlegen lässt, von denen der eine die gleichförmige gradlinige Translationsbewegung darstellt, die die Stange mit dem Fahrzeuge zusammen ausführt, während der andere Antheil in der Relativbewegung gegen das Fahrzeug besteht. Der erste Antheil kann zu keinen Trägheitskräften führen; man braucht sich also nur um den zweiten zu kümmern. Dieser besteht ebenfalls in einer Translationsbewegung, bei der alle Punkte Kreise vom Halbmesser r zurücklegen. Die Trägheitskräfte sind daher Centrifugalkräfte von der Grösse mu^2r und gleichmässig über die ganze Stangenlänge vertheilt. Die Biegung wird am grössten, wenn die Centrifugalkräfte senkrecht zur Stange stehen, also in der tiefsten oder in der höchsten Lage der Stange; bei der tiefsten addirt sich noch die Biegung durch das Eigengewicht, das freilich gegenüber den Trägheitswirkungen bei einer schnell laufenden Lokomotive nur gering ist.

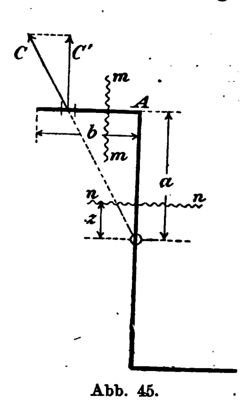


Abb. 45.

13. Aufgabe. Die Mittellinie eines Stabes hat die in Abb. 45 angegebene Z-förmige Gestalt. Der Stab rotirt um den in der Mitte liegenden Punkt O; man soll die Biegungsbeanspruchung und die elastische Formänderung berechnen, die der Stab erfährt.

Lösung. Der eigentlich dynamische Theil der Aufgabe ist hier sehr einfach. Man braucht nur überall die Centrifugalkräfte anzubringen, um die Aufgabe auf eine der Festigkeitslehre zurückzuführen. Die Centrifugalkräfte am mittleren Theile tragen zur Biegung nichts bei, sondern nur die an den Seitenfortsätzen. Für

einen Querschnitt mm berechnet man die Summe der statischen Momente der links von mm liegenden Centrifugalkräfte C. Da $C = mu^2 r$ ist, hat man für die Vertikalcomponente C' von C den Werth $mu^2 a$, d. h. die Lasten C' sind über den Seitenfortsatz gleichmässig vertheilt. Das grösste Biegungsmoment tritt im Punkte A auf und es ist

$$M_{\max} = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2},$$

wenn mit Q das Gewicht des seitlichen Armes bezeichnet wird. Auch der mittlere Stabtheil wird verbogen und das Biegungsmoment kann für jeden Querschnitt nn ebenfalls sofort angegeben werden. Es ist

$$M = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2} - \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} (a - z) = \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} z.$$

Für $z = 0$ wird M zu Null. — Nachdem die Biegungsmomente bekannt sind, kann man die auftretenden Verbiegungen so wie bei einem Bogenträger (Band III, § 33) berechnen.

14. Aufgabe. In welchem Abstande vom Schwerpunkte muss ein physisches Pendel aufgehängt werden, wenn die Schwingungsdauer möglichst klein werden soll?

Lösung. Die Schwingungsdauer hängt von der reducirten Pendellänge l ab und diese ist nach den Gleichungen (76) und (77)

$$l = \frac{g\Theta}{Qs} = \frac{t^2}{s}.$$

Das Trägheitsmoment Θ für eine Axe, die den Abstand s vom Schwerpunkte hat, folgt aus dem Trägheitsmomente Θ_0 für die dazu parallele Schwerpunktsaxe nach der Formel (vgl. Band III, Gl. (53),

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{Q}{g} s^2$$

oder, wenn man mit den Trägheitsradien t und t_0 rechnet,

$$t^2 = t_0^2 + s^2.$$

Für l erhält man daher

$$l = s + \frac{t_0^2}{s}.$$

Dieser Ausdruck soll durch geeignete Wahl von s zu einem Minimum gemacht werden. Durch Differentiiren findet man

$$\frac{dl}{ds} = 1 - \frac{t_0^2}{s^2} = 0 \quad \text{oder} \quad s = t_0.$$

Da ferner

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = 2\frac{t_0^2}{s^3},$$

also positiv ist, hat man für $s = t_0$ in der That ein Minimum und zwar $l_{\min} = 2t_0$. Man erkennt zugleich, dass die Schwingungsdauer für alle unter einander parallelen Axen, die denselben Abstand vom Schwerpunkte haben, gleich gross ist. Der Kreis vom Halbmesser t_0 um den Schwerpunkt enthält alle Aufhängepunkte, um die der Körper seine schnellsten Schwingungen ausführen kann. Je weiter sich der Aufhängepunkt nach aussen oder nach innen von diesem Kreisumfange entfernt, um so langsamer werden die Schwingungen. Wenn der Aufhängepunkt unendlich nahe dem Schwerpunkte liegt, dauern die Schwingungen unendlich lange und dasselbe gilt auch, wenn der Aufhängepunkt in einen Abstand vom Schwerpunkte rückt, der als unendlich gross angesehen werden kann.

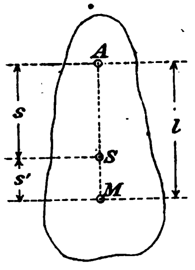


Abb. 46.

15. Aufgabe. Man soll beweisen, dass der Aufhängepunkt und der Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels mit einander vertauscht werden können.

Lösung. In Abb. 46 sei A der Aufhängepunkt, S der Schwerpunkt und M der Schwingungsmittelpunkt. Dann ist nach der Definition des Schwingungsmittelpunktes $AM = l$ und daher nach den schon in der vorhergehenden Aufgabe benutzten Formeln

$$l = s + \frac{t_0^2}{s},$$

woraus, wenn man den Abstand SM mit s' bezeichnet, folgt

$$s' s = t_0^2.$$

Macht man nun M zum Aufhängepunkte, so tritt s' an Stelle von s und daher nach der vorausgehenden Gleichung, die auch im neuen Falle wieder erfüllt sein muss, zugleich s an Stelle von s', d. h. A ist nun in der That der Schwingungsmittelpunkt.

Ein Pendel, das zwei Schneiden bei A und M besitzt, so dass die in der Aufgabe vorkommende Vertauschung von Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt sofort praktisch ausgeführt werden kann, heisst ein Reversionspendel. Man benutzt es zur Ausführung absoluter Schweremessungen, d. h. zur Messung der Fallbeschleunigung g. Zu diesem Zwecke werden die Schneiden mit Hülfe von Stellschrauben so eingestellt, dass die Schwingungsdauer

für beide Schneiden gleich gross wird. Dies lässt sich leicht sehr genau erreichen, da man nicht blos eine, sondern eine grosse Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen zum Vergleiche benutzen kann. Dann muss der Schneidenabstand möglichst genau gemessen werden: er giebt die reducirte Pendellänge an. Da die Schwingungsdauer, die dieser entspricht, ebenfalls aus der Beobachtung gegeben ist, kann mit Hülfe dieser Daten die Fallbeschleunigung g nach den Gleichungen (56) oder (57) berechnet werden.

16. Aufgabe. An den beiden Enden eines Seils, das über eine Rolle läuft, hängen zwei gleich schwere Personen, die vorher ruhten. Eine klettert an dem Seile in die Höhe; was geschieht, wenn Reibung, Seilsteifigkeit u. s. f. ausser Acht gelassen werden?

Lösung. Am einfachsten behandelt man die Aufgabe mit Hülfe des Flächensatzes. Den Momentenpunkt lege man auf den Rollenmittelpunkt. Dann verschwinden die Momente aller Kräfte, die von aussen her auf den aus der Rolle, dem Seile und den beiden Personen gebildeten Punkthaufen einwirken. Der Auflagerdruck geht nämlich durch den Momentenpunkt und die Gewichte der beiden Personen haben Momente von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung. Nach dem Flächensatze muss auch das Moment der Bewegungsgrössen constant und zwar, da es von Anfang an Null war, auch ferner gleich Null bleiben. Vernachlässigt man die Massen der Rolle und des Seils gegenüber jenen der beiden Personen, so müssen die Bewegungsgrössen, die diese erlangen, von gleicher Grösse sein, da auch die Hebelarme (gleich dem Rollenhalbmesser) gleich gross sind. Das entgegengesetzte Vorzeichen des Moments verlangt, dass die Geschwindigkeiten beider Personen nach oben hin gerichtet sind. Wenn also der Eine hinaufklettert, senkt sich zugleich das Seil unter ihm, so dass er in Wirklichkeit nur halb so hoch hinaufkommt, als er an dem Seile in die Höhe kletterte. Der Andere dagegen, der sich gar nicht rührt, wird hierbei ebenfalls mit in die Höhe genommen und zwar so, dass beide stets gleich hoch bleiben. — Natürlich ändern sich diese Ergebnisse etwas ab, wenn man die Massen der Rolle und des Seils oder auch Reibung und Seilsteifigkeit mit in Berücksichtigung zieht.

17. Aufgabe. Ein homogener Cylinder rotirt mit gegebener Winkelgeschwindigkeit u um seine Axe; man soll den Drall für diese Axe berechnen.

Lösung. Die Axe ist eine Hauptträgheitsaxe, der Drall für einen auf dieser Axe gelegenen Momentenpunkt fällt daher in die Richtung der Axe. Nach Gl. (90) ist

$$B' = u\Theta.$$

Das Trägheitsmoment des Cylinders für diese Axe ist gleich dem polaren Trägheitsmomente eines Querschnittskreises, über den die ganze Masse des Cylinders gleichmässig ausgebreitet gedacht wird. Der Trägheitsradius kann daher nach Band III, S. 121 d. 2. Aufl. gleich $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ gesetzt werden, wenn der Cylinderhalbmesser mit a bezeichnet wird. Wenn das Gewicht des Cylinders gleich Q ist, hat man daher

$$B' = \frac{u Q a^2}{2g}.$$

Abb. 47.

18. Aufgabe. Für einen homogenen Kreiskegel von der Höhe h und dem Basishalbmesser a sollen die Trägheitsmomente für die Schwerpunktshauptaxen berechnet werden. Ferner soll angegeben werden, bei welchem Verhältnisse zwischen h und a das auf die Kegelspitze bezogene Trägheitsellipsoid in eine Kugel übergeht.

Lösung. Am einfachsten berechnet sich das Trägheitsmoment Θ_1 für die Kegelaxe. Man denke sich den Kegel durch Querschnitte in Schichten von der unendlich kleinen Höhe dx getheilt. Jede Schicht kann als eine kreisförmige Scheibe vom Halbmesser $a\frac{x}{h}$ angesehen werden. Das Volumen der Schicht ist $\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} dx$ und ihr Beitrag zu Θ_1 daher

$$\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} \mu dx \cdot \frac{1}{2} a^2 \frac{x^2}{h^2},$$

wenn μ die specifische Masse bedeutet. Im Ganzen wird daher

$$\Theta_1 = \pi\mu \frac{a^4}{2h^4} \int_0^h x^4 dx = \pi\mu \frac{a^4 h}{10} = M \frac{3a^2}{10},$$

worin für die Gesammtmasse des Kegels M gesetzt ist. Der zugehörige Trägheitshalbmesser ist gleich $a\sqrt{0{,}3} = 0{,}548\, a$.

Der Schwerpunkt des Kegels liegt in der Höhe $\frac{h}{4}$. Für eine senkrecht zur Kegelaxe durch ihn gelegte Axe sei das Trägheitsmoment mit Θ_2 bezeichnet. Der Beitrag, den die Scheibe zu Θ_2 liefert, ist gleich dem Trägheitsmomente der Scheibe für eine durch deren Schwerpunkt parallel zu jener gelegte Axe vermehrt um das Produkt aus der Masse der Scheibe und dem Quadrate des Abstandes

$\frac{3h}{4} - x$ zwischen Kegelschwerpunkt und Scheibenschwerpunkt. Dies folgt nämlich aus dem in Band III, Gl. (53) bewiesenen Satze, der sich auf den vorliegenden Fall ohne Weiteres übertragen lässt. Hiernach ist der Beitrag der Scheibe zu Θ_2 gleich

$$\pi a^2 \frac{x^2}{h^2} \mu dx \left(\frac{1}{4} a^2 \frac{x^2}{h^2} + \left(\frac{3h}{4} - x\right)^2\right)$$

und im Ganzen erhält man

$$\Theta_2 = \pi\mu \frac{a^4}{4h^4} \int_0^h x^4 dx + \frac{\pi a^2 \mu}{h^2} \int_0^h x^2 \left(\frac{3h}{4} - x\right)^2 dx$$

$$= \pi\mu \frac{a^4 h}{20} + \pi\mu \frac{a^2 h^3}{80} = \frac{3M}{20}\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

Der zugehörige Trägheitsradius ist daher gleich

$$\sqrt{\frac{12a^2 + 3h^2}{80}}.$$

Für die Kegelspitze seien die Trägheitsmomente mit Θ_1' und Θ_2' bezeichnet. Dann ist $\Theta_1' = \Theta_1$ und

$$\Theta_2' = \Theta_2 + M \cdot \frac{9h^2}{16}.$$

Wenn nun $\Theta_1' = \Theta_2'$ werden soll, so muss sein

$$M \frac{3a^2}{10} = \frac{3M}{20}\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right) + M \frac{9h^2}{16}$$

und hieraus folgt $a = 2h$. Die Höhe des Kegels darf also nur $\frac{1}{4}$ vom Durchmesser des Basiskreises betragen. — Ein Spielkreisel von dieser Form wäre hiernach ein Kugelkreisel. Gewöhnlich sind die Spielkreisel freilich höher; das zur Spitze gehörige Trägheitsellipsoid ist dann ein verlängertes Rotationsellipsoid.

19. Aufgabe. Auf zwei conaxialen Wellen sitzen zwei Umdrehungskörper von den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2. Die eine Welle rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit u, während die andere ruht. Dann wird durch eine einrückbare Kuppelung die zweite Welle mit der ersten verbunden; man soll die Winkelgeschwindigkeit u' berechnen, mit der beide Wellen zusammen weiter rotiren, wenn keine äusseren Kräfte einwirken.

Lösung. Nach dem Flächensatze bleibt der Drall constant. Man hat daher

$$u\Theta_1 = u'(\Theta_1 + \Theta_2) \quad \text{und hieraus} \quad u' = u \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

20. *Aufgabe. Eine gewichtslose Stange SS (Abb. 48) trägt zwei gleich schwere Körper Q und Q′ und rotirt um die Axe AA. Plötzlich werden (durch Auslösen einer Feder o. dgl.) die Gewichte auseinander gezogen, so dass ihr Abstand von 40 auf 60 cm wächst. Wie viel Touren macht die Stange nachher, wenn sie vorher 60 in der Minute machte?*

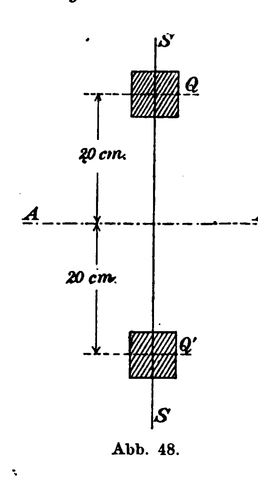


Abb. 48.

Lösung. Auch hier muss der Drall constant bleiben. Wenn die beiden Gewichte wie materielle Punkte behandelt werden können, die sich im Abstande r von der Axe befinden, so ist das Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{2Q}{g} r^2$$

und der Drall

$$B = \frac{2Q}{g} r^2 u.$$

Dieser muss vorher und nachher gleich sein; also wenn man die Werthe von r und u nachher mit r_1 und u_1 bezeichnet

$$r^2 u = r_1^2 u_1 \quad \text{oder} \quad \frac{u_1}{u} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Setzt man die Zahlenwerthe ein, so erhält man für die Tourenzahl N_1

$$N_1 = 60 \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^2 = 26\,\frac{2}{3}.$$

Anmerkung. Erscheinungen dieser Art (also Aenderung der Winkelgeschwindigkeit in Folge von Aenderung des Abstandes von der Drehaxe) kommen öfters vor. Wenn man z. B. Wasser durch einen Trichter ausströmen lässt und man hat das Wasser oben im Trichter (etwa durch eine seitlich gerichtete Einflussgeschwindigkeit) in eine geringe Rotation versetzt, so steigert sich diese im Ausströmungsrohr des Trichters erheblich, so dass starke Wirbel entstehen, die den Ausfluss beträchtlich verzögern können.

21. *Aufgabe. Der Schwungring eines Schwungrads wiegt 3000 kg und hat 2 m Durchmesser. Die Ebene des Schwungrings sei wegen ungenauen Aufkeilens um einen Winkel von 1^0 gegen die zur Wellenmittellinie senkrechte Ebene geneigt. Wie gross ist das Moment des von den Lagern aufzunehmenden Kräftepaars, wenn die Welle 120 Touren macht?*

Erste Lösung. Man kann die Aufgabe entweder mit Hülfe des Flächensatzes oder mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips behandeln. Einfacher und daher gewöhnlich gebraucht ist hier das Verfahren nach d'Alembert, weil sich die Trägheitskräfte auf blosse Centrifugalkräfte reduciren.

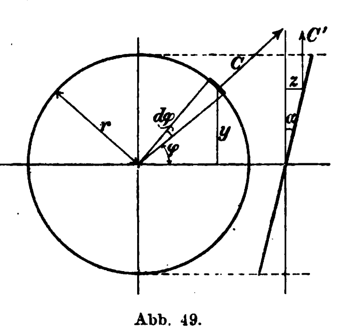


Abb. 49.

In Abb. 49 ist der Schwungring in zwei Projektionen gezeichnet. Der im Zahlenbeispiele zu 1^0 angegebene Winkel ist in der Abbildung mit α bezeichnet. Da er jedenfalls klein sein wird (kleiner als dort gezeichnet), kann die andere Projektion des Schwungrings genau genug als kreisförmig angesehen werden. Man fasse ein Element des Schwungrings ins Auge, das zum Centriwinkel $d\varphi$ gehört. Wenn Q das Gewicht des ganzen Schwungrings ist, gehört zu $d\varphi$ das Gewicht

$$\frac{Q\,d\varphi}{2\pi}.$$

Für die mit y und z bezeichneten Abstände erhält man

$$y = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = y\alpha = r\alpha\sin\varphi,$$

wobei an Stelle von $\operatorname{tg}\alpha$ der Bogen α gesetzt werden durfte.

Die Centrifugalkraft C an dem zu $d\varphi$ gehörigen Theilchen ist

$$C = \frac{Q\,d\varphi}{2\pi}\cdot\frac{u^2 r}{g}.$$

Die Horizontalcomponenten aller C stehen im Gleichgewichte mit einander. Dagegen bilden die Vertikalcomponenten C' ein Kräftepaar, dessen Moment mit K bezeichnet sei. Man hat

$$C' = C\sin\varphi = \frac{Qu^2 r}{2\pi g}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Der Hebelarm von C' in Bezug auf die Radmitte ist z und daher wird

$$K = \frac{Qu^2r^2\alpha}{2\pi g}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{Qu^2r^2\alpha}{2g}.$$

Wenn man die lebendige Kraft des Schwungrings, die man ohnehin schon berechnet haben wird, ehe man an eine solche Untersuchung herantritt, mit L bezeichnet, hat man kürzer

$$K = L\alpha.$$

Im Zahlenbeispiele ist $Q = 3000$ kg, $u = \frac{120}{60} \cdot 2\pi = 4\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$, $r = 1$ m und $\alpha = \frac{\pi}{180}$ und nach Einsetzen und Ausrechnen erhält man

$$K = 421 \text{ m kg.}$$

Dieses Moment muss von den Lagern aufgenommen werden; die Division mit dem Abstande der Lager von einander liefert die Einzelkraft für jedes Lager. Zu beachten ist, dass die Richtung des Moments und der Einzelkräfte ebenfalls stetig mit dem Schwungrade herumrotirt; hierdurch kommt das „Rütteln" in den Lagern zu Stande. Zugleich giebt K das Biegungsmoment an, das von der Welle aufgenommen werden muss; in Bezug auf die Welle ändert sich übrigens die Richtung von K nicht. — Wenn die Welle hinreichend biegsam ist, richtet sich das Schwungrad von selbst auf, so dass der Winkel α und hiermit auch K selbst kleiner werden.

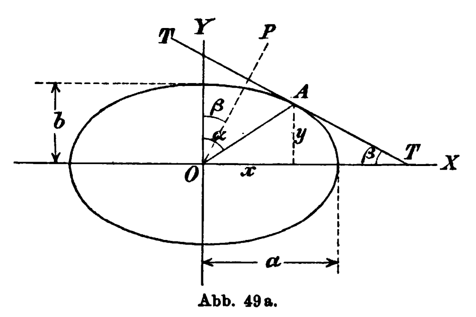


Abb. 49a.

Zweite Lösung. Um die Aufgabe auch noch nach dem Flächensatze zu lösen, schicke ich eine geometrische Betrachtung über eine Eigenschaft der Ellipse voraus. Der Winkel zwischen einem Halbmesser OA der Ellipse (Abb. 49a) und der y-Axe sei α, der Winkel, den das Perpendikel OP auf die im Punkte A construirte Tangente TT mit der gleichen Axe bildet, sei β. Dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$$

und

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

wofür auch, wenn α und β klein genug sind, kürzer

$$\beta = \frac{b^2}{a^2}\alpha$$

geschrieben werden kann.

In diesem Falle kann ferner $B = u\Theta$ gesetzt werden. Der Winkel $\alpha - \beta$ giebt den Richtungsunterschied zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ an. Unter der Ellipse in Abb. 49a ist hierbei der Meridian des

Trägheitsellipsoids des Schwungrings zu verstehen. Der Drall $\mathfrak{B}$ beschreibt bei der Drehung des Schwungrads eine Kegelfläche mit dem angegebenen Oeffnungswinkel. Um den absoluten Betrag von $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ zu berechnen, beachte man, dass das zu dt gehörige $d\mathfrak{B}$ ein Bogenelement vom Basiskreise jenes Kegels ausmacht und daher (bei kleinem $\alpha - \beta$) gleich $B(\alpha - \beta)udt$ gesetzt werden kann. Für das statische Moment der Zwangskräfte erhält man daher

$$K = B(\alpha - \beta)u = u^2\Theta(\alpha - \beta) = u^2\Theta\alpha\frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Diese Formel gilt noch allgemein für irgend einen Rotationskörper. Für den Schwungring ist aber überdies (vgl. § 22) $a^2 = 2b^2$ und daher, wie vorher,

$$K = \frac{1}{2}u^2\Theta\alpha = L\alpha.$$

22. Aufgabe. Zwei gleich schwere Kugeln sind durch eine Stange verbunden; man soll die freien Axen des dadurch gebildeten Körpers angeben.

Lösung. Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt ist ein verlängertes Umdrehungsellipsoid, dessen grosse Axe mit der Stangenaxe zusammenfällt. Die Stangenaxe und jede senkrecht zu ihr durch den Schwerpunkt gezogene Axe ist eine freie Axe des Körpers. Eine stabile Drehaxe ist aber nur die Stangenaxe, da nur für sie das Trägheitsmoment zu einem absoluten Minimum (oder Maximum) wird.

23. Aufgabe. Eine homogene Stange von der Länge $2r$ ist an den Enden mit Rollen versehen, mit denen sie auf einer glatten senkrechten Wand und einem glatten Fussboden ruht. Ausserdem soll durch eine geeignete Vorrichtung auch dafür gesorgt sein, dass sich die Rollen von der Wand oder dem Fussboden nicht abheben können. Vorher war die Stange in der durch Abb. 50 angegebenen Lage AB festgehalten. Dann wird sie ohne Stoss frei gelassen und man soll berechnen, wie lange es dauert, bis sie unten liegt.

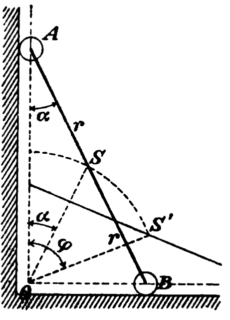


Abb. 50.

Lösung. Die Entfernung von O bis zum Stangenschwerpunkte S ist nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks gleich r, daher beschreibt S während des Herabfallens einen Kreis um O vom Halbmesser r. Irgend eine spätere Lage der Stange sei durch den Winkel φ gekennzeichnet, den die Stange mit der Wand oder den auch die Linie OS' mit

der Wand bildet. Die Stange hat sich während dessen um den Winkel $\varphi - \alpha$ gedreht. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der sie sich im gegebenen Augenblicke dreht, ist

$$u = \frac{d\varphi}{dt}$$

und die Geschwindigkeit des Schwerpunkts hat den Absolutbetrag

$$v = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die lebendige Kraft der Stange, deren Masse mit m bezeichnet sei, ist daher

$$L = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Für das Trägheitsmoment Θ findet man leicht

$$\Theta = m\frac{r^2}{3}$$

und daher wird

$$L = \frac{2}{3}mr^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Der lebendigen Kraft L muss die Arbeit der äusseren Kräfte gleich sein. Die Auflagerkräfte leisten aber keine Arbeit, da Reibungen ausgeschlossen sein sollen und die Arbeit des Gewichts ist gleich mg mal der Senkung des Schwerpunkts, die gleich $r(\cos\alpha - \cos\varphi)$ gesetzt werden kann. Wir haben daher

$$\frac{2}{3}r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = g(\cos\alpha - \cos\varphi).$$

Hieraus findet man

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2r}{3g}\cdot\frac{1}{\cos\alpha - \cos\varphi}}$$

und durch Integration nach φ folgt die Zeit, die zum Durchlaufen des Weges gebraucht wird. Ist t die Zeit, die bis zum Ende der Bewegung, d. h. bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verstreicht, so hat man

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\varphi}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches, das ganz ähnlich wie das bei der Pendelbewegung in Gl. (51) vorkommende weiter behandelt werden kann. Man setze, um auf die frühere Form zu kommen, zunächst $\pi - \varphi = 2\chi$ und $\pi - \alpha = 2\beta$, dann wird

$$\cos\varphi = -\cos 2\chi = 2\sin^2\chi - 1;\ \cos\alpha = 2\sin^2\beta - 1;\ d\varphi = -2d\chi;$$

$$t = \sqrt{\frac{2r}{3g}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} \frac{2d\chi}{\sqrt{2(\sin^2\beta - \sin^2\chi)}}.$$

Der einzige wesentliche Unterschied gegenüber dem früheren Falle besteht nun darin, dass die untere Grenze hier $\frac{\pi}{4}$ anstatt Null ist. Man kann aber das Integral als die Differenz von zwei bestimmten Integralen auffassen, von denen das eine von 0 bis β und das andere von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ reicht und auf jedes von beiden die frühere Umformung anwenden. Dadurch erhält man

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{3g}} \left\{ F\left(\sin\beta, \frac{\pi}{2}\right) - F(\sin\beta, \gamma) \right\},$$

wobei γ durch die Bedingung bestimmt wird

$$\sin\gamma = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\beta}.$$

Da $\beta > \frac{\pi}{4}$, lässt sich γ stets angeben.

24. *Aufgabe. Ein Gyroscop besteht aus einem Schwungringe von 20 cm Durchmesser und 10 kg Gewicht und einem Rahmen (dessen Masse gegen die Schwungringmasse vernachlässigt werden soll), in dem der Schwungring mit 100 Umdrehungen in der Secunde rotirt. Der Rahmen hat einen Arm AB (Abb. 51) von 20 cm Länge und wird bei B drehbar auf eine Spitze des Gestells BC aufgesetzt. In welchem Sinne und mit welcher Geschwindigkeit dreht sich das Gyroscop um das Gestell BC, nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist?*

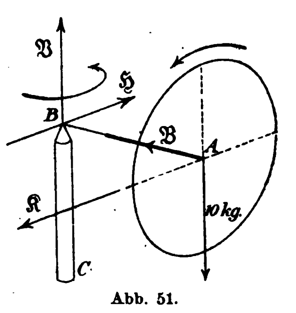


Abb. 51.

Lösung. Wir haben es hier mit einem Falle der pseudoregulären Präcession zu thun. Wenn der Rahmen zuerst bei horizontaler Stellung des Armes AB ruhte und hierauf losgelassen wird, tritt in Folge des Gewichts zunächst eine kleine Senkung des Schwungrings ein. Diese muss wegen der Auflagerbedingung bei B in einer Drehung um B bestehen. Dabei ändert sich die Richtung des Dralls 𝔅. Um diese Aenderung zu erzwingen, muss ein statisches Moment äusserer Kräfte von senk-

recht nach oben gerichtetem Momentenvektor in Bezug auf den Schwerpunkt des Schwungrings vorhanden sein. Es muss daher eine horizontale Auflagercomponente $\mathfrak{H}$ bei B entstehen, die dieses Moment liefert. Die Kraft $\mathfrak{H}$ bewirkt nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts eine Drehung des Gyroscops um das Gestell und zwar bei dem in der Abbildung angegebenen Umdrehungssinne des Schwungrings von oben gesehen entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung.

Um das Uebergangsstadium wollen wir uns jetzt nicht weiter kümmern. Nachdem das Gyroscop eine Winkelgeschwindigkeit w um die lothrechte Axe des Gestells angenommen hat, ändert sich die Richtung von $\mathfrak{B}$ abermals und zwar um horizontal gerichtete Zuwüchse. Wir haben daher jetzt ein statisches Moment von horizontal und zwar nach vorn gerichtetem Momentenvektor $\mathfrak{K}$, der in die Abbildung eingetragen ist. Diesem entspricht eine senkrecht nach oben gerichtete Auflagerkraft $\mathfrak{B}$ bei B. Wenn $\mathfrak{B}$ gleich dem Gewichte von 10 kg ist, bilden beide ein Kräftepaar mit einander und es besteht dann kein Anlass mehr zu einer Senkung des Schwerpunkts. Der einzige Erfolg des Kräftepaars besteht vielmehr darin, den Drall $\mathfrak{B}$ um die lothrechte Axe herum rotiren zu lassen. Ausserdem muss dann auch ein in der Richtung BA gehender Auflagerdruck (Centripetalkraft) auftreten, um den Schwerpunkt zu seiner kreisförmigen Bewegung um die Gestellaxe zu zwingen. Dagegen verschwindet nachher $\mathfrak{H}$, sobald eine (von kleinen Schwankungen abgesehen) gleichförmige Drehung des Gyroscops um die Gestellaxe hergestellt ist.

Streng genommen führt das Rad jetzt zwei Drehungen zugleich aus, eine im Rahmen mit der Winkelgeschwindigkeit u und die zweite mit dem Rahmen um die Gestellaxe mit der Winkelgeschwindigkeit w. Beide lassen sich zu einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit zusammensetzen. Da aber w nur sehr klein gegen u ist, wollen wir nur auf diese Componente achten. Der Drall hat den Absolutwerth

$$B = u\Theta = u\frac{Q}{g}r^2,$$

wenn Q das Gewicht des Schwungrings und r der Halbmesser ist. Der senkrecht zum Arme stehende Zuwachs von B, der sich geometrisch im Zeitelemente dt dazu summirt, hat den Absolutwerth

$$Bw\,dt \quad \text{oder} \quad uw\frac{Q}{g}r^2dt.$$

Dieser ist nach dem Flächensatze gleich $K\,dt$, und da das

Moment K gleich Ql ist, wenn l die Länge des Armes AB bezeichnet, erhalten wir die Gleichung

$$Ql = uw \frac{Q}{g} r^2, \qquad \text{also } w = \frac{lg}{ur^2}.$$

Mit $u = 100 \cdot 2\pi \sec^{-1}$, $g = 9{,}81 \text{ m} \sec^{-2}$, $l = 0{,}2$ m, $r = 0{,}1$ m wird

$$w = 0{,}31 \sec^{-1},$$

d. h. die Dauer eines Umlaufs beträgt $\frac{2\pi}{0{,}31}$ oder rund 20 Secunden. Der Umlaufssinn war schon vorher festgestellt. Wenn das Rad in Folge von Reibungen u. s. f. nachher langsamer rotirt, läuft das Gyroscop später im selben Verhältnisse schneller um. Auf das Gewicht Q kommt es übrigens, wie man sieht, gar nicht an; eine Zahlenangabe darüber wäre daher entbehrlich gewesen.

25. Aufgabe. Man soll die reducirte Pendellänge berechnen, für die die Schwingungsdauer ebenso gross ausfällt, als für die Schwingungen eines Stabes, der beiderseits unterstützt ist und in der Mitte eine concentrirte Last trägt, gegen die die Masse des Stabes vernachlässigt werden kann.

Lösung. Die Schwingungen sind harmonische und nach Gl. (20) hat man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Der statische Biegungspfeil unter der Last $Q = mg$ sei mit f bezeichnet. Dann ist nach der Bedeutung der Constanten c

$$cf = Q, \qquad \text{also } c = \frac{mg}{f}.$$

Setzt man dies ein, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Dies stimmt nach Gl. (48) mit der Schwingungsdauer eines Pendels überein, wenn $f = l$ gesetzt wird. Der statische Biegungspfeil f giebt daher ohne Weiteres die reducirte Pendellänge an. Da f gewöhnlich nur klein ist, erfolgen die Schwingungen verhältnissmässig schnell.

26. Aufgabe. Die Schwingungsdauer eines bifilar (d. h. mit Hülfe von zwei Fäden) und symmetrisch zur Mitte aufgehängten homogenen Stabes soll für kleine Ausschläge berechnet werden. Dabei ist nur auf die Drehschwingungen zu achten, die der Stab um den Schwerpunkt ausführt; gegeben sind die Stablänge l, die Entfernung e

der Aufhängepunkte von der Stabmitte und die Fadenlänge a. Dabei wird vorausgesetzt, dass e klein gegen a ist.

Lösung. Abb. 52 giebt Aufriss, Grundriss und Seitenansicht an; dabei ist die Lage, die der Stab zur Zeit t bei einem Ausschlage φ einnimmt, durch punktirte Striche angegeben. Die Fäden stehen dann ein wenig schräg und die Horizontalprojektion der Fadenlänge ist mit z bezeichnet. Wenn z klein von der ersten Ordnung ist, unterscheidet sich die Vertikalprojektion der Fadenlänge im Aufrisse nur um eine von der zweiten Ordnung kleine Grösse von a. Es findet daher keine merkliche Hebung des Stabes statt; dieser schwingt vielmehr nahezu in einer horizontalen Ebene. Der Schwerpunkt bleibt also in Ruhe und die Vertikalcomponenten der Fadenspannungen müssen jederzeit zusammen gleich dem Gewichte Q des Stabes sein. Für die Horizontalcomponente H einer Fadenspannung erhält man daher

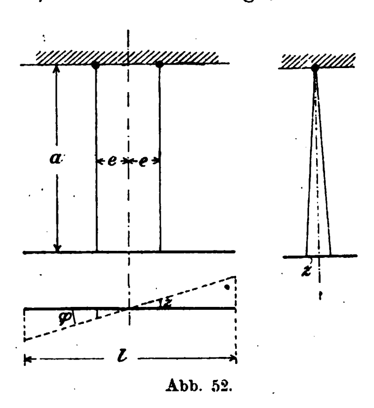


Abb. 52.

$$H = \frac{Q}{2} \cdot \frac{z}{a} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{e \sin \varphi}{a}.$$

Beide Horizontalcomponenten bilden ein Kräftepaar, das die Winkelbeschleunigung hervorbringt. Das Moment K des Kräftepaares ist

$$K = 2\,e H = Q\,\frac{e^2 \sin \varphi}{a}.$$

Da die Schwingungen um eine freie Axe erfolgen, hat man (mit Berücksichtigung des Vorzeichens)

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\frac{Q e^2 \sin \varphi}{a}.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie die Differentialgleichung (74) für die Pendelschwingungen; diese lautete

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -Q s \sin \varphi.$$

Beide stimmen überein, wenn man $s = \frac{e^2}{a}$ setzt. Für die reducirte Pendellänge l_{red} hat man daher nach Gl. (77)

$$l_{red} = \frac{a t^2}{e^2}$$

oder, da der Trägheitsradius t einer Stange $t = \frac{l}{\sqrt{12}}$ ist,

$$l_{red} = \frac{a\,l^2}{12\,e^2}.$$

Wenn die Stange so aufgehängt wird, dass $e = t$ wird, erhält man $l_{red} = a$, d. h. die Schwingungsdauer ist dann dieselbe, als wenn die Stange gewöhnliche Pendelschwingungen um die durch die beiden Aufhängepunkte gehende Axe ausführte.

Anmerkung. Der Schluss, dass die Vertikalcomponenten beider Fadenspannungen zusammen jederzeit gleich Q sein müssten, ist nicht unbedenklich, denn wenn auch die vertikalen Bewegungen des Stangenschwerpunktes sich nur auf Wege erstrecken, die stets mindestens von der zweiten Ordnung klein sein müssen, so ist für einen strengeren Beweis der Behauptung doch erst noch nachzuweisen, dass auch die Beschleunigung des Schwerpunktes in vertikaler Richtung vernachlässigt werden darf. Um diesen Nachweis zu erbringen, wollen wir die Untersuchung noch einmal aufgreifen und die Vertikalbewegungen mit berücksichtigen.

Die Stange hebt sich während der Drehung um den Winkel φ ein wenig aus ihrer untersten Lage und ihr Abstand von der durch die Aufhängepunkte gelegten horizontalen Ebene zur Zeit t sei mit x bezeichnet. Dann ist

$$x = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Die zweimalige Differentiation nach t liefert die Beschleunigung des Schwerpunktes und für die Differenz zwischen der Summe $2F$ der Vertikalcomponenten beider Fadenspannungen und dem Gewichte Q erhält man daher

$$2F - Q = e^2 \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi + e^2 \sin^4 \varphi) + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \sin\varphi \cos\varphi\,(a^2 - e^2 \sin^2\varphi)}{(a^2 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{Q}{g}.$$

Diese Gleichung gilt auch für beliebige endliche Ausschläge. Um für solche die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung zu finden, hat man in der früheren Lösung Q durch das hiernach corrigirte $2F$ zu ersetzen. Nehmen wir aber wieder an, dass die Schwingungsausschläge sehr klein bleiben, so vereinfacht sich die vorige Gleichung zu

$$2F - Q = e^2 \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{a} \cdot \frac{Q}{g}.$$

Die Differentialgleichung für die Schwingungen ist daher zu ersetzen durch

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Q \left(1 + e^2 \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2}}{ag}\right) \frac{e^2 \sin\varphi}{a}.$$

Das Correctionsglied in der Klammer, um das diese Gleichung von der früheren abweicht, kann aber in der That gestrichen werden, wenn auch e klein gegen a ist. Im anderen Falle müsste freilich das mit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ behaftete Glied beibehalten werden. Erst hieraus erkennt man auch, wesshalb es nöthig war, e im Texte der Aufgabe als klein gegen a vorauszusetzen.

Für die Untersuchung der Schwingungen von endlicher Grösse (und bei Wegfall der Voraussetzung, dass e klein gegen a ist) macht man übrigens am besten von dem Satze von der lebendigen Kraft Gebrauch. Man erhält dann

$$\frac{1}{2} \Theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Q(x - x_0),$$

wenn mit x_0 der Werth von x für die höchste Lage bezeichnet wird, die die Stange während der Schwingungen erreicht. Für x ist dann der vorher angegebene Werth einzuführen und die Gleichung nach $\frac{d\varphi}{dt}$ aufzulösen, worauf die Integration auf die Ausführung einer Quadratur hinauskommt.

27. Aufgabe. Man soll die Schwingungsdauer der „schlingernden" oder „rollenden" Bewegungen eines Schiffes um die Längsaxe für kleine Ausschläge berechnen.

Lösung. Hier ist an die Betrachtungen über das Metacentrum in Band I, § 64 anzuknüpfen. Die Höhe des Metacentrums über dem Schiffsschwerpunkte sei mit s bezeichnet. Dann bilden beim Ausschlage φ das Gewicht Q und der Auftrieb ein Kräftepaar vom Momente $Qs \sin\varphi$ und wenn das Trägheitsmoment des Schiffes für die parallel zur Kielrichtung durch den Schwerpunkt gehende Axe mit Θ bezeichnet wird, hat man

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - Qs \sin\varphi.$$

Dies stimmt genau mit der Differentialgleichung (74) für die Pendelschwingungen überein. Hiernach kann die reducirte Pendellänge und aus dieser die Schwingungsdauer ebenso wie dort berechnet werden. Da hier die Drehung um den Schwerpunkt stattfindet, bezieht sich Θ auf die Schwerpunktsaxe, während sich beim Pendel

Θ auf die Aufhängeaxe bezog, worauf beim Vergleiche zu achten ist. (In der 1. Aufl. war dies übersehen worden, so dass sich eine unrichtige Bemerkung einschlich, die jetzt verbessert ist.)

Auf den Widerstand, den das Wasser den Schwingungen entgegensetzt, ist bei dieser Betrachtung nicht geachtet. Jedenfalls wird dadurch eine starke Dämpfung hervorgerufen. Aber auch sonst wird der Verlauf der Bewegung dadurch etwas geändert werden; man kann namentlich nicht erwarten, dass der Schwerpunkt genau in Ruhe bleibe.

28. *Aufgabe. Wenn auf einen seitlich aus einer Mauer hervorragenden Steinbalken (etwa eine Treppenstufe) ein Gewicht Q herabfällt (Abb. 53), kommt es vor, dass er jenseits der Aufschlagstelle (etwa bei mm) abbricht. Man soll in allgemeinen Zügen angeben, wie dieses Problem zu behandeln ist.*

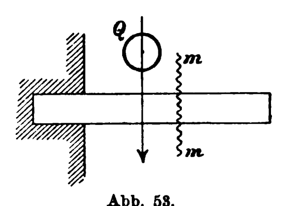


Abb. 53.

Lösung. Man denke sich in irgend einem Augenblicke während des Stosses die Trägheitskräfte eingeführt. Diese sind an jenen Theilen des Balkens, die nach abwärts beschleunigt werden, nach oben hin gerichtet. Auch rechts vom Schnitt *mm* treten diese Trägheitskräfte auf und sie bewirken ein Biegungsmoment in *mm*, das zu Zugspannungen in den unteren und zu Druckspannungen in den oberen Fasern führt. Es kann nun sein, dass die Aufschlagstelle und ihre Nachbarschaft schon keine Beschleunigung nach abwärts mehr erfährt, oder schon eine in der entgegengesetzten Richtung, während am freien Ende noch eine starke Beschleunigung nach abwärts besteht. Namentlich wenn am Ende noch grössere Massen befestigt sind, kann die zugehörige Trägheitskraft zu einem Biegungsmomente führen, das an irgend einem Querschnitte *mm* den Bruch hervorbringt.

Zur rechnerischen Verfolgung des Vorgangs muss man von der Differentialgleichung (126) ausgehen, die auch für den vorliegenden Fall ohne Aenderung gültig bleibt. Sie ist für jeden der beiden Theile, in die der Stab durch die Aufschlagstelle von Q zerlegt wird, gesondert mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu integriren. In der französischen Uebersetzung des Buches von Clebsch über die Theorie der Elasticität hat de Saint-Vénant das Problem ausführlich behandelt.

Die bekannte Erfahrung, dass man eine Flintenkugel durch eine Fensterscheibe schiessen kann, ohne diese in einiger Entfernung von dem Schussloche zu beschädigen, erklärt sich übrigens auf ganz ähnliche Art. In der Umgebung der Aufschlagstelle der

Kugel treten sehr grosse Trägheitskräfte auf, die sich zunächst nur über einen engen Bezirk vertheilen und mit dem Drucke zwischen Kugel und Scheibe vorerst im Gleichgewichte stehen. Die diesem Belastungsfalle entsprechende Beanspruchung des Glases steigert sich dann so, dass der Bruch erfolgt, der sich aber nur über diesen engen Bezirk erstrecken kann, weil überall ausserhalb des Bezirks nur geringe Trägheitskräfte und Spannungen auftreten.

Dritter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

§ 29. Der Satz von Coriolis.

Vom Begriffe der Relativbewegung ist schon im ersten Bande wiederholt Gebrauch gemacht worden und ich kann hier als bekannt voraussetzen, was damals hierüber ermittelt wurde. Bei jenen früheren Gelegenheiten erstreckte sich indessen die Untersuchung immer nur auf den Fall, dass das Fahrzeug, von dem aus die Bewegung des materiellen Punktes oder des Körpers beobachtet werden sollte, nur eine Translationsbewegung und keine Drehung ausführte. Es macht sich daher jetzt noch eine Ergänzung erforderlich für den Fall, dass sich das Fahrzeug in ganz beliebiger Weise bewegt.

Zuvor sei aber noch auseinandergesetzt, zu welchem Zwecke und für welchen Gebrauch die hier vorzunehmenden Untersuchungen bestimmt sind. Bei den meisten Aufgaben der Dynamik hat man gar keine Veranlassung, Relativbewegungen ins Auge zu fassen; man löst sie am einfachsten, wenn man sich den Beobachter im festen Raume aufgestellt denkt: also in einem Raume, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist. Bei den vorausgehenden Untersuchungen dieses Bandes ist dies auch stets geschehen. In manchen Fällen vermag man aber entweder überhaupt nicht gut die Untersuchung der Bewegung von einem Fahrzeuge aus zu vermeiden oder man würde wenigstens, wenn die Vermeidung auch möglich wäre, auf erhebliche Vereinfachungen verzichten müssen, die durch die Hereinziehung der Relativbewegungen erzielt werden können.

Kaum zu vermeiden ist die Betrachtung der Relativbewegung bei solchen irdischen Bewegungsvorgängen, die von der Eigenbewegung des Erdballs gegen den festen Raum merklich beeinflusst sind. Diese Fälle sind freilich selten; gewöhnlich braucht man auf die Eigenbewegung der Erde nicht zu achten, kann vielmehr das Trägheitsgesetz, wie es auch bisher stillschweigend schon immer geschehen ist, als gültig in Bezug auf den von der Erde her ausgemessenen Raum betrachten. Dadurch wird man aber der Verpflichtung natürlich nicht enthoben, eine genauere Untersuchung anzustellen, um sich zu überzeugen, inwieweit die Vernachlässigung zulässig ist und um für jene Fälle, in denen sie nicht mehr zulässig ist, eine andere geeignete Untersuchungsmethode ausfindig zu machen.

So erwähnte ich z. B. schon früher einmal, dass ein Stein nicht genau in einer lothrechten graden Linie zur Erde fällt, sondern dass sich wegen der Drehung der Erde gegen den festen Raum, in dem das Trägheitsgesetz gilt, eine Seitenablenkung einstellt, die freilich sehr gering und nur durch die genauesten Versuche nachweisbar ist. Freilich steht nichts im Wege, selbst in solchen Fällen den Beobachtungsposten im festen Raume zu wählen, von hier aus die absolute Bahn des fallenden Steins zu ermitteln und dann erst nachträglich unter Berücksichtigung der Eigenbewegung der Erde den „relativen“ oder „scheinbaren“ Weg des Steins gegen die Erde, für den wir uns interessiren, und der allein unmittelbar beobachtet werden kann, daraus abzuleiten. Ein solches Verfahren wäre aber sehr umständlich. Ausserdem sind wir auch in der Mechanik der irdischen Bewegungsvorgänge so sehr darauf angewiesen, die Erde selbst als Aufstellungsort des Beobachters zu wählen, dass man auch in solchen Ausnahmefällen nicht darauf verzichten möchte. Die nachfolgenden Betrachtungen werden uns zeigen, wie man die früheren Untersuchungen nöthigenfalls zu ergänzen hat, um den irdischen Standpunkt unter allen Umständen festhalten zu können.

Bei einer anderen Classe von Problemen liegt zwar keine

so dringende Nöthigung vor, auf die Relativbewegungen einzugehen; man erleichtert die Untersuchung aber auch bei ihnen oft sehr erheblich, wenn man davon Gebrauch macht. Hierher gehören namentlich die Flüssigkeitsbewegungen, die im Innern einer Centrifugentrommel oder im Laufrade einer Turbine vor sich gehen. Die Eigenbewegung der Erde kommt hierbei übrigens nicht in Frage; man kann vielmehr ohne Bedenken die von der festen Erde her gesehenen Bewegungen dabei als absolute auffassen. Betrachtet man aber die Flüssigkeitsströmungen in der rotirenden Trommel als Relativbewegungen gegen das Gefäss, so führt man die Aufgabe auf Wasserbewegungen in ruhenden Gefässen zurück, also auf einfachere Betrachtungen, die schon früher erledigt wurden. Auch hierüber, wie dies möglich ist, soll unsere Untersuchung Aufschluss geben.

Um die aufgezählten Aufgaben lösen zu können, müssen wir die Wege, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte im bewegten Raume mit jenen vergleichen, die vom absoluten Raume her festgestellt werden. Die Massen der bewegten Körper sind als Eigenschaften dieser Körper und daher in beiden Fällen als gleich anzusehen. Von den Kräften gilt dies aber nicht; wir müssen vielmehr von vornherein erwarten, dass an dem Körper, dessen Bewegung untersucht werden soll, noch andere Kräfte angebracht werden müssen, wenn die Bewegung auf ein bewegtes Fahrzeug, als wenn sie auf den festen Raum bezogen werden soll, für den das Trägheitsgesetz gilt. — Ausser den schon aufgezählten werden auch noch andere dynamische Grössen, wie Arbeiten, statische Momente, Antriebe, lebendige Kräfte u. s. f. in Betracht zu ziehen sein; wir können aber von diesen einstweilen absehen, da sie aus den zuerst angeführten später leicht abgeleitet werden können.*)

Die Lage des Fahrzeugs F und des bewegten Punktes B sei zur Zeit $t = 0$ durch Abb. 54 gegeben. Nach einer kleinen

*) Die nachfolgende Entwickelung ist in der neuen Auflage vollständig umgearbeitet werden.

Zeit τ haben sich beide etwas verschoben. Um die hierbei eintretende Relativbewegung von B gegen F in der einfachsten Weise beschreiben zu können, denken wir uns F aus jeder späteren Lage, die wir ins Auge fassen wollen, sammt dem darin festgehaltenen B wieder in die Anfangslage von F zurückgebracht. In der Zeichnung der Anfangslage des Fahrzeugs erhalten wir dadurch eine Reihe von späteren Lagen des Punktes B, deren Aufeinanderfolge die relative Bahn von B angiebt, also jene Bahn, die ein im Fahrzeuge selbst aufgestellter Beobachter, der sich um die Eigenbewegung des Fahrzeugs nicht kümmert, wahrnimmt.

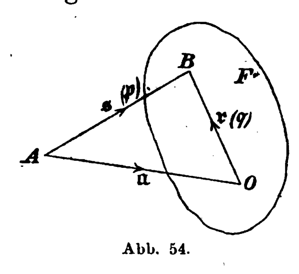


Abb. 54.

Wir wählen einen Anfangspunkt A im festen Raume und einen Anfangspunkt O auf dem Fahrzeuge aus. Von A aus ziehen wir einen Radiusvektor $\mathfrak{s}$ nach dem Punkte B und zwar nach jener Stelle des festen Raumes, die von B zur gegebenen Zeit eingenommen wird, so dass die Veränderung, die $\mathfrak{s}$ im Laufe der Zeit erfährt, die absolute Bewegung von B angiebt. Ausserdem denken wir uns von A aus noch einen zweiten Radiusvektor $\mathfrak{p}$ gezogen, der in der Anfangslage mit $\mathfrak{s}$ zusammenfällt, späterhin aber stets nach jenem Punkte des Fahrzeugraumes hingeht, mit dem B anfänglich zusammenfiel. Wir können sagen, dass durch die Aenderung von $\mathfrak{p}$ mit der Zeit die Fahrzeugbewegung beschrieben wird, wobei natürlich nur an jene Bewegung gedacht wird, die das Fahrzeug grade in jener Gegend besitzt, in der sich der Punkt B befindet. Dann ziehen wir von A aus noch einen Radiusvektor $\mathfrak{a}$ nach dem auf dem Fahrzeuge ausgewählten Anfangspunkte O. Die Veränderung, die $\mathfrak{a}$ in der Zeit erfährt, giebt die Fahrzeugbewegung in der Umgebung des Punktes O an.

Endlich ziehen wir noch von O aus einen Radiusvektor nach B, der je nach der Art, wie er gerechnet wird, mit $\mathfrak{r}$ oder mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden soll. Wenn wir nämlich nur die Relativbewegung von B gegen das Fahrzeug angeben

wollen, halten wir, wie es vorher schon beschrieben wurde, das Fahrzeug in der Anfangslage fest und geben die späteren Lagen von B gegen das Fahrzeug in dieser Stellung an. Der unter dieser Voraussetzung von O nach B gezogene Radiusvektor sei $\mathfrak{r}$; er ist demnach ebenfalls ein auf den festen Raum bezogener Vektor. Soll dagegen ausser der Bewegung von B gegen das Fahrzeug auch noch auf die Fahrzeugbewegung selbst geachtet werden, so wird der von O nach B gezogene Radiusvektor mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet. Hiernach sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ jederzeit von gleicher Grösse und auch von relativer Richtung und Lage gegen das Fahrzeug. Dagegen haben sie verschiedene Richtungen und Lagen gegen den festen Raum und zwar derart, dass $\mathfrak{q}$ mit dem auf denselben Augenblick bezogenen $\mathfrak{r}$ durch Zurückdrehen des Fahrzeugs in die Anfangslage zum Zusammenfallen gebracht werden kann.

Auch dann, wenn sich der Punkt B gar nicht relativ zum Fahrzeuge bewegt, wenn also $\mathfrak{r}$ constant ist, verändert sich $\mathfrak{q}$ mit der Zeit und wir wollen zunächst berechnen, was dann aus $\mathfrak{q}$ nach Ablauf einer kleinen Zeit τ wird, wenn der mit $\mathfrak{r}$ zusammenfallende Anfangswerth $\mathfrak{q}_0$ und die Fahrzeugbewegung gegeben sind. Da $\mathfrak{q}$ hier als Function der Zeit aufzufassen ist, entwickeln wir es nach dem Taylor'schen Lehrsatze und erhalten

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + \tau \left(\frac{d\,\mathfrak{q}}{d\,t}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{q}}{d\,t^2}\right)_0 + \cdots \tag{152}$$

Wenn τ klein ist, convergirt die Reihe schnell. Bis zu den Gliedern von der Ordnung τ^2 muss sie aber zum mindesten entwickelt werden, da die Beschleunigungen von diesen Gliedern abhängen. Auf die weiter folgenden Glieder kommt es im Folgenden nicht an und es genügt daher, sie durch Punkte anzudeuten.

Nun beachte man, dass $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}$ ist und dass $\frac{d\,\mathfrak{q}}{dt}$ in jedem Augenblicke nur durch die Drehbewegung des Fahrzeugs bedingt wird. Bei einer blossen Translationsbewegung würde nämlich die im Fahrzeuge festliegende Strecke $\mathfrak{q}$ nur eine Aenderung der Lage, aber keine Aenderung von Richtung und

Grösse erfahren, d. h. $\mathfrak{q}$ bliebe dann ebenfalls constant, solange $\mathfrak{r}$ constant ist. Dreht sich dagegen das Fahrzeug mit einer Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so wird zwar die Grösse von $\mathfrak{q}$ immer noch nicht, wohl aber die Richtung geändert und hiermit ist auch $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ von Null verschieden. Um die zu dt gehörige Aenderung $d\mathfrak{q}$ zu erhalten, denke man sich den Anfangspunkt O als Bezugspunkt für die Beschreibung der Fahrzeugbewegung gewählt. Zuerst denken wir uns die Translationsbewegung ausgeführt, die zu $d\mathfrak{q}$ nichts beiträgt und lassen hierauf die Rotationsbewegung um den Punkt O und die Axe und den Winkel $\mathfrak{u}dt$ folgen. Der Endpunkt von $\mathfrak{q}$ beschreibt hierbei einen kleinen Bogen und dieser Bogen ist es, der zu dem anfänglichen Werthe von $\mathfrak{q}$ geometrisch summirt werden muss, um den Endwerth zu erhalten, d. h. der Bogen selbst stellt $d\mathfrak{q}$ dar. Andererseits kann aber der Bogen auch aus der bekannten Formel für die Geschwindigkeit eines Punktes bei der Drehung eines starren Körpers entnommen werden, so dass man

$$d\mathfrak{q} = dt \mathrm{V}\mathfrak{q}\mathfrak{u} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \mathrm{V}\mathfrak{q}\mathfrak{u}$$

erhält. Wendet man dies auf die Zeit $t = 0$ an, so erhält man insbesondere

$$\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right)_0 = \mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{u}.$$

Ferner liefert eine nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\mathfrak{u} + \mathrm{V}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$$

oder, wenn man im ersten Gliede der rechten Seite den Werth von $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ aus der vorigen Gleichung einsetzt und hierauf die in Gl. (86) ausgesprochene Rechenvorschrift anwendet,

$$\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2} = \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{q} + \mathrm{V}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{u}^2 + \mathrm{V}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}.$$

Für die Zeit $t = 0$ geht dies noch über in

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2}\right)_0 = \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + \mathrm{V}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (152) ein, so erhält man

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{r} + \tau \cdot V \mathfrak{r} \mathfrak{u} + \frac{\tau^2}{2} \left(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}^2 + V \mathfrak{r} \frac{d \mathfrak{u}}{dt} \right) + \cdots \tag{153}$$

Nachdem die zuerst aufgeworfene Frage beantwortet ist, wollen wir jetzt ferner annehmen, dass der Punkt B zugleich eine Relativbewegung gegen das Fahrzeug ausführe. Es handelt sich dann abermals darum, $\mathfrak{q}$ als Function der Zeit darzustellen und zwar jetzt für ein variables $\mathfrak{r}$. Dabei kann $\mathfrak{r}$ jedenfalls selbst nach dem Taylor'schen Satze in eine Reihe

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \tau \left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt} \right)_0 + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} \right)_0 + \cdots \tag{154}$$

entwickelt werden. Nun kann der Punkt B offenbar auch dadurch in seine endgültige Lage gebracht werden, dass wir ihn zuerst die Relativbewegung gegen das Fahrzeug ausführen lassen und ihn nachher sammt dem Fahrzeuge in dessen neue Lage überführen. Die Relativbewegung bewirkt, dass der Radiusvektor des Punktes aus $\mathfrak{r}_0$ in das durch Gl. (154) dargestellte $\mathfrak{r}$ übergeht. Bei der hierauf folgenden Fahrzeugbewegung behält $\mathfrak{r}$ diesen Werth bei; dagegen geht der auf den absoluten Raum bezogene Radiusvektor $\mathfrak{q}$ nach dem bewegten Punkte nun in den durch Gl. (153) dargestellten Werth über. Wir brauchen also, um $\mathfrak{q}$ als Function der Zeit für den Fall eines sich relativ zum Fahrzeuge bewegenden Punktes darzustellen, nur den Werth von $\mathfrak{r}$ aus Gl. (154) in Gl. (153) einzusetzen. Entwickeln wir auch hierbei wieder alle Glieder bis zur Ordnung von τ^2, so erhalten wir

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_0 + \tau \left(\left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt} \right)_0 + V \mathfrak{r}_0 \mathfrak{u} \right) + \frac{\tau^2}{2} \left(\left(\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} \right)_0 + 2 V \left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt} \right)_0 \mathfrak{u} \right.$$

$$\left. + \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{u}^2 + V \mathfrak{r}_0 \frac{d \mathfrak{u}}{dt} \right) + \cdots \tag{155}$$

Hieraus folgt für die Differentialquotienten von $\mathfrak{q}$ zur Zeit $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d \mathfrak{q}}{dt} \right)_0 &= \left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt} \right)_0 + V \mathfrak{r}_0 \mathfrak{u} \\ \left(\frac{d_2 \mathfrak{q}}{dt^2} \right)_0 &= \left(\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} \right)_0 + 2 V \left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt} \right)_0 \mathfrak{u} + \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} \mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{u}^2 + V \mathfrak{r}_0 \frac{d \mathfrak{u}}{dt} \end{aligned} \right\} \cdot \tag{156}$$

Nun achten wir auf den Zusammenhang, der zwischen $\mathfrak{q}$ und

den von A aus gezogenen Radienvektoren $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}$ besteht. Nach Abb. 54 bilden die drei das Dreieck ABO und zwar nicht nur in der Anfangslage, sondern auch in jedem folgenden Augenblicke. Hiernach gilt zu jeder Zeit die Gleichung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{q}. \tag{157}$$

Die auf den festen Raum bezogene Beschleunigung des Punktes B wird aus $\mathfrak{s}$ durch zweimalige Differentiation nach der Zeit gefunden. Dafür erhält man

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{q}}{dt^2},$$

oder wenn man alle Grössen so einsetzt, wie sie für den Augenblick $t = 0$ gelten, dafür aber den Zeiger 0, der dies früher besonders hervorhob, jetzt als entbehrlich unterdrückt,

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} + \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}. \tag{158}$$

Auch die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ des Fahrzeugpunktes, der mit B im gegebenen Augenblicke zusammenfällt, lässt sich hieraus sofort entnehmen, indem man die Gleichung auf den Fall eines constanten $\mathfrak{r}$ anwendet. Man erhält dafür

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2} + \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}^2 + V\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} \tag{159}$$

indem alle Glieder in Gl. (158), die mit Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ behaftet sind, wegfallen und alle übrigen unverändert bestehen bleiben. Setzt man dies in Gl. (158) ein, so geht sie über in

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} \tag{160}$$

oder in Worten: die absolute Beschleunigung des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeugbeschleunigung, aus der Relativbeschleunigung gegen das Fahrzeug und aus dem doppelten äusseren Produkte aus der Relativgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

Das ist der von Coriolis gefundene Satz. — Führt man dieselbe Betrachtung für $\frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ durch, so findet man aus Gl. (157)

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$$

oder mit Berücksichtigung von (156)

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + V\mathfrak{r}\mathfrak{u}$$

und indem man dies für ein constantes $\mathfrak{r}$ anwendet,

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + V\mathfrak{r}\mathfrak{u},$$

also durch Verbindung beider Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{161}$$

oder in Worten: Die absolute Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist gleich der geometrischen Summe aus der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit gegen das Fahrzeug.

Die letzte Beziehung lässt sich übrigens auch auf viel einfacherem Wege ableiten und sie ist an sich viel einfacher gestaltet, als der Satz von Coriolis. Die Vermuthung liegt, wenn man beide mit einander vergleicht, auf den ersten Anschein sehr nahe, dass sich die absolute Beschleunigung, ähnlich wie bei der Geschwindigkeit, bloss aus der Relativbeschleunigung und der Fahrzeugbeschleunigung zusammensetzen müsse. Wie man sieht, erweist sich aber diese Vermuthung nach Gl. (160) nicht als richtig, sondern es muss noch ein drittes Glied hinzutreten, das bei der sich auf die Geschwindigkeiten beziehenden Gleichung (161) fehlt.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Gleichungen von (158) an zwar unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, dass sich alle darin vorkommenden Grössen auf die Zeit $t = 0$ bezögen, dass hierin aber keine Beschränkung liegt, da es uns freisteht, jeden Augenblick als Anfangspunkt der Zeit in den der Gl. (158) vorausgehenden Formeln zu wählen.

§ 30. Andere Ableitung des Satzes von Coriolis.

Das im vorigen Paragraphen eingeschlagene Verfahren zur Ableitung des Zusammenhanges zwischen Relativ- und Absolutbeschleunigung ist, obschon die Betrachtung in der Neuauflage gegen früher wesentlich vereinfacht worden sein dürfte, doch immer noch ziemlich abstrakt gehalten. Es erscheint daher auch jetzt noch wünschenswerth, eine anschaulichere Ableitung kennen zu lernen, die geringere Mühe macht.

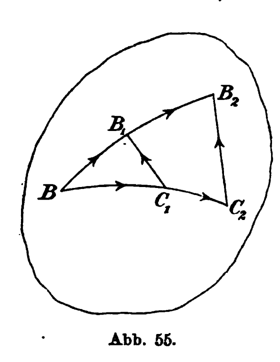


Abb. 55.

Hierzu wollen wir uns zunächst nach einem Mittel umsehen, durch das man die Beschleunigung einer Bewegung in möglichst einfacher Art ableiten kann. Man betrachte zwei aufeinanderfolgende kleine Zeittheilchen von der gleichen Dauer τ. Der absolute Weg eines Punktes, der zu Anfang den Abstand $\mathfrak{s}_0$ von einem festen Anfangspunkte hatte, sei $d\mathfrak{s}_1$ im ersten und $d\mathfrak{s}_2$ im zweiten Zeittheilchen. Dann kann man nach der Taylor'schen Entwickelung

$$d\mathfrak{s}_1 = \tau \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

$$d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 = 2\tau \left(\frac{d\mathfrak{s}}{dt}\right)_0 + \frac{(2\tau)^2}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots$$

setzen. Die Differenz der Wege $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ ist daher

$$d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1 = \tau^2 \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 + \cdots.$$

Die Glieder höherer Ordnung können weggelassen werden und man erhält daher

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} = \frac{(d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2) - 2\,d\mathfrak{s}_1}{\tau^2}. \tag{162}$$

Nun sei BB_1B_2 in Abb. 55 der absolute Weg eines beweglichen Punktes B und BC_1C_2 der absolute Weg jenes Punktes des Fahrzeugs, mit dem B anfänglich zusammenfiel.

In Anlehnung an die früher gebrauchten Bezeichnungen setzen wir zugleich

$$BB_1 = d\mathfrak{s}_1; \quad B_1B_2 = d\mathfrak{s}_2; \quad BC_1 = d\mathfrak{p}_1; \quad C_1C_2 = d\mathfrak{p}_2.$$

Die Strecken C_1B_1 und C_2B_2 geben die relativen Wege von B gegen das Fahrzeug an, so wie sie vom festen Raume aus gesehen erscheinen. Man hat dafür

$$C_1B_1 = d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1; \quad C_2B_2 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2.$$

Die Relativbeschleunigung von B ist aus dem Vergleiche der Wege C_1B_1 und C_2B_2 nach der durch Gl. (162) gegebenen Anleitung zu berechnen. Dabei müssen wir aber beachten, dass der Beobachter, der diese Wege mit einander vergleicht, im Fahrzeuge selbst aufgestellt sein muss. Markirt dieser Beobachter die Punkte C_1 und B_1 nach dem ersten Zeittheilchen im Fahrzeuge, so führt die Strecke C_1B_1 des Fahrzeugs während des zweiten Zeittheilchens selbst noch eine Bewegung aus, von der nur die Drehung um $\mathfrak{u}\tau$ in Frage kommt. Da nun C_2B_2 so gezeichnet ist, wie es der Lage nach Ablauf des zweiten Zeittheilchens entspricht, so müssen wir, um beide Strecken auch für den innen stehenden Beobachter, der sich nach dieser zweiten Lage orientirt, vergleichbar mit einander zu machen, an Stelle von C_1B_1 die Strecke

$$d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau \, \mathrm{V}(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}$$

setzen. Für die Relativbeschleunigung soll kein neuer Buchstabe mehr eingeführt werden; wir behalten vielmehr die frühere Bezeichnung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ bei und erhalten dafür nach Analogie mit Gl. (162)

$$\tau^2\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{p}_1 - d\mathfrak{p}_2 - 2\{d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1 + \tau \mathrm{V}(d\mathfrak{s}_1 - d\mathfrak{p}_1)\mathfrak{u}\}$$

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right)_0 = \frac{d\mathfrak{s}_2 - d\mathfrak{s}_1}{\tau^2} - \frac{d\mathfrak{p}_2 - d\mathfrak{p}_1}{\tau^2} - 2\,\mathrm{V}\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}\right)\mathfrak{u}$$

$$= \left(\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}\right)_0 - 2\,\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}, \tag{163}$$

wobei im letzten Gliede die Relativgeschwindigkeit an Stelle der ihr gleichen Differenz $\frac{d\mathfrak{r}_1}{\tau} - \frac{d\mathfrak{p}_1}{\tau}$ eingeführt ist. — Hiermit ist der Satz von Coriolis von Neuem bewiesen.

§ 31. **Die Zusatzkräfte bei der Relativbewegung.**

Für den im Fahrzeuge stehenden Beobachter ist das Trägheitsgesetz und die dynamische Grundgleichung nicht erfüllt, wenn er nur die thatsächlich an dem bewegten Punkte angreifenden Kräfte ins Auge fasst. Als „thatsächlich angreifende“ oder „physikalisch existirende“ Kräfte sind hierbei jene bezeichnet, die auch für den im festen Raume aufgestellten Beobachter nachweisbar sind. Mit der dynamischen Grundgleichung würden aber auch alle anderen Folgerungen der Dynamik hinfällig werden. Um die Lehren der Dynamik auch für den im Fahrzeuge aufgestellten Beobachter, der von der absoluten Bewegung seines Fahrzeuges gar keine Notiz nimmt, anwendbar zu machen, kann man aber den Kunstgriff benützen, an dem bewegten Punkte B Zusatzkräfte von der Art anzubringen, dass nachher die dynamische Grundgleichung auch für den bewegten Raum gültig bleibt. Dies ist leicht zu erreichen. Man multiplicire Gl. (163) mit der Masse m des bewegten Punktes. Dann wird

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - 2m\mathrm{V}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}. \tag{164}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt nach dem dynamischen Grundgesetze die „physikalisch existirende“ Kraft $\mathfrak{P}$ an dem materiellen Punkte (oder die Resultirende, wenn mehrere vorkommen,) dar. Die beiden anderen Glieder müssen, wenn wir die dynamische Grundgleichung auch für die Relativbewegung aufrecht erhalten wollen, ebenfalls als Kräfte gedeutet werden. Diese Kräfte sollen als „erste“ und „zweite“ Zusatzkraft bezeichnet werden.

Die erste Zusatzkraft ist jene, die schon beim d'Alembert'schen Princip vorkam. In der That hängt ja der Fall

der Relativbewegung in sehr einfacher Weise mit dem d'Alembert'schen Princip zusammen. Wenn sich ein starrer Körper bewegt, sind alle materiellen Punkte im Gleichgewichte (und in Ruhe) relativ zu einem auf dem starren Körper selbst aufgestellten Beobachter. Für diesen Beobachter müssen daher, wenn er die Lehren der Mechanik auf seinen Raum bezieht, alle an dem starren Körper angreifenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem mit einander bilden. Er muss aber dann, wie wir schon früher auf anderem Wege und jetzt von Neuem fanden, ausser den physikalisch existirenden Kräften auch die „Trägheitskräfte“ $\mathfrak{H}$, nämlich

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$$

anbringen. Bei dieser Anwendung von Gl. (164) fallen nämlich, da keine Relativbewegungen vorkommen, die Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ fort. Behalten wir die frühere Bezeichnung für die „Trägheitskräfte“ auch hier bei, so geht Gl. (164) über in

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{H} - 2m\,V\mathfrak{v}\mathfrak{u}, \tag{165}$$

wobei noch der Kürze halber die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet ist.

Die Anwendung von Gl. (165) soll zunächst an dem Beispiele des fallenden Steines gezeigt werden. An einem materiellen Punkte, den wir von der Erde aus beobachten, wirken zunächst von physikalisch existirenden Kräften die Anziehung der Erde, der Sonne und aller anderen Weltkörper, die wir uns zu einer Resultirenden $\mathfrak{P}_0$ zusammengefasst denken. Ferner können noch andere physikalisch existirende Kräfte, wie Luftwiderstand, Widerstand einer Bahn, überhaupt Druck von Seiten eines anderen Körpers, elektrische Anziehung o. dgl. daran angreifen, deren Resultirende $\mathfrak{P}_1$ sei, so dass $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1$ ist. Wenn der Punkt an seinem Orte auf der Erde unter der Einwirkung aller dieser Kräfte festgehalten werden soll, muss nach Gl. (165)

$$0 = \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_1 = -(\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H})$$

sein. Hieraus wird die Bedeutung von $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ klar, denn wir wissen, dass wir an einem materiellen Punkte, an dem andere physikalisch existirende Kräfte nicht angreifen, eine dem Gewichte des Punktes entgegengesetzt gleiche Kraft $\mathfrak{P}_1$ anbringen müssen, um ihn an seiner Stelle auf der Erde festzuhalten. Die Summe $\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{H}$ ist daher selbst das Gewicht des Körpers, das mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden soll. Hiermit geht Gl. (165) über in

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{P}_1 - 2m\,V\,\mathfrak{v}\mathfrak{u}. \qquad (166)$$

Wenn die von der Erde her gesehenen Bewegungen in Uebereinstimmung mit den auf den festen Raum bezogenen Lehren der Mechanik stehen sollen, müssen wir uns daher ausser dem Gewichte $\mathfrak{G}$ und anderen auch von der Erde her nachweisbaren Kräften $\mathfrak{P}_1$ noch die „zweiten Zusatzkräfte“ $-2m\,V\,\mathfrak{v}\mathfrak{u}$ daran angebracht denken. Die zweite Zusatzkraft ist aber hier unter gewöhnlichen Umständen sehr gering wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Drehung der Erde gegen den festen Raum und hiervon allein kommt es, dass man in der Mehrzahl der Fälle von der Eigenbewegung der Erde ganz absehen, die Bewegungen relativ zur Erde also ohne Weiteres als Absolutbewegungen betrachten kann. Ein Zahlenbeispiel möge dies noch zeigen. Die Erde dreht sich in einem Sterntage einmal um ihre Axe und voraussichtlich ist diese Winkelgeschwindigkeit als jene gegen den absoluten Raum aufzufassen. Ein Sterntag unterscheidet sich aber nicht viel von einem Sonnentage und man pflegt daher bei solchen Rechnungen die Winkelgeschwindigkeit der Einfachheit wegen auf den Sonnentag zu beziehen. Dann ist

$$u = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{sec}^{-1} = \frac{1}{13760}\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Wenn die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ etwa $10\,\mathrm{m\,sec}^{-1}$ beträgt, und senkrecht zur Erdaxe steht (also bei jener Richtung, in der das äussere Produkt seinen grössten Werth annimmt) erhält man für die zweite Zusatzkraft den Werth

$$m \cdot \frac{20 \text{ m sec}^{-1}}{13760} \cdot \text{sec}^{-1} \quad \text{oder} \quad m \cdot \frac{1}{688} \text{ m sec}^{-2}.$$

Das Gewicht von m ist $m \cdot 9{,}81 \text{ m sec}^{-2}$; die zweite Zusatzkraft beträgt daher rund $\frac{1}{7000}$ des Gewichtes, ist also unter gewöhnlichen Umständen unmerklich.

Lassen wir bei dem fallenden Steine den Luftwiderstand ausser Berücksichtigung, so ist $\mathfrak{P}_1 = 0$ zu setzen und die Differentialgleichung der Fallbewegung lautet

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} - 2m \mathrm{V} \mathfrak{v} \mathfrak{u},$$

oder, wenn wir an Stelle des Gewichtes das Produkt aus Masse und Fallbeschleunigung $\mathfrak{g}$ einführen,

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2 \mathrm{V} \mathfrak{v} \mathfrak{u}. \tag{167}$$

Gewöhnlich vernachlässigt man das zweite Glied der rechten Seite gegenüber $\mathfrak{g}$. Dann wird $\mathfrak{v} = \mathfrak{g} t$, wenn man die Zeit t von Beginn der Fallbewegung an rechnet. Es wird daher, um eine bessere Annäherung zu erhalten, genügen, wenn man im Correctionsgliede $\mathfrak{v} = \mathfrak{g} t$ setzt. Der damit begangene Fehler ist jedenfalls erst von höherer Ordnung klein, als die Abweichung von dem Falle in lothrechter Richtung; es ist daher für unsere Zwecke nicht nöthig, die Differentialgleichung (167) streng zu integriren. Wir können sie vielmehr genau genug ersetzen durch

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2t \mathrm{V} \mathfrak{g} \mathfrak{u}$$

und durch Integration erhält man daraus, wenn die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ von der Ausgangsstelle der Fallbewegung aus gerechnet werden,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \mathrm{V} \mathfrak{g} \mathfrak{u}. \tag{168}$$

Das letzte Glied ist das Correctionsglied. Das äussere Produkt aus $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ ist gleich $ug \cos \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes der Erde ist, an dem der Versuch angestellt wird. Die Richtung von $\mathrm{V} \mathfrak{g} \mathfrak{u}$ steht senkrecht zu $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$,

ist also horizontal und nach Westen hin gekehrt. Wegen des negativen Vorzeichens stellt daher das Correctionsglied eine östliche Abweichung des fallenden Steins aus der Lothrichtung dar. Am grössten wird die Abweichung am Aequator, weil dort $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}$ senkrecht zu einander stehen und $\cos\varphi = 1$ ist. Aber auch dort ist sie nur gering. Selbst bei $t = 10$ sec Fallzeit erreicht das Correctionsglied erst die Grösse

$$\frac{1000 \text{ sec}^3}{3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \frac{1}{13760} \text{ sec}^{-1} = 0{,}238 \text{ m},$$

während der in dieser Zeit in lothrechter Richtung zurückgelegte Weg bei Ausserachtlassung des Luftwiderstandes gegen 500 m beträgt.

Man hat früher öfters darüber gestritten, ob der fallende Stein auch eine Ablenkung in der Nord-Südrichtung erfahren müsse. Unsere Formeln lassen eine solche nicht erkennen, denn das Correctionsglied hat auch in der Differentialgleichung (167) keine Componente, die parallel zu $\mathfrak{u}$ wäre. Man muss aber beachten, dass wir $\mathfrak{g}$ als eine Constante behandelt haben, während in Wirklichkeit $\mathfrak{g}$ an jedem Orte der Bahn etwas (wenn auch sehr wenig) verschieden ist. Hierbei ist namentlich zu beachten, dass das Gewicht $\mathfrak{G}$ den Summanden $\mathfrak{H}$ enthält, der in verschiedenen Höhen etwas verschieden ist. Wenn man eine Kraftlinie zieht, deren Richtung überall mit der Richtung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ zusammenfällt, hat diese schon selbst eine geringe Krümmung in der Meridianebene, vorausgesetzt, dass man sich weder am Pole noch am Aequator befindet. Hiermit hängt es zusammen, dass auch eine Nord-Südabweichung des fallenden Steines herausgerechnet werden kann. Diese hat aber mit der Relativbewegung an sich nichts zu thun; die Erddrehung hängt damit nur insofern zusammen, als die „erste Zusatzkraft" $\mathfrak{H}$ davon abhängig ist.

Eng verwandt mit der Seitenablenkung des fallenden Steins ist auch die eines Geschosses. Wenn ein Geschütz z. B. in der Richtung nach Norden hin abgefeuert wird, tritt wegen der Erddrehung eine seitliche Ablenkung des Geschosses nach

Osten hin ein. Schiesst man nach Süden, so ist die Seitenablenkung westlich, d. h. in beiden Fällen nach rechts vom Schützen aus gesehen. Vorausgesetzt wird dabei, dass man sich auf der nördlichen Halbkugel befinde; am Aequator ist die Ablenkung Null und auf der südlichen Halbkugel entgegengesetzt. Auch wenn man nach Osten oder Westen hin schiesst, hat man stets eine Ablenkung nach rechts hin vom Geschütze aus gesehen. Auch der Betrag dieser Ablenkung kann unter Voraussetzung einer flachen Flugbahn leicht berechnet werden. Wenn sich das Geschoss z. B. nach Norden mit einer Geschwindigkeit von 350 m sec^{-1} ungefähr in horizontaler Richtung bewegt, ist in der geographischen Breite φ die zweite Zusatzkraft von der Grösse

$$m \cdot 700 \cdot \frac{1}{13760} \sin \varphi$$

anzubringen, wofür rund $\frac{Q}{200} \sin \varphi$ gesetzt werden kann, wenn Q das Geschossgewicht ist. Eine constante Kraft von dieser Grösse bringt z. B. während einer Flugzeit von 20 sec nach den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung einen in ihre Richtung fallenden Weg von rund

$$10 \text{ m} \cdot \sin \varphi \quad \text{oder von} \quad 7{,}7 \text{ m}$$

zu Stande, wenn $\varphi = 50^0$ gesetzt wird. Wenn es verlangt wird, kann man die Rechnung natürlich auch noch genauer durchführen; es sollte sich jetzt nur um eine Abschätzung handeln.

Beträchtlich wird die Zusatzkraft, wenn man die Bahn eines zur Erde fallenden Meteorsteines betrachtet, weil es sich in diesem Falle um sehr grosse Geschwindigkeiten handelt. Natürlich kann man aber in diesem Falle von der Betrachtung der Relativbewegung zur Erde auch ganz absehen und die Bewegung vom absoluten Raume her betrachten.

Auch an einem schnell umlaufenden Schwungrade wirkt wegen der Erddrehung ein freilich bei den praktisch vorkommenden Geschwindigkeiten nur sehr geringfügiges Kräftepaar der „zweiten Zusatzkräfte“, das leicht berechnet werden

kann. Es kann übrigens auch nach den in § 25 gegebenen Anleitungen sofort ermittelt werden, denn das Schwungrad wird von der Erde bei ihrer Bewegung im absoluten Raume genau ebenso mitgenommen wie der dort betrachtete Schwungring, der auf einer Lokomotive gelagert sein sollte.

Aus der dynamischen Grundgleichung sind alle übrigen Sätze der Mechanik, soweit sie nicht an und für sich für jeden Aufstellungsort des Beobachters gültig sind, abgeleitet worden. Sobald wir daher durch Einführung der Zusatzkräfte Sorge dafür tragen, dass die dynamische Grundgleichung auch für die Bewegungen relativ zur Erde erfüllt bleibt, können wir auch alle daraus abgeleiteten Folgerungen ohne weiteren Beweis anwenden, d. h. die Gültigkeit der zunächst auf den absoluten Raum bezogenen Betrachtungen der Mechanik wird damit auch für den auf der Erde fussenden Beobachter gerettet. Nützlich ist es zwar immerhin, noch ausdrücklich einen Vergleich darüber anzustellen, wie sich die Untersuchung gestaltet, jenachdem man vom absoluten Raume oder von der festen Erde ausgeht. Namentlich über die lebendige Kraft, auf den absoluten Raum und relativ zur Erde bezogen, lassen sich manche interessante Betrachtungen anstellen; ich muss mir es aber versagen, hier weiter darauf einzugehen.

Selbstverständlich bleiben übrigens die bisher auf die Bewegung relativ zur Erde bezogenen Betrachtungen ohne Weiteres auch für die Bewegungen relativ zu irgend einem anderen Fahrzeuge anwendbar. Man kann also z. B. die Wasserbewegung im Laufrade einer Turbine genau so untersuchen, als wenn das Laufrad ruhte, falls man nur die beiden Zusatzkräfte an jedem Wassertheilchen anbringt. Die erste Zusatzkraft reducirt sich übrigens in diesem Falle auf die Centrifugalkraft. Beide Zusatzkräfte erlangen hier sehr grosse Werthe wegen der grossen Winkelgeschwindigkeit u, die viele Tausende mal grösser ist als die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Vierter Abschnitt.

Dynamik zusammengesetzter Systeme.

---

§ 32. Die Gleichungen von Lagrange.

In der analytischen Mechanik, wie sie in mathematischen Vorlesungen vorgetragen zu werden pflegt, spielen einige allgemeine Sätze, die im Wesentlichen gleichwerthig mit einander sind und die alle dasselbe Ziel verfolgen, eine grosse Rolle. Ich bin bisher nicht auf sie eingegangen, werde aber nun einen kurzen Abriss davon geben. Um zunächst die Stellung dieser Sätze zur Mechanik verständlich zu machen, erinnere ich die Leser des dritten Bandes an die Sätze über die Formänderungsarbeit. Die Castigliano'sche Methode, Aufgaben der Festigkeitslehre mit Hülfe von Differentiationen an der zuvor berechneten Formänderungsarbeit zu lösen, entspricht genau dem, was hier beabsichtigt wird. Auch die Vorzüge und die Nachtheile eines solchen Verfahrens sind hier dieselben wie dort. In dieser Hinsicht erinnere ich daran, dass die Castigliano'sche Methode den Vorzug hatte, dass sie ein ganz bestimmtes Verfahren, das ein für alle Mal anwendbar bleibt, vorschreibt, durch dessen Befolgung man, ohne viel nachzudenken, ganz von selbst zur richtigen Lösung geführt wird. Als Nachtheil muss es aber bezeichnet werden, dass man hierbei leicht den Ueberblick über den physikalischen Zusammenhang der Grössen, mit denen man rechnet, aus den Augen verliert; man sieht wohl, was schliesslich geschieht, giebt sich aber nicht eingehend Rechenschaft darüber, warum und wie es geschieht. Nun mag man vielleicht sagen, dass dies gleichgültig sei, wenn

man nur erfährt, was man in letzter Linie wissen wollte. Ich kann dem aber nicht zustimmen. Bei allen Anwendungen, die man von der Mechanik machen will, muss man nämlich vereinfachende Voraussetzungen über die Bedingungen einführen, denen das System unterworfen ist. Es ist nicht möglich, alle Nebenumstände vollständig in der Rechnung zu berücksichtigen und es ist daher von der grössten Wichtigkeit, dass man ein zutreffendes Urtheil über den Einfluss der nicht berücksichtigten Nebenumstände gewinnt. Bei der Behandlung einer neuen Aufgabe, bei der man sich nicht an vorhandene Muster anlehnen kann, ist die richtige Abschätzung dessen, was beachtet werden muss und dessen, was ohne erheblichen Fehler ausser Acht gelassen werden darf, oft genug der schwierigste Theil der ganzen Arbeit. Eine allgemeine Anleitung hierfür zu geben, ist zwar nicht möglich; wohl aber ist klar, dass man dazu um so eher im Stande sein wird, je genauer man den Vorgang im Einzelnen verfolgt. Der Mathematiker mag sich über solche Erwägungen hinwegsetzen, da es ihm freisteht, nur solche Probleme zu behandeln, die er sich entweder selbst geschaffen hat oder bei denen kein Zweifel darüber möglich ist, welche ideellen Bedingungen an Stelle der im concreten Falle vorhandenen zu setzen sind. Beim Techniker, der bei seinen Untersuchungen stets die Verhältnisse der Wirklichkeit im Auge behalten muss, ist dies aber anders und man kann es daher verstehen, dass man sich in technischen Kreisen um jene allgemeinen Principien der analytischen Mechanik bisher nicht viel gekümmert hat. Wegen der knappen Zeit, die mir grade für die Vorlesungen über Dynamik zu Gebote steht, behandle ich diese Dinge auch selbst nicht in den Vorlesungen. In dem gedruckten Buche, bei dem es nicht viel schadet, wenn es um einige Seiten länger wird und das auch jenen Hörern, die noch etwas Weiteres zu erfahren wünschen, einige Auskunft schuldig ist, darf ich aber nicht darüber hinweggehen.

Diese allgemeinen Sätze haben nämlich noch einen grossen Vorzug, von dem bisher nicht die Rede war. Sie machen nämlich die Benutzung eines Coordinatensystems entbehrlich.

Dieser Vorzug tritt freilich dann besonders deutlich hervor, wenn man sonst alles mit Coordinaten rechnet. Für uns, die wir überall, wo es von Nutzen war, mit den gerichteten Grössen selbst rechneten, ist er zwar von geringerer Bedeutung; es ist aber andererseits verständlich, dass man einen solchen Vorzug um so höher zu schätzen weiss, je mehr man seither schon Vortheil daraus unter anderen Umständen zog.

Zu den allgemeinen Sätzen, von denen jetzt die Rede ist, gehören die Gleichungen von Lagrange, das Princip von Hamilton, das Princip der kleinsten Wirkung und das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Es genügt vollständig, wenn ich mich hier auf die Besprechung der beiden zuerst genannten beschränke, da die übrigen ihnen ganz ähnlich sind.

Man betrachte ein System, das aus starren Körpern derart zusammengesetzt ist, dass in Folge der bestehenden Verbindungen gewisse Bewegungen ausgeschlossen sind. Das System kann auch einen zwangläufigen Mechanismus bilden. In diesem Falle hat es nach einer früher eingeführten Bezeichnung nur einen Freiheitsgrad. Man kann die Stellung aller Glieder des Systems vollständig angeben, sobald die Lage eines einzigen durch eine richtungslose Grösse zum Ausdrucke gebracht wird. Man bezeichnet diese Grösse als eine „allgemeine Coordinate" des Systems, die aber mit einem Coordinatensysteme, wie es in der analytischen Geometrie gebraucht wird, nichts zu thun hat. Bei dem Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine könnte man z. B. je nach Wahl den Kolbenweg von einer Todtpunktlage aus oder den Winkel zwischen der Kurbelrichtung und der Cylinderaxe als die allgemeine Coordinate des Systems ansehen.

Für die Untersuchung zwangläufiger Mechanismen haben aber die Gleichungen von Lagrange wenig Werth, obschon sie, wenn man die Sache recht gelehrt darstellen will, auch dazu verwendet werden können. Gewöhnlich handelt es sich um Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Man denke sich etwa einen Körper A in einem Gestelle um eine Axe drehbar

gelagert, während ein zweiter Körper B sich längs einer Führung gegen den Körper A verschieben kann. An beiden Körpern können von aussen her beliebig gegebene Kräfte einwirken und man verlangt, dass die Bewegungen dieser Körper angegeben werden, wenn der Anfangszustand bekannt ist. Nach den gewöhnlichen Methoden der Mechanik löst man diese Aufgabe, indem man die zwischen A und B übertragenen Kräfte ins Auge fasst, hierauf für jeden Körper eine Gleichung anschreibt, die den Zusammenhang zwischen den Kräften und den Beschleunigungen ausdrückt und beide Gleichungen mit einander verbindet. Bei Verwendung der Gleichungen von Lagrange u. s. f. gestaltet sich aber die Betrachtung, wie man alsbald sehen wird, in der That erheblich einfacher.

Ein System von drei Freiheitsgraden ist z. B. schon ein einziger starrer Körper, der um ein Kugelgelenk beweglich ist. Man kann hier drei Grössen auf verschiedene Art auswählen, so dass die augenblickliche Lage des Systems durch sie gekennzeichnet wird. Im zweiten Abschnitte ist die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt nach den gewöhnlichen Methoden der Mechanik, d. h. mit Hülfe des Flächensatzes und des Satzes von der lebendigen Kraft bereits behandelt worden; sie kann aber auch mit Hülfe der Lagrange'schen Gleichungen u. s. f. untersucht werden. — Ausserdem kann man ein System von drei Freiheitsgraden z. B. auch dadurch bilden, dass man einem Körper A einen Freiheitsgrad gegenüber der festen Erde, einem zweiten Körper B ebenfalls einen Freiheitsgrad gegenüber A und einem dritten Körper einen Freiheitsgrad gegenüber B oder auch wieder gegen A giebt u. s. f. Nur darauf will ich noch hinweisen, dass ein einziger Freiheitsgrad, d. h. eine zwangläufige Bewegung zwischen zwei Körpern entweder durch eine Führung (Prismenpaar) oder durch ein Gelenk (Cylinderpaar) oder durch eine Schraube (Schraubenspindel und Schraubenmutter oder Schraubenpaar) oder wenigstens durch eine thatsächlich auf einen dieser drei Fälle hinauskommende Vorrichtung hergestellt wird.

Die Zahl der Freiheitsgrade möge jetzt allgemein mit n

bezeichnet werden und die zugehörigen allgemeinen Coordinaten seien

$$q_1, q_2 \cdots q_n.$$

Zu den möglichen oder virtuellen Bewegungen des Systems gehört dann jedenfalls auch jene, bei der sich nur eine der Coordinaten q, etwa q_i ändert, während die übrigen constant bleiben. Ich möchte es hier lieber vermeiden, ein bestimmtes Beispiel dafür anzuführen, weil es zum Geiste dieser Betrachtungen gehört, sie so allgemein wie möglich darzustellen. Wer aber doch lieber ein Beispiel haben will, möge sich irgend eines der vorher genannten aussuchen; es wird dann immer möglich sein, nur einen der Freiheitsgrade durch eine Bewegung, die in der Veränderung von q_i um δq_i zum Ausdrucke kommt, in Anspruch zu nehmen, während von den übrigen Freiheitsgraden kein Gebrauch gemacht wird.

Bei einer solchen virtuellen Verschiebung δq_i werden die äusseren Kräfte Arbeiten leisten, wenigstens jene, die bei dieser Verschiebung überhaupt betheiligt sind. Es kann ja auch sein, dass bei der Verschiebung δq_i die Angriffspunkte einiger von den äusseren Kräften in Ruhe bleiben. Man kann diese Arbeitsleistung etwa in der Form

$$F_i \delta q_i$$

zum Ausdrucke bringen. Wenn die äusseren Kräfte und die augenblickliche Lage des Systems gegeben sind, wird sich F_i immer leicht so ermitteln lassen, dass der vorstehende Ausdruck die Arbeitsleistung der äusseren Kräfte richtig angiebt. Man nehme etwa an, dass sich bei der Aenderung δq_i nur einer von den Körpern des Systems, der mit irgend einem anderen zwangläufig verbunden, aber sonst frei ist, verschiebe. Dann leisten nur jene äusseren Kräfte Arbeit, die an dem bewegten Theile selbst angreifen. Greift nur eine einzige äussere Kraft an ihm an, so ist unter F_i deren Componente in der Richtung der Verschiebung δq_i zu verstehen, falls diese in einer Translation besteht. Ist die Coordinate q_i ein Winkel, δq_i also eine Drehung, so ist F_i das statische Moment der

äusseren Kraft in Bezug auf die Axe der Drehung. Wirken mehrere äussere Kräfte, so kann man diese etwa zu einer Resultirenden zusammenfassen und hiervon F_i so wie vorher bilden oder man findet F_i aus der Summe der Componenten in der Verschiebungsrichtung oder der statischen Momente in Bezug auf die Drehungsaxe. In jedem Falle sind dann die äusseren Kräfte in Bezug auf die Bewegung δq_i gleichwerthig mit einer einzigen Kraft von der Grösse F_i in der Verschiebungsrichtung oder einem einzigen Kräftepaare vom Momente F_i, dessen Momentenvektor in die Drehaxe fällt. Aus diesem Grunde kann man in anschaulicher Sprache sagen, dass F_i allgemein die auf die Coordinate q_i reducirte äussere Kraft ist. Wir wollen diese Bezeichnung auch dann noch beibehalten, wenn sich bei der virtuellen Lagenänderung δq_i mehrere Körper des Systems verschieben; was dann unter F_i zu verstehen ist, geht ja aus den vorausgehenden Erörterungen in jedem Falle deutlich genug hervor.

Man betrachte ferner ein Massentheilchen m, das zu irgend einem von den Körpern des Systems gehört. Der von einem festen Anfangspunkte nach m gezogene Radiusvektor sei mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet. Während der Bewegung des Systems ist $\mathfrak{r}$ veränderlich und die augenblickliche Grösse und Richtung von $\mathfrak{r}$ ist abhängig von $\mathfrak{r}_0$, d. h. von dem Werthe, den $\mathfrak{r}$ in irgend einer Stellung des Systems, die als seine Normalstellung angesehen wird, einnimmt und den Coordinaten q. Wir schreiben also

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{r}_0 q_1 q_2 \cdots q_n). \tag{169}$$

Die Form der Function f hängt von der besonderen Construction des Systems ab. Wir bilden jetzt den Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems. Zunächst erhält man aus der Gleichung für $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \cdots \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt}, \tag{170}$$

denn $\mathfrak{r}_0$ ist eine Constante, so lange man dasselbe Massentheilchen m betrachtet. Für die Differentialquotienten der

Coordinaten q nach der Zeit empfiehlt sich hier eine schon von Newton herrührende und namentlich bei den englischen Physikern bis auf den heutigen Tag viel gebrauchte Schreibweise. Man deutet nämlich die Differentiation nach t durch einen darüber gesetzten Punkt an, schreibt also

$$\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1$$

u. s. f. Für die lebendige Kraft L des ganzen Systems hat man nach Definition

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}^2,$$

unter der Voraussetzung, dass sich die Summirung über alle Massentheilchen des ganzen Systems erstreckt. Nach Gl. (170) erhält man daraus

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m \left\{ \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n} \dot{q}_n \right\}^2, \tag{171}$$

d. h. die lebendige Kraft ist eine Function der allgemeinen Coordinaten q, durch die die augenblickliche Stellung des Systems und die Werthe $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$ u. s. f. bedingt sind, und der Aenderungsgeschwindigkeiten $\dot{q}$ und zwar ist sie in Bezug auf die $\dot{q}$ vom zweiten Grade.

Nach diesen Vorbereitungen denken wir uns ferner das d'Alembert'sche Princip angewendet. An jedem Massentheilchen sei also eine Trägheitskraft $-m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ angebracht. Dann bleibt das System, wenn es in seiner augenblicklichen Stellung zunächst festgehalten wird, auch fernerhin im Gleichgewichte und in Ruhe, sobald es der Einwirkung der äusseren Kräfte und der Trägheitskräfte überlassen wird. Um die Gleichgewichtsbedingungen in Form von Gleichungen aussprechen zu können, denken wir uns eine virtuelle Bewegung δq_i vorgenommen und setzen die Summe der Arbeitsleistungen aller Kräfte für diese virtuelle Bewegung gleich Null. Die Arbeit der äusseren Kräfte ist schon zu $F_i \delta q_i$ festgestellt. Für die

Trägheitskraft $-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ am Massentheilchen m hat man bei der virtuellen Verschiebung δq_i die Arbeit

$$-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\cdot\delta q_i.$$

Im Ganzen hat man daher nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung

$$F_i\cdot\delta q_i-\Sigma m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\cdot\delta q_i=0.$$

Auch hier ist die Summirung über alle Massentheilchen des ganzen Systems zu erstrecken. Da δq_i in allen Gliedern der Gleichung als Faktor auftritt, kann man es wegstreichen und erhält

$$F_i=\Sigma m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}. \tag{172}$$

Dieser Ausdruck kann nun noch etwas umgeformt werden. Man hat nämlich nach dem Satze über die Differentiation eines Produkts

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}+\mathfrak{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\right).$$

Daher kann an Stelle der Gl. (172) geschrieben werden

$$F_i=\Sigma m\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\right)-\Sigma m\mathfrak{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\right). \tag{173}$$

Die beiden Summen, die hierin vorkommen, lassen sich aber als Differentialquotienten der lebendigen Kraft L, die durch Gl. (171) als Function der q und der $\dot{q}$ dargestellt wurde, auffassen. Durch Differentiation von L nach $\dot{q}_i$ erhält man nämlich

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\Sigma m\mathfrak{v}^2=\Sigma m\mathfrak{v}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\dot{q}_i}=\Sigma m\mathfrak{v}\cdot\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}.$$

Bei der letzten Umformung beachte man, dass $\mathfrak{v}$ nach Gl. (170) eine lineare Function der $\dot{q}$ ist und dass der Faktor, mit dem $\dot{q}_i$ multiplicirt ist, in dieser Gleichung $\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}$ lautet. Differentiirt man die vorstehende Gleichung, die zu jeder Zeit t gültig ist, nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \Sigma m \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right),$$

also in der That den ersten der beiden Summenausdrücke in Gl. (173). Ebenso wird

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \Sigma m \mathfrak{v} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial q_i} = \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d \mathfrak{r}}{dt}\right) = \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right),$$

denn die Reihenfolge der Differentiationen von $\mathfrak{r}$ nach t und nach q_i kann vertauscht werden, da ja in der That bei direkter Ausführung der Differentiation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_n,$$

also derselbe Werth wie bei Differentiation von $\mathfrak{v}$ nach q_i (vgl. Gl. (170)) gefunden wird. Setzt man diese Werthe ein, so geht Gl. (173) über in

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{174}$$

Das ist eine der Lagrange'schen Gleichungen und für jeden anderen Freiheitsgrad oder für jede andere Coordinate q lässt sich eine nach demselben Muster anschreiben. Man erhält, wenn dies geschieht, ebenso viele Differentialgleichungen zwischen den Coordinaten q (und ihren Differentialquotienten) als Freiheitsgrade vorhanden sind, d. h. ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Die Integration dieser Differentialgleichungen ist nachher eine Aufgabe für sich, die mit der Lagrange'schen Methode nichts zu thun hat, sondern ebenso erfolgen muss, als wenn man die Differentialgleichungen der Bewegung nach den gewöhnlichen Methoden abgeleitet hätte.

Ehe ich dazu übergehe, die Benutzung der Gleichungen zur Lösung von Aufgaben auseinander zu setzen, möchte ich noch auf die Voraussetzungen aufmerksam machen, auf denen die Ableitung beruht und die bisher noch nicht hinreichend betont wurden. Vor allem müssen die Körper wirklich als starr betrachtet werden dürfen, so nämlich, dass die etwa in ihnen aufgespeicherte Formänderungsarbeit gegen die

lebendige Kraft oder vielmehr die Aenderung, die die Formänderungsarbeit etwa erfährt, gegenüber der Aenderung der lebendigen Kraft oder gegenüber der Arbeit der äusseren Kräfte vollständig vernachlässigt werden kann. Ferner ist auch die Arbeit der inneren Kräfte, die zwischen verschiedenen Körpern des Systems auftreten, überall gleich Null gesetzt. Das ist aber nur dann streng richtig, wenn zunächst keine Fernkräfte zwischen den einzelnen Gliedern auftreten und wenn ferner auch keine Reibungswiderstände zu berücksichtigen sind. Hätte man Reibungen in den Führungen oder Gelenken, so müsste natürlich ein Theil der Arbeit $F_i \delta q_i$ bei der virtuellen Verschiebung δq_i auf die Ueberwindung der Reibungen verwendet werden. Man kann sich aber in solchen Fällen damit helfen, dass man etwaige Fernkräfte (z. B. Abstossungen zwischen Magneten, wenn solche im Systeme vorkommen) nicht zu den inneren Kräften rechnet, sondern sie so behandelt, als wenn sie von aussen her angebracht wären, sie also in die F mit einrechnet. Dasselbe gilt auch von den Reibungen.

§ 33. Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur Lösung von Aufgaben.

Das Verfahren bei der Benutzung dieser Gleichungen gleicht, wie ich schon vorher bemerkte, vollständig dem aus der Festigkeitslehre von der Castigliano'schen Methode her bekannten. Wie dort zuerst für die Formänderungsarbeit, stellt man hier vor Allem einen Ausdruck für die lebendige Kraft in den gewählten allgemeinen Coordinaten auf. Dann bildet man die in Gl. (174) vorgeschriebenen Differentialquotienten und setzt ihre Differenz gleich dem aus den Bedingungen der Aufgabe bekannten Werthe von F.

Es wird am besten sein, wenn ich dieses Verfahren zunächst an einem möglichst einfach gewählten Beispiele vorführe, für das wir die Lösung schon früher auf einfacherem Wege gefunden haben. Ich wähle dazu das physische Pendel, also einen zwangläufigen Mechanismus. Die die augenblickliche Stellung des Systems beschreibende Coordinate sei der

Winkel φ, den der nach dem Schwerpunkte vom Aufhängepunkte gezogene Radiusvektor mit der Lothrichtung bildet. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{d\varphi}{dt}$ oder $\dot{\varphi}$ und die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta\dot{\varphi}^2.$$

Die Lagrange'sche Gleichung lautet demnach hier

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Hier ist L unabhängig von φ und man hat daher

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\dot{\varphi};$$

womit die Lagrange'sche Gleichung übergeht in

$$F = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Die auf die Coordinate φ reducirte äussere Kraft wird hier, da es sich um eine Drehung handelt, durch das vom Aufhängepunkte aus genommene statische Moment des Gewichts angegeben. Vergrössert man nämlich φ um $\delta\varphi$, so leistet die einzige äussere Kraft, die auf den Mechanismus einwirkt, nämlich das Gewicht Q, eine Arbeit von der Grösse $Qs\delta\varphi \sin\varphi$. Das Vorzeichen der Arbeitsleistung ist negativ, da sich der Schwerpunkt hebt, wenn φ wächst. Man hat daher

$$F = -Qs\sin\varphi$$

und nach Einsetzen dieses Werthes geht die Gleichung von Lagrange über in die uns schon von früher her bekannte Differentialgleichung für die Pendelbewegung

$$\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Qs\sin\varphi.$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung hat nichts mehr mit der hier zu erläuternden Methode zu thun; sie muss vielmehr genau so wie früher erfolgen.

Der Vortheil der Methode kann sich aber, wie schon bemerkt, erst dann deutlicher herausstellen, wenn man ein System mit wenigstens zwei Freiheitsgraden wählt. Als Beispiel dafür behandle ich das in Abb. 56 dargestellte System, das aus einem physischen Pendel besteht, an dem ein zweites drehbar aufgehängt ist. Der starre Körper A soll im Gelenke α drehbar gegen ein festes Gestell gelagert sein, während sich der Körper B (ebenfalls reibungsfrei) gegen A um die Drehaxe β drehen kann, die zu α parallel ist. Man kann sich etwa unter A eine Glocke und unter B ihren Klöppel vorstellen und da grade dieser Fall schon öfters besprochen wurde, pflegt man das Problem auch kurz als das von Glocke und Klöppel zu bezeichnen. Der Schwerpunkt S von A soll auf der Verbindungsgraden der Gelenke liegen; es ist aber nicht nöthig, dass er zwischen α und β liegt, wie er in der Abbildung gezeichnet ist, vielmehr kann der Schwerpunktsabstand s auch grösser als der Abstand l zwischen beiden Gelenken sein. Der Schwerpunkt von B ist mit S_1 bezeichnet. Als allgemeine Coordinaten des Systems wählen wir die in der Abbildung mit φ und ψ bezeichneten Winkel, durch die die augenblickliche Lage offenbar vollständig beschrieben wird.

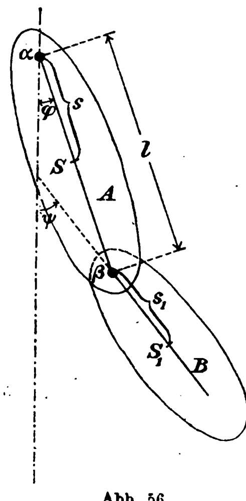


Abb. 56.

Zunächt haben wir hier wieder den Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems aufzustellen. Für die lebendige Kraft von A erhalten wir denselben Werth wie im vorigen Beispiele. Die lebendige Kraft von B lässt sich aus zwei Theilen zusammensetzen, von denen einer die durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit v bedingte Translationsenergie und der andere die zur Drehung um die Schwerpunktsaxe gehörige Rotationsenergie darstellt. Die letzte ist gleich $\frac{1}{2}\Theta_1\dot{\psi}^2$,

wenn Θ_1 das Trägheitsmoment von B für die Schwerpunktsaxe angiebt, während Θ wie vorher das Trägheitsmoment von A für die Aufhängeaxe α bedeutet.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit v von S_1 beachte man, dass die Bewegung von B auch als ein Zusammenwirken einer Translation mit der Geschwindigkeit von β und einer Drehung um β aufgefasst werden kann. Bei der Translation hat jeder Punkt von B und daher auch S_1 eine Geschwindigkeit von der Grösse $l\dot{\varphi}$, die senkrecht zu l gerichtet ist und bei der Rotation um β hat S_1 eine zu s_1 senkrecht gerichtete Geschwindigkeit von der Grösse $s_1\dot{\psi}$. Die wirkliche Geschwindigkeit von S_1 ist die geometrische Summe aus diesen beiden Componenten. Abb. 57 zeigt das Dreieck, das man bei der geometrischen Summirung erhält. Auf die Richtung von v kommt es bei der lebendigen Kraft nicht an, sondern nur auf den Werth v^2 und diesen erhalten wir aus dem Dreiecke zu

Abb. 57.

$$v^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi).$$

Für die lebendige Kraft des ganzen Systems erhalten wir daher den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Theta_1\dot{\psi}^2 + \frac{Q_1}{2g}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)\right), \qquad (175)$$

wobei unter Q_1 das Gewicht des Klöppels zu verstehen ist.

Der nächste Schritt besteht darin, an diesem Ausdrucke die in den Lagrange'schen Gleichungen vorgeschriebenen Differentiationen vorzunehmen. Wir erhalten zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta\dot{\varphi} + \frac{Q_1}{g}l^2\dot{\varphi} + \frac{Q_1}{g}ls_1\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g}l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g}ls_1\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi) + \frac{Q_1}{g}ls_1\frac{d\psi}{dt}\sin(\psi - \varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Ganz ebenso findet man

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \Theta_1 \dot\psi + \frac{Q_1}{g} s_1{}^2 \dot\psi + \frac{Q_1}{g} l s_1 \dot\varphi \cos(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \Theta_1 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g} s_1{}^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos(\psi - \varphi)$$
$$+ \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \sin(\psi - \varphi) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Endlich liefern die Differentiationen nach den Coordinaten φ und ψ selbst

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \sin(\psi - \varphi),$$
$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{Q_1}{g} l s_1 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \sin(\psi - \varphi).$$

Nachdem die Differentialquotienten gebildet sind, stellen wir die Werthe F_φ und F_ψ der auf die Coordinaten φ und ψ reducirten äusseren Kräfte auf. Wenn sich nur ψ um $\delta\psi$ ändert, leistet von äusseren Kräften nur das Gewicht des Klöppels eine Arbeit und wir erhalten daher genau wie im vorhergehenden Beispiele

$$F_\psi = -Q_1 s_1 \sin\psi.$$

Wenn sich dagegen φ um $\delta\varphi$ vergrössert und ψ constant bleibt, hebt sich sowohl der Schwerpunkt der Glocke als der Schwerpunkt des Klöppels. Dabei ist wohl zu beachten, dass sich der Klöppel nicht etwa in relativer Ruhe zur Glocke befindet, denn dabei würde sich ja auch ψ ändern. Vielmehr entspricht der virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ eine Translation des Klöppels, bei der sich der Schwerpunkt um ebensoviel hebt, als das Gelenk β. Wir erhalten daher

$$F_\varphi = -Qs \sin\varphi - Q_1 l \sin\varphi,$$

wobei mit Q das Gewicht der Glocke bezeichnet ist.

Jetzt ist alles so weit vorbereitet, dass wir die gefundenen Ausdrücke in die Lagrange'schen Gleichungen einsetzen können. Diese lauten mit den hier eingeführten Bezeichnungen

$$F_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi},$$
$$F_\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

und nach Einsetzen gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned}
-\sin\varphi\,(Qs+Q_1 l) &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta+\frac{Q_1}{g}\,l^2\right)\\
&+\frac{d^2\psi}{dt^2}\,\frac{Q_1}{g}\,ls_1\cos(\psi-\varphi)-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\frac{Q_1}{g}\,ls_1\sin(\psi-\varphi)\\
-\sin\psi\cdot Q_1 s_1 &= \frac{d^2\psi}{dt^2}\left(\Theta_1+\frac{Q_1}{g}\,s_1^2\right)\\
&+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\frac{Q_1}{g}\,ls_1\cos(\psi-\varphi)+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{Q_1}{g}\,ls_1\sin(\psi-\varphi)
\end{aligned}\right\}\cdot(176)$$

Hiermit ist das durch die Anwendung der Gleichungen von Lagrange angestrebte Ziel erreicht; wir sind jetzt im Besitze der Differentialgleichungen, durch die die Abhängigkeit der Variabeln φ und ψ von der Zeit beschrieben wird. Freilich sind wir damit noch nicht zur genauen Kenntniss des Bewegungsvorgangs gelangt; dazu müsste man die Gleichungen zuvor integriren können. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von mehreren Freiheitsgraden sind nun freilich gewöhnlich, wie auch im hier vorliegenden Falle, so verwickelt, dass man sie nicht allgemein zu integriren vermag. Das hindert jedoch nicht, dass man über manche Fragen, die von besonderem Interesse sind, Aufschluss aus den Differentialgleichungen zu erhalten vermag, ohne dass diese zuvor integrirt zu werden brauchten.

Ehe ich hierauf näher eingehe, möchte ich noch darauf hinweisen, wie die Bewegungsgleichungen des Systems aufzustellen sind, wenn man die Gleichungen von Lagrange und die ihnen verwandten Sätze nicht benutzen will. Hierzu steht zunächst der Satz von der lebendigen Kraft zur Verfügung. Man addire zu dem in Gl. (175) aufgestellten Werthe von L die potentielle Energie V, die dadurch zu Stande kommt, dass die Schwerpunkte S und S_1 über ihrer tiefsten Lage liegen. Man hat dafür

$$V = Qs\,(1-\cos\varphi)+Q_1 l\,(1-\cos\varphi)+Q_1 s_1\,(1-\cos\psi).$$

Die Gleichung $L+V=\text{Const.}$ giebt sofort eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und ψ; sie bildet, wie

man sagen kann, ein erstes Integral der Gl. (176). Eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ kann man etwa aus dem Flächensatze erhalten. Man berechne den Drall des Systems für die Axe α. Der Drall wird, wie man leicht findet,

$$B = \frac{d\varphi}{dt}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g} l^2 + \frac{Q_1}{g} l s_1 \cos(\psi - \varphi)\right) + \frac{d\psi}{dt}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g} s_1^2 + \frac{Q_1}{g} s_1 l \cos(\psi - \varphi)\right).$$

Das statische Moment der äusseren Kräfte, d. h. der beiden Gewichte für die Axe α lässt sich ebenfalls sofort angeben; es ist nebenbei bemerkt, gleich $F_\varphi + F_\psi$. Nach dem Flächensatze ist nun $\frac{dB}{dt}$ gleich diesem Momente. Dies liefert eine zweite Gleichung zwischen φ und ψ und zwar jene Gleichung, die durch Addition der Gl. (176) zu einander entsteht.

Ein anderes Verfahren zur Ableitung der Bewegungsgleichungen besteht in der unmittelbaren Anwendung des Princips von d'Alembert. Man bringt an jedem Massentheilchen die Trägheitskräfte an, die sich in den Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken lassen und schreibt an, dass beide Körper A und B im Gleichgewichte sein müssen, womit man sofort die Bewegungsgleichungen erhält.

Diese Vergleiche zeigen, dass die Gleichungen von Lagrange in der That für jenen vollständig entbehrlich sind, der die in den ersten beiden Abschnitten dieses Bandes behandelten Lehren beherrscht. Freilich lässt sich aber andererseits auch nicht verkennen, dass die Anwendung der Methode von Lagrange zwar einige Ansprüche an die Rechengewandtheit stellt, dass sie aber ein schärferes Nachdenken, das sich bei den anderen Wegen nöthig macht, nicht verlangt. Insofern und in Bezug auf die allgemeine Anwendbarkeit des gleichen Verfahrens in den verschiedensten Fällen ist sie den früher entwickelten und von mir im allgemeinen bevorzugten Verfahren ohne Zweifel überlegen.

Ich gehe jetzt zu den Schlüssen über, die sich aus den Differentialgleichungen (176) ziehen lassen. Nimmt man an,

dass die Masse des Klöppels gegenüber der Glockenmasse zu vernachlässigen ist, so wird dies in den Gleichungen dadurch ausgedrückt, dass man Q_1 und Θ_1 gleich Null setzt. Die zweite Gleichung hebt sich dann vollständig weg und die erste geht über in

$$- \sin \varphi \cdot Qs = \Theta \frac{d^2 \varphi}{d t^2},$$

d. h. in die Gleichung des gewöhnlichen Pendels, was ja auch von vornherein zu erwarten war. Betrachtet man die Lösung dieser Gleichung als genau genug auch dann, wenn Q_1 und Θ_1 zwar klein, aber nicht gleich Null sind, so lässt sich die zweite der Gl. (176) benutzen, um nachher auch noch ψ zu bestimmen, wenn man φ als bekannte Function der Zeit einsetzt.

Vor allen anderen aber ist die Frage von Interesse, unter welchen Umständen es kommen kann, dass der Klöppel gar nicht an die Glocke anschlägt. Diese Frage ist nicht willkürlich aufgeworfen worden, sondern man ist auf die Möglichkeit, dass die Glocke nicht läutet, obschon sie in Pendelschwingungen versetzt wird, erst durch die Erfahrung gekommen, die man mit der Kölner Kaiserglocke gemacht hat. Hierdurch ist das Problem von „Glocke und Klöppel“ zu einer gewissen Berühmtheit gelangt und ein Lehrbuch der Mechanik, das sich überhaupt mit solchen Fragen beschäftigt, kann nicht gut über dieses Beispiel hinweggehen.

Das Anschlagen des Klöppels an die Glocke hängt von der Relativbewegung zwischen beiden Körpern ab; der Klöppel schlägt an, wenn der Winkel $\psi - \varphi$ einen gewissen positiven oder negativen Werth erlangt hat. Es kann aber sein, dass $\psi - \varphi$ diesen Werth nach den Gl. (176) mit Rücksicht auf die gegebenen Anfangsbedingungen überhaupt nicht erreicht. So könnte $\psi - \varphi$ stets einen constanten Werth γ behalten, der kleiner ist, als jener, bei dem sich Glocke und Klöppel berühren. Wir wollen untersuchen, ob und wann dies eintrifft. Mit

$$\psi = \gamma + \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

gehen die Gl. (176) über in

$$-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right)$$
$$-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma$$

$$-\sin(\gamma + \varphi)\,Q_1 s_1 = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \cos\gamma\right)$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Q_1}{g}\,l s_1 \sin\gamma.$$

Nur dann, wenn diese beiden Gleichungen durch passende Wahl der Constanten identisch mit einander werden, kann sich das System wie ein starrer Körper bewegen. Wir sehen, dass dazu jedenfalls $\gamma = 0$ sein muss; also nur wenn der Klöppel in die Glockenaxe fällt, können beide miteinander schwingen, ohne sich gegeneinander zu drehen. Von den anderen Fällen, dass etwa s_1 oder l oder Q_1 verschwinden, sehen wir nämlich ab, weil dadurch das Problem thatsächlich in ein anderes übergeführt würde. — Mit $\gamma = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$-\sin\varphi\,(Qs + Q_1 l) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right)$$
$$-\sin\varphi \cdot Q_1 s_1 \qquad = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1\right)$$

und identisch werden beide, wenn zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung

$$\frac{\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Qs + Q_1 l} = \frac{\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Q_1 s_1} \tag{177}$$

erfüllt ist. Man kann daher zu jeder gegebenen Glocke immer auf sehr verschiedene Arten einen Klöppel construiren, der nicht anschlägt. Zwischen dem Gewichte Q_1, dem Trägheitsmomente für den Schwerpunkt Θ_1 und dem Schwerpunktsabstande s_1, also zwischen den drei Grössen, die sich auf den zu construirenden Klöppel beziehen, braucht nämlich nur die einzige Bedingungsgleichung (177) erfüllt zu sein, so dass man zwei der Grössen noch willkürlich wählen kann.

Betrachtet man den Klöppel als einen materiellen Punkt

von geringem Gewichte, der durch eine gewichtslose Stange an der Glocke aufgehängt ist, so kann man in Gl. (177) $\Theta_1 = 0$ setzen und Q_1 gegenüber Q vernachlässigen. Gl. (177) geht dann über in

$$\frac{\Theta}{Q s} = \frac{s_1 + l}{g}$$

oder, wenn man die reducirte Pendellänge l_{red} der Glocke

$$l_{\text{red}} = \frac{\Theta}{\frac{Q}{g} \cdot s}$$

einführt, einfacher

$$l_{\text{red}} = s_1 + l,$$

d. h. der als materieller Punkt aufgefasste Klöppel muss mit dem Schwingungsmittelpunkte der Glocke zusammenfallen. — Im Uebrigen sind aber die zuletzt eingeführten Vernachlässigungen gar nicht nöthig, da man auch mit der genauen Gl. (177) ohne Schwierigkeit rechnen kann.

Wenn Gl. (177) erfüllt ist, kann die jetzt untersuchte Bewegungsform eintreten. Sie muss aber nicht eintreten dies hängt vielmehr von den Anfangsbedingungen ab. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass der Klöppel auch bei einer Glocke, für die Gl. (177) erfüllt ist, anschlägt; es wird aber leicht ein Versagen vorkommen und daher muss eine solche Anordnung jedenfalls vermieden werden.

Bis jetzt ist nur der Fall besprochen worden, dass ψ dauernd gleich φ bleibt. Ein Versagen der Glocke tritt aber auch schon dann ein, wenn $\psi - \varphi$ nicht dauernd gleich Null ist, sondern nur innerhalb enger Grenzen schwankt. Die Bedingung hierfür lässt sich nicht näher angeben, da man die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Systems nicht zu integriren vermag. Es lässt sich aber voraussehen, dass dieser Fall um so eher eintreten wird, je näher Gl. (177) erfüllt ist. Man thut daher gut, die in Gl. (177) vorkommenden Constanten so zu wählen, dass sich die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Verhältnisse ziemlich erheblich von einander unterscheiden.

§ 34. Schwingungen eines Regulators.

Eine Dampfmaschine, die mit einem Centrifugalregulator ausgerüstet ist, bildet ein System mit zwei Freiheitsgraden. Dem einen Freiheitsgrade entspricht die Bewegung des Kurbelmechanismus und der mit ihm zwangläufig verbundenen Theile und als zugehörige allgemeine Coordinate kann der Winkel angesehen werden, um den sich die Kurbelwelle seit einem als Ausgangspunkt der Betrachtung gewählten Augenblicke weiter gedreht hat. Der andere Freiheitsgrad bezieht sich auf die von der vorigen unabhängige Bewegung des Regulators, durch die der Hub des Regulators geändert wird. Als zugehörige allgemeine Coordinate kann entweder dieser Hub selbst, also der Weg, den die Regulatorhülse parallel zur Umdrehungsaxe des Regulators zurückgelegt hat, angesehen werden oder anstatt dessen auch der Winkel, den die Stangen des Regulators mit der Umdrehungsaxe bilden.

Bei gleichförmigem Gange der Dampfmaschine bleibt der Regulator in seiner Stellung; der zweite von beiden Freiheitsgraden wird also nicht ausgenützt. Zwar treten auch in diesem Falle während jedes Umlaufes periodische Geschwindigkeitsschwankungen der Kurbelwelle und der mit ihr zwangläufig verbundenen Regulatorspindel auf; sie werden aber durch das Schwungrad, über dessen Berechnung bereits im ersten Bande nähere Angaben gemacht wurden, in engen Grenzen gehalten. Da sich einer Aenderung der Regulatorstellung Bewegungswiderstände verschiedener Art entgegensetzen, vermögen jene periodischen Geschwindigkeitsschwankungen an der Regulatorstellung in der Regel nichts zu ändern. Sobald aber die Belastung der Maschine durch Ausschaltung oder Einschaltung von Arbeitsmaschinen, die von ihr angetrieben werden, geändert wird, kommt der zweite Freiheitsgrad des Regulators zur Geltung. Der Regulator hebt oder senkt sich, wirkt auf die Steuerung der Maschine (oder auf eine Drosselklappe u. s. f.), ändert damit den Dampfzutritt und führt schliesslich (falls er richtig construirt ist) einen den abgeänderten Belastungsverhältnissen entsprechenden gleichförmigen Gang von Neuem

herbei. Dabei wünscht man, dass die Umdrehungszahlen, die zu verschiedenen Belastungen gehören, nicht viel von einander abweichen. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es, den gleichförmigen Gang der Maschine (also jenen mit constantem Regulatorhube) bei verschiedenen Geschwindigkeiten zu untersuchen, wobei jedesmal nur auf einen Freiheitsgrad des Systems zu achten ist. Hiermit beschäftigt sich vorwiegend die Theorie der Regulatoren, die in der theoretischen Maschinenlehre behandelt wird und auf die ich hier nicht eingehen werde. Auch die hiermit zusammenhängenden Begriffe der Empfindlichkeit, der Energie und der Verstellungskraft des Regulators kommen hier nicht in Betracht.

Ausserdem ist aber von dem Regulator auch zu verlangen, dass er bei einer Veränderung der Belastung in die dieser entsprechende neue Stellung ohne grosse Schwankungen übergehe. Von vornherein ist klar, dass diese Forderung keineswegs mit der früheren zusammenfällt. Wenn sich der Regulator bei einer Verminderung der Belastung hebt, wird man nicht erwarten dürfen, dass er sich grade nur um das erforderliche Maass hebt und dann stehen bleibt; er wird vielmehr Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage (relativ zur Regulatorspindel genommen) ausführen, die unter Umständen zu sehr starken Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine führen können. Man kann sich hiergegen schützen, indem man den Regulator mit einer Oelbremse oder einem „Katarakte“ verbindet, wodurch ein Bewegungswiderstand eingeführt wird, der bei geringen Geschwindigkeiten des Regulators relativ zur Spindel geringfügig ist, mit der Geschwindigkeit aber erheblich wächst. Hierdurch werden die Regulatorschwingungen stark gedämpft und, wenigstens sofern nur eine einzelne Maschine in Frage kommt, in der Regel unschädlich gemacht.

Anders ist es, wenn mehrere Maschinen auf dieselbe Welle arbeiten. So machen sich in grossen Elektricitätswerken die Schwingungen, die hierbei entstehen können, zuweilen recht bemerklich. Die einzelnen Dampfmaschinen sind in diesem Falle übrigens nicht mechanisch, sondern elektromagnetisch,

d. h. dadurch mit einander gekuppelt, dass die von ihnen angetriebenen Dynamomaschinen in Parallelschaltung zu demselben Stromkreise gehören, wodurch der ganze Vorgang noch eine weitere Verwickelung erfährt. Man hat es dann mit Systemen von drei, vier oder noch mehr Freiheitsgraden zu thun. Die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung macht zwar auch in solchen Fällen keine erheblichen Schwierigkeiten. Um so schwieriger, wenn nicht unmöglich, ist aber deren Integration.

In den letzten Jahren hat man sich mit Schwingungserscheinungen der bezeichneten Art wieder mehrfach beschäftigt. Ich erwähne zunächst eine Abhandlung von Stodola in der Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1899, S. 506, die sich auf Maschinen bezieht, die mit sogenannten Flachreglern ausgerüstet sind. Ferner verweise ich auf eine Abhandlung von G. Kapp in der Elektrotechn. Zeitschr. 1899, S. 134 über „Das Pendeln parallel geschalteter Maschinen", in der die Schwingungen elektromagnetisch gekuppelter Maschinen behandelt werden.

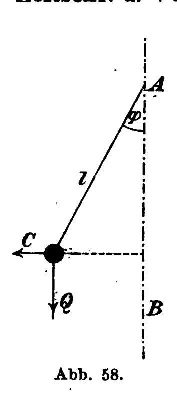


Abb. 58.

Näher auf diese Dinge einzugehen, verbietet hier der Raum; ich beschränke mich vielmehr auf einige allgemeine Erörterungen, aus denen hervorgeht, welche Hülfsmittel die Mechanik zur Lösung solcher Aufgaben unmittelbar zur Verfügung stellt.

Ich beginne mit einem ganz einfachen Falle. In Abb. 58 sei AB die Axe einer senkrechten Welle, an der mit Hülfe eines drehbaren Armes eine Kugel vom Gewichte Q aufgehängt ist. Die Kugel soll als materieller Punkt aufgefasst und die Stange als gewichtslos angesehen werden. Ausserdem soll die Masse der Kugel so gering sein, dass ihre lebendige Kraft ganz unbedeutend gegenüber der lebendigen Kraft eines Schwungrads ist, das in zwangläufiger Verbindung mit der Welle AB stehen möge. Wir brauchen dann auf die Aenderungen der Umlaufsgeschwindigkeit nicht zu achten, die nach

dem Flächensatze eintreten müssen, wenn sich die Kugel von der Umdrehungsaxe entfernt oder sich ihr nähert, können vielmehr die Winkelgeschwindigkeit u der Welle AB als constant ansehen. Der Winkelgeschwindigkeit u entspricht ein Ausschlag φ_0 der Stange, bei dem die Kugel in relativem Gleichgewichte gegen die Welle ist. Der Zusammenhang zwischen u und φ_0 ist schon im ersten Bande untersucht. Jetzt wollen wir zusehen, was für Schwingungen der Arm um die Gleichgewichtslage φ_0 ausführt, wenn er von Anfang an nicht in die Richtung φ_0 fiel. Von Reibungen soll dabei abgesehen werden.

Man behandelt diese Aufgabe am einfachsten auf Grund der Sätze über die Relativbewegung. Relativ zu einem Raume, der sich mit der Welle umdreht, haben wir es nur mit einer pendelnden Bewegung um die Gleichgewichtslage φ_0 zu thun. Dabei müssen die beiden Ergänzungskräfte der Relativbewegung an der Kugelmasse angebracht werden. Die erste Ergänzungskraft ist hier einfach die Centrifugalkraft C. Die zweite steht senkrecht zu der durch die Wellenaxe und die Stange gelegten Ebene oder senkrecht zur Schwingungsebene. Sie bringt eine Verbiegung der Stange hervor, die aber erst bei hohen Umlaufszahlen merklich wird und dann zu den in § 28 behandelten Schwingungserscheinungen der „Hängespindeln“ führt. Hier wollen wir dagegen voraussetzen, dass die Stangenverbiegung unmerklich sei. Die zweite Ergänzungskraft wird freilich mindestens zu Druckkräften im Gelenke der Stange und damit zu Reibungen im Gelenke führen, die schon von erheblicher Grösse werden können, lange bevor die Verbiegung der Stange in Betracht kommt. Diese Reibungen dämpfen die Schwingungen, die wir hier untersuchen wollen. Da wir aber alle Bewegungswiderstände an der Stange ausser Berücksichtigung lassen wollten, ist auch auf diese Reibung nicht zu achten. Dann kommt die zweite Ergänzungskraft für die Schwingungen überhaupt nicht in Betracht, sondern nur das Gewicht Q und die Centrifugalkraft C. Für C haben wir übrigens

$$C = \frac{Q}{g} u^2 l \sin \varphi.$$

Die Bewegungsgrösse der Kugel relativ zum rotirenden Raume ist gleich

$$\frac{Q}{g} l \frac{d\varphi}{dt}$$

und senkrecht zum Arme l gerichtet. Das Moment dieser Bewegungsgrösse in Bezug auf die Gelenkaxe hat den Werth

$$\frac{Q}{g} l^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

und nach dem Flächensatze ist die zeitliche Aenderung davon gleich dem statischen Momente der Kräfte Q und C. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{Q}{g} l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Cl \cos\varphi - Ql \sin\varphi$$

oder nach Einsetzen des Werthes von C und Division mit $\frac{Ql^2}{g}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u^2 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{g}{l} \sin\varphi. \tag{178}$$

Das ist die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung. Ein erstes Integral davon kann sofort gefunden werden. Man multiplicire beiderseits mit $\frac{d\varphi}{dt}$ und beachte, dass dann alle Glieder vollständige Differentialquotienten nach t vorstellen. Die Integration liefert dann

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = K - \frac{u^2}{4} \cos 2\varphi + \frac{g}{l} \cos\varphi. \tag{179}$$

Diese Gleichung hätte übrigens auch nach dem Satze von der lebendigen Kraft leicht gefunden werden können. Die Integrationsconstante K hängt natürlich von den Anfangsbedingungen ab und bedingt andererseits die Amplitude der Schwingungen. Auch der nochmaligen Integration von Gl. (179) steht an und für sich nichts im Wege. Durch Trennung der Variabeln erhält man

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2K - \frac{u^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} = dt.$$

Die Gleichung

$$t = K_1 + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2K - \frac{u^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} \tag{180}$$

giebt demnach den verlangten Zusammenhang zwischen φ und t an, wobei auch die neue Integrationsconstante K_1 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden kann. Das in Gl. (180) vorkommende Integral ist ein elliptisches und kann ohne Schwierigkeit auf die Normalformen reducirt werden. Immerhin erfordert dies aber umständliche Rechnungen, die man lieber umgeht. Wir wollen daher sehen, was wir auf andere Art über die Schwingungen herausbringen können.

Wir wollen zunächst nach den Grenzen fragen, zwischen denen sich die Schwingung abspielt. An den Grenzen des Ausschlags ist $\frac{d\varphi}{dt}$ gleich Null und daher nach Gl. (179), wenn man den Cosinus des doppelten Winkels in dem des einfachen ausdrückt,

$$K - \frac{u^2}{4}(2\cos^2\varphi - 1) + \frac{g}{l}\cos\varphi = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade in Bezug auf $\cos\varphi$ und durch Auflösen erhält man

$$\cos\varphi = \frac{g}{u^2 l} \pm \sqrt{\frac{g^2}{u^4 l^2} + K_2}, \tag{181}$$

wobei zur Abkürzung die neue Constante K_2 an Stelle von K, nämlich

$$K_2 = \frac{2K}{u^2} + \frac{1}{2}$$

eingeführt ist. Die beiden Wurzeln geben die Cosinus der Ausschläge φ_1 und φ_2 an, zwischen denen die Schwingungen erfolgen. Wenn K_2 positiv ist, wird $\cos\varphi_1$ positiv und $\cos\varphi_2$ negativ, d. h. die Schwingung würde dann die Kugel über die durch das Gelenk A gelegte Horizontale hinaufführen. Ferner könnte auch φ_1 einen negativen Winkel bedeuten und zwar würde dieser Fall, wie man aus Gl. (179) erkennt, wenn man darin $\varphi = 0$ setzt, dann eintreten, wenn

$$K - \frac{u^2}{4} + \frac{g}{l} > 0$$

oder

$$K_2 > 1 - \frac{2g}{u^2 l}$$

wäre. Dies kann auch nicht überraschen, denn in der That ist ja die gewöhnliche Pendelbewegung in der hier untersuchten als specieller Fall mit enthalten; man braucht in den Gl. (178) bis (180) nur $u = 0$ zu setzen, um sie in die Gleichungen für die einfache Pendelbewegung übergehen zu lassen. Um diese Fälle wollen wir uns aber jetzt nicht kümmern, da uns nur jene Schwingungen von Interesse sind, bei denen φ stets positiv und ein spitzer Winkel bleibt. Die Constante K_2 muss dann jedenfalls einen negativen Werth haben.

Auch $\varphi = \varphi_0$ bildet eine Lösung der Differentialgleichung (178), nämlich jene Lösung, die dem Gleichgewichte der Stange in der Lage φ_0 entspricht. Für diese (übrigens schon früher auf anderem Wege gefundene) Lage erhalten wir nach Gl. (178)

$$\cos \varphi_0 = \frac{g}{u^2 l}. \tag{182}$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in Gl. (181) finden wir für die beiden Grenzlagen, zwischen denen die Schwingung erfolgt,

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \cos \varphi_0 + \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + K_2} \\ \cos \varphi_2 &= \cos \varphi_0 - \sqrt{\cos^2 \varphi_0 + K_2} \end{aligned}\right\}. \tag{183}$$

Aus beiden folgt zugleich

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \varphi_0. \tag{184}$$

Multipliciren wir hier beiderseits mit l, so erkennen wir, dass *die Kugel sich während der Schwingung um dieselbe Höhe gegen die Gleichgewichtslage senkt, als sie sich bei dem Ausschlage nach der anderen Seite hin über sie erhebt.* Wenn die eine Grenzlage bekannt ist, kann hiernach die andere sofort angegeben werden. Ausserdem kann auch der Werth der Constanten K_2 nach den Gl. (183) sofort

gefunden werden, wenn die Grenzlagen, zwischen denen die Schwingung erfolgt, gegeben sind.

Schon bei der einfachen Pendelbewegung gestaltete sich die Rechnung erheblich einfacher, wenn man sich auf die Untersuchung der Schwingungen mit kleinen Ausschlägen beschränkte. Das soll jetzt auch hier geschehen. Ich setze also

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon,$$

wobei nun ε ein kleiner veränderlicher Winkel ist, der zwischen dem negativen Werthe ε_1 und dem positiven Werthe ε_2 hin und herschwankt. Wegen dieser Kleinheit der Ausschläge lassen sich $\sin \varepsilon$ und $\cos \varepsilon$ in sehr schnell convergirende Reihen entwickeln, von denen es genügt, die Glieder erster Ordnung beizubehalten, obschon es freisteht, die Entwickelung auch noch auf Glieder höherer Ordnung zu erstrecken. Ich setze also in Gl. (178)

$$\sin \varepsilon = \varepsilon \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon = 1$$

$$\sin \varphi = \sin(\varphi_0 + \varepsilon) = \sin \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0$$

und

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_0 + \varepsilon) = \cos \varphi_0 - \varepsilon \sin \varphi_0.$$

Hierdurch geht Gl. (178) über in

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \frac{u^2}{2}(\sin 2\varphi_0 + 2\varepsilon \cos 2\varphi_0) - \frac{g}{l}(\sin \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (182) vereinfacht sich dies zu

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = \varepsilon\left(u^2 \cos 2\varphi_0 - \frac{g}{l} \cos \varphi_0\right) = -\varepsilon u^2 \sin^2 \varphi_0. \quad (185)$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung. Der einzige Unterschied gegenüber Gl. (16) besteht nur darin, dass dort die Veränderliche x eine Wegstrecke, hier aber die Veränderliche ε einen Winkelweg bedeutet. An der Lösung der Differentialgleichung kann dies aber nichts ändern und wir können daher die in § 4 gefundenen Resultate ohne Weiteres auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Wir erkennen namentlich, dass die kleinen Schwingungen

auch hier isochron sind und erhalten die Dauer T einer vollen Schwingung aus Gl. (20), wenn wir darin

an Stelle von $\frac{m}{c}$ hier $\frac{1}{u^2 \sin^2 \varphi_0}$

schreiben, womit diese Gleichung in

$$T = \frac{2\pi}{u \sin \varphi_0} \tag{186}$$

übergeht. Dabei kann noch φ_0 aus Gl. (182) eingesetzt werden, so dass man auch

$$T = \frac{2\pi u l}{\sqrt{u^4 l^2 - g^2}} \tag{187}$$

erhält. Wenn u sehr gross wird, wird die Schwingungsdauer sehr klein. Dabei ist wohl zu beachten, dass u mindestens so gross sein muss, dass der Wurzelwerth reell ist, denn im anderen Falle wäre Gl. (182) nicht anwendbar und auch sonst wäre die vorausgehende Entwickelung zu ändern, da schon Gl. (185) auf der Anwendbarkeit der Gl. (182) beruhte.

Hiermit ist der einfache Fall, den wir zunächst untersuchen wollten, so weit erledigt, dass gegen die unmittelbare praktische Verwendung der erhaltenen Resultate keinerlei Bedenken mehr vorliegt. Auch den Einfluss von Bewegungswiderständen, die bisher vernachlässigt wurden, kann man nachträglich leicht berücksichtigen, indem man sich der früher für die gedämpften harmonischen Schwingungen abgeleiteten Resultate erinnert, die ebenfalls ohne Weiteres auf die hier untersuchten Schwingungen übertragen werden können.

Bei den Schwingungen des Centrifugalregulators ist aber der Sachverhalt erheblich verwickelter. Dass dort zwei Schwungkugeln vorkommen, während wir hier nur eine betrachteten und dass beide noch durch ein Gegengewicht oder durch das Gewicht der „Regulatorhülse" nach abwärts gezogen werden, macht freilich nicht viel aus. Man könnte, wenn sich sonst nichts änderte, die vorige Betrachtung mit geringer Mühe auf diesen Fall übertragen und würde dabei zu ganz ähnlichen

Resultaten gelangen. Wesentlich ist aber der Unterschied, dass der Regulator die Steuerung der Maschine beeinflusst und dadurch die Winkelgeschwindigkeit u verändert.

Wir wollen daher jetzt einen Fall untersuchen, der sich dem wirklichen Sachverhalte mehr nähert, ohne sich freilich vollständig mit ihm zu decken. Dabei bemühen wir uns, die ideellen Bedingungen, denen wir das System unterwerfen, so zu wählen, dass die Untersuchung einerseits möglichst vereinfacht wird, während andererseits die wirklich vorhandenen Bedingungen dadurch wenigstens in den wesentlichsten Zügen wiedergegeben werden. Wenn man will, steht es nachher immer noch frei, die Systembedingungen später so abzuändern, dass sie sich dem wahren Sachverhalte noch enger anschliessen. Der Gang vom Einfacheren, das vorher vollständig erledigt und durchschaut wird, zum Verwickelteren ist bei einer solchen Untersuchung durchaus erforderlich, da man überhaupt nicht zum rechten Verständnisse des ganzen Vorgangs gelangt, wenn man von vornherein allen Umständen Rechnung tragen will.

Ich setze also jetzt einen mit einem Schwungrade versehenen Motor voraus, der während der Zeit, in der wir ihn betrachten, einen Widerstand zu überwinden hat, der durch ein auf die Schwungradwelle bezogenes constantes statisches Moment M_0 dargestellt wird. Ferner soll durch die Arbeitsflüssigkeit, die den Motor betreibt, zur Zeit t ein Moment M auf die Schwungradwelle übertragen werden, das nur von der augenblicklichen Stellung φ des Regulators abhängt. Dieser Fall wäre etwa bei einer Turbine verwirklicht; bei der Dampf- oder der Gaskraftmaschine trifft er nicht zu, weil der Arbeitsvorgang mit der Stellung des Kolbens wechselt. Davon sehen wir aber aus den vorher angeführten Gründen ab. Wir schreiben also

$$M = F(\varphi)$$

und setzen voraus, dass die Form der Function F, die von der Steuerungseinrichtung abhängt, als bekannt angesehen

werden kann. Jedenfalls ist, wenn φ_0 wieder die zur Belastung M_0 gehörige Gleichgewichtslage des Regulators angiebt,

$$M_0 = F(\varphi_0).$$

Wir wollen aber annehmen, dass diese Gleichgewichtslage, die sich nach Abdämpfung der Schwingungen einstellt, noch nicht erreicht sei. Kurz vor der Zeit, in der wir die Untersuchung beginnen, möge nämlich irgend eine Belastungsänderung vorgenommen worden sein, während nachher M_0 constant bleibt. Ferner sehen wir jetzt von der Berücksichtigung aller Reibungen u. dergl. ab und behalten auch die schon vorher eingeführte Voraussetzung bei, dass die lebendige Kraft des Schwungrades um so viel grösser als die des Regulators sei, dass diese im Vergleiche zu jener ausser Betracht bleiben könne.

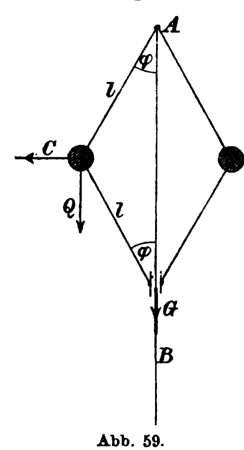


Abb. 59.

Die Einrichtung des Regulators soll dem Schema in Abb. 59 entsprechen. Das Hülsengewicht sei G. Wir wollen ferner noch voraussetzen, dass G wie eine von aussen her angebrachte constante Kraft behandelt werden kann, so dass die träge Masse oder die lebendige Kraft der Hülse aus dem Spiele bleibt.

Natürlich kann man von diesen Voraussetzungen auch manche fallen lassen, ohne die Behandlung erheblich zu erschweren; sie tragen aber alle dazu bei, die Formeln, zu denen wir gelangen werden, zu vereinfachen und da ich hier keine Theorie der Regulatoren, sondern nur die von der Mechanik gebotene Grundlage geben will, auf der diese aufgebaut werden muss, so steht es mir frei, mit den Vereinfachungen so weit zu gehen, als es nöthig ist, um den Gedankengang der Untersuchung nicht unter der Menge der zu berücksichtigenden Nebenumstände bis zur Unkenntlichkeit verdecken zu lassen.

Die hiermit näher umschriebene Aufgabe kann zunächst

ganz ähnlich wie die ihr vorausgehende behandelt werden und im Grunde genommen halte ich ein solches Vorgehen auch für das zweckmässigere. Ich möchte aber diese Gelegenheit zugleich auch benutzen, um noch an einem weiteren Beispiele die Anwendung der Gleichungen von Lagrange zur Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung zu zeigen und desshalb entscheide ich mich hier für diese Untersuchungsmethode.

Der Winkel, um den sich die Schwungradwelle seit Beginn der Zeitrechnung weiter gedreht hat, sei ψ, die Winkelgeschwindigkeit also $\dot{\psi}$. Der Regulator hat gewöhnlich eine andere Winkelgeschwindigkeit, als die Welle der Maschine und da die Berücksichtigung dieses Umstandes die Formeln nur unerheblich belastet, mag darauf Rücksicht genommen, die Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle also gleich $n\dot{\psi}$ gesetzt werden, worin n das constante Uebersetzungsverhältniss zwischen beiden Wellen bedeutet. Für die lebendige Kraft des ganzen Systems setze ich

$$L = \frac{1}{2}\,\Theta\dot{\psi}^2 + \frac{Q}{g}\,n^2\dot{\psi}^2(l\sin\varphi)^2 + \frac{Q}{g}\,l^2\dot{\varphi}^2. \qquad (188)$$

Hierin ist neben der lebendigen Kraft des Schwungrades, dessen Trägheitsmoment Θ ist, nur noch die lebendige Kraft der Schwungkugeln berücksichtigt, die von vornherein nicht vernachlässigt werden darf, weil sie es gerade ist, die die Schwingungen des Regulators bedingt. Jede Schwungkugel hat das Gewicht Q und das Geschwindigkeitsquadrat ist gleich der Quadratsumme der Geschwindigkeiten, die den Aenderungen der Winkel ψ und φ entsprechen. Ich bilde jetzt die in den Lagrange'schen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten von L. Man hat

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta\dot{\psi} + 2\,\frac{Q}{g}\,n^2\dot{\psi}l^2\sin^2\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = \Theta\ddot{\psi} + 2\,\frac{Q}{g}\,n^2\ddot{\psi}\,l^2\sin^2\varphi + 4\,\frac{Q}{g}\,n^2\dot{\psi}l^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 2\,\frac{Q}{g}\,n^2 \dot{\psi}^2 l^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2\,\frac{Q}{g}\,l^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2\,\frac{Q}{g}\,l^2 \ddot{\varphi}.$$

Ferner sind die auf die Coordinaten ψ und φ reducirten äusseren Kräfte F_ψ und F_φ festzustellen. Bei einer virtuellen Aederung $\delta\psi$ von ψ leisten die Kräftepaare M und M_0, die von aussen her auf das System übertragen werden, die Arbeit $(M - M_0)\,\delta\psi$ und daher ist

$$F_\psi = M - M_0 = F(\varphi) - F(\varphi_0).$$

Bei einer virtuellen Aenderung $\delta\varphi$ von φ hebt sich der Angriffspunkt des Gewichtes G um $-\delta(2l\cos\varphi)$, also um $2l\sin\varphi\,\delta\varphi$. Zugleich hebt sich jede Schwungkugel um die Hälfte dieses Werthes und man hat daher

$$F_\varphi = -2(G + Q)\,l\sin\varphi.$$

Die Centrifugalkraft an den Schwungkugeln kommt jetzt nicht als äussere Kraft, die in F_φ einzurechnen wäre, in Betracht. Wir beobachten nämlich die Bewegung vom festen Raume her und die Zusatzkräfte der Relativbewegung, die wir bei der Behandlung des ersten Beispiels in diesem Paragraphen einzuführen hatten, kommen daher in Wegfall.

Alle jetzt abgeleiteten Werthe sind nunmehr in die Gleichungen von Lagrange einzusetzen. Dadurch erhält man die Differentialgleichungen der Bewegung, in denen die Differentialquotienten wieder in der gewöhnlichen Weise geschrieben werden sollen. Man findet dann

$$\left.\begin{aligned} F(\varphi) - F(\varphi_0) &= \left(\Theta + 2\,\frac{Q}{g}\,n^2 l^2 \sin^2\varphi\right)\frac{d^2\psi}{dt^2} \\ &\quad + 2\,\frac{Q}{g}\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,n^2 l^2 \sin 2\varphi \\ -2(G + Q)\,l\sin\varphi &= 2\,\frac{Q}{g}\,l^2\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &\quad - 2\,\frac{Q}{g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 n^2 l^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (189)$$

In diesen Gleichungen sind aber noch nicht alle Vernachlässigungen vorgenommen, zu denen wir auf

Grund unserer Voraussetzungen berechtigt sind. Die erste Gleichung kann vielmehr zu

$$F(\varphi) - F(\varphi_0) = \Theta \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

vereinfacht werden, wodurch ausgesprochen wird, dass die Winkelbeschleunigung des Schwungrades nur von der Differenz der Momente des treibenden und des widerstehenden Kräftepaares abhängig ist. Die anderen Glieder, die sonst noch in der ersten der Gl. (189) vorkamen, drücken nämlich nur den Einfluss auf $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ aus, der von der Beschleunigung der Schwungkugelmassen im Sinne von ψ und von ihrer Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ herrührt. Wir haben uns aber schon vorher darüber schlüssig gemacht, dass diese geringfügigen Nebenumstände zu vernachlässigen sind.

Ferner führen wir zur Vereinfachung der zweiten Bewegungsgleichung den Winkel φ_0 ein, der den constanten Regulatorausschlag für den normalen Gang ohne Schwingungen bei der Belastung M_0 angiebt. Auch dieser normale Gang gehört nämlich zu den möglichen Bewegungen des Systems und er ist daher in den Gl. (189) als Lösung mit enthalten. Für ihn nehmen beide Seiten der ersten Gleichung den Werth Null an und die zweite Gleichung liefert

$$G + Q = \frac{Q}{g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 l n^2 \cos\varphi_0,$$

aus der φ_0 als Function der normalen Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ ermittelt werden kann. Führen wir diesen Werth in die zweite der Gl. (189) ein, so erhalten wir schliesslich die Bewegungsgleichungen in der einfacheren Form

$$\left.\begin{aligned} F(\varphi) - F(\varphi_0) &= \Theta \frac{d^2\psi}{dt^2} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= n^2 \sin\varphi\left(\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cos\varphi - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 \cos\varphi_0\right) \end{aligned}\right\} . \tag{190}$$

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, dass der jetzt untersuchte verwickeltere Fall den vorher in diesem Para-

graphen untersuchten einfacheren mit in sich fasst. Setzen wir $F(\varphi) = F(\varphi_0)$, so sprechen wir damit aus, dass der Regulator überhaupt nicht auf die Steuerung der Maschine einwirkt.

Aus der ersten Gleichung folgt dann das selbstverständliche Resultat, dass die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ constant bleiben muss und die zweite geht über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = n^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Diese Gleichung fällt aber in der That vollständig mit Gl. (178) zusammen, falls man sich in diese ebenfalls den Ausschlag φ_0 mit Hülfe von Gl. (182) eingeführt denkt. Wir finden hiermit bestätigt, dass die Hinzufügung des Hülsengewichtes G (falls dessen Trägheit vernachlässigt wird) an dem Verlaufe der Schwingungen des von der Maschinensteuerung losgelösten Regulators nichts Wesentliches ändert; nur der Ausschlag φ_0 selbst wird dadurch geändert.

Allgemein lassen sich die Gl. (190) nicht integriren. Wir wollen uns daher weiterhin wieder auf die Untersuchung der Schwingungen mit kleinem Ausschlage beschränken. Wir setzen also wie früher

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon$$

u. s. f. und zugleich

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 + \eta,$$

worin auch η als kleine Grösse aufgefasst werden soll. Dann gehen die Gl. (190) bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung über in

$$\varepsilon \left(\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right)_0 = \Theta \frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 2\eta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 n^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - \varepsilon \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 n^2 \sin^2\varphi_0.$$

Die mit dem Zeiger 0 versehenen Glieder sind Constanten, die als gegeben zu betrachten sind. Um die Gleichungen übersichtlicher anschreiben zu können, führen wir dafür drei neue Constanten a, b, c ein, so dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} &= a\varepsilon \\ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= b\eta - c\varepsilon\end{aligned}\right\} \qquad (191)$$

wird. Was jetzt unter $a\,b\,c$ zu verstehen ist, ergiebt sich aus dem Vergleiche mit den vorhergehenden Gleichungen. Setzt man ε aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so geht diese über in

$$\frac{d^3\eta}{dt^3} = ab\eta - c\frac{d\eta}{dt}, \qquad (192)$$

in der nur noch die eine Variable η vorkommt und genau dieselbe Differentialgleichung muss auch von ε erfüllt werden, wie man erkennt, wenn man η aus den Gl. (191) eliminirt.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (192) kann aber sofort angegeben werden; sie ist von der Form

$$\eta = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + Ce^{\alpha_3 t} \qquad (193)$$

in der die ABC die von den Anfangsbedingungen abhängigen Integrationsconstanten sind, während die Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ so zu ermitteln sind, dass die Differentialgleichung erfüllt wird. Setzt man nämlich zunächst

$$\eta = Ae^{\alpha t}$$

in die Differentialgleichung ein, so erhält man nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren

$$\alpha^3 = ab - c\alpha \qquad (194)$$

und die drei in Gl. (193) vorkommenden Constanten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ müssen daher die drei Wurzeln dieser cubischen Gleichung sein.

Das Verhalten unseres Systems wird nun ganz von den Werthen dieser drei Wurzeln abhängen. Eine davon ist jedenfalls reell. Wenn sie zugleich positiv ist, enthält η ein Glied, das mit der Zeit unbegrenzt wächst. Wir schliessen daraus, dass auch Schwingungen, die ursprünglich sehr klein waren, mit der Zeit gross werden und dass daher ein stabiler Gang der Maschine nicht möglich ist. Ueberhaupt erkennen wir als Bedingung für den stabilen Gang, dass Gl. (194) keine positive reelle Wurzel haben darf. Complexe

Wurzeln der Gleichung führen zu Produkten aus Exponential- und trigonometrischen Functionen und die Exponentialfaktoren dürfen ebenfalls nicht unbegrenzt wachsen.

Sehen wir nun zu, was für Wurzeln wir zu erwarten haben. Die Constante a diente als Abkürzung für den Ausdruck

$$a = \frac{1}{\Theta} \cdot \left(\frac{dF(\varphi)}{d\varphi}\right)_0.$$

Der Regulator wird mit dem Motor in der Art verbunden sein, dass das treibende Moment M oder $F(\varphi)$ abnimmt, wenn der Ausschlag φ wächst. Daher ist a negativ; die beiden anderen Constanten b und c sind dagegen nach der Bedeutung, die ihnen zukommt, als positiv zu betrachten. Gl. (194) ist daher von der Form

$$x^3 + px + q = 0$$

in der p und q positiv sind. Eine solche Gleichung hat nur eine reelle Wurzel und diese ist negativ. Da das quadratische Glied in der Gleichung fehlt, ist die Summe der drei Wurzeln gleich Null und daraus folgt, dass die reellen Antheile der beiden complexen Wurzeln positiv sein müssen. Gl. (193) enthält daher periodische Glieder, die mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Wir finden also, dass die Bewegung instabil ist. Wenn keine Reibungen oder sonstige Bewegungswiderstände hinzukämen, könnte die mit dem Regulator versehene Maschine überhaupt nicht oder wenigstens nur mit ganz unzulässigen Schwankungen arbeiten.

Durch die Bewegungswiderstände, namentlich durch die Oelbremse, wird diesem Uebelstande abgeholfen. Die vollständige dynamische Theorie des Regulators muss daher nothwendig auf diese Umstände Rücksicht nehmen. Der durch die Oelbremse hervorgerufene Bewegungswiderstand ist der Geschwindigkeit der Hülse proportional; wenn φ wächst, geht er in dem gleichen Sinne wie das Gewicht G und man berücksichtigt ihn daher, indem man in der zweiten der Gl. (189) G ersetzt durch

$$G + k \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

worin k eine Constante ist. Auch in der zweiten der Gl. (190) tritt damit ein neues Glied auf. Die Lösung der Aufgabe auf dem angegebenen Wege wird aber dadurch nicht wesentlich erschwert. Auch die Trägheit des Hülsengewichts, auf die bisher nicht geachtet war, lässt sich nachträglich leicht berücksichtigen. Man hat dazu nur nöthig, in die Gl. (188) für die lebendige Kraft noch ein Glied aufzunehmen, das die lebendige Kraft von G darstellt. — Auf die weitere Durchführung dieser Rechnungen kann hier nicht eingegangen werden.

§ 35. **Das Princip von Hamilton.**

Auch das Hamilton'sche Princip wird ähnlich den Gleichungen von Lagrange dazu verwendet, die Bewegungsgleichungen eines Systems von mehreren (oder beliebig vielen) Freiheitsgraden abzuleiten. Die Anwendbarkeit ist aber auf den Fall beschränkt, dass sich die an dem Systeme angreifenden äusseren Kräfte von einem Potentiale ableiten lassen. Dieses Potential oder, ausführlicher gesagt, die potentielle Energie des Systems, soweit sie durch das Kraftfeld der äusseren Kräfte bedingt ist, sei V; dann ist die zur virtuellen Aenderung δq_i irgend einer der Coordinaten q gehörige Arbeit der äusseren Kräfte gleich

$$-\delta q_i \cdot \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

und für die auf die Coordinate q_i reducirte äussere Kraft F_i hat man nach § 32

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Die von Lagrange aufgestellte Gl. (174) lässt sich daher jetzt auch in der Form

$$\frac{\partial (L - V)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{195}$$

schreiben. Für jede Coordinate q_i gilt eine Gleichung von

dieser Form. Alle diese Gleichungen lassen sich aber in der einzigen Formel

$$\delta \int_0^{t_1} (L - V)\, dt = 0 \tag{196}$$

zusammenfassen und diese Gleichung spricht das Hamilton'sche Princip aus. Ehe ich zum Beweise der aufgestellten Behauptung übergehen kann, muss ich den Sinn der angewendeten Zeichen erklären. Zwischen der Zeit $t = 0$ und der Zeit $t = t_1$ erfolgt die Bewegung des Systems auf irgend eine ganz bestimmte Art. Wir betrachten den Bewegungsvorgang innerhalb dieser Zeit, deren Anfang und Ende im übrigen ganz beliebig ausgewählt sein kann. Wir machen uns ferner klar, dass das System, weil es nicht zwangläufig ist, rein geometrisch betrachtet, auf sehr viele verschiedene Arten aus der Anfangs- in die Endlage übergeführt werden könnte. Zu irgend einer Zeit t, die zwischen 0 und t_1 liegt, haben also in Wirklichkeit die Coordinaten die Werthe

$$q_1\, q_2 \cdots q_i \cdots q_n$$

und die zugehörigen Geschwindigkeiten die Werthe

$$\dot{q}_1\, \dot{q}_2 \cdots \dot{q}_i \cdots \dot{q}_n .$$

Der geometrische Zusammenhang, der zwischen den Gliedern des Systems besteht, würde aber nicht hindern, dass zur Zeit t die Coordinaten und ihre Geschwindigkeiten etwa die Werthe

$$(q_1 + \delta q_1), \cdots (q_i + \delta q_i) \cdots (q_n + \delta q_n),$$
$$(\dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1), \cdots (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) \cdots (\dot{q}_n + \delta \dot{q}_n)$$

hätten, in denen die δq ganz willkürlich gewählte unendlich kleine Aenderungen sind, während die $\delta \dot{q}$ mit jenen so zusammenhängen, dass

$$\delta \dot{q} = \delta \left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\, \delta q$$

ist. Wenn wir uns alle δq als willkürliche Functionen der Zeit gewählt denken, die nur an die Bedingung geknüpft sind, dass sie zu Anfang und zu Ende der Zeit verschwinden, haben wir

damit irgend eine von der wirklichen unendlich wenig abweichende Bewegung beschrieben, durch die das System, rein geometrisch genommen, ebenfalls aus der Anfangslage in die Endlage übergeführt werden könnte. Zugleich müssen wir aber, wenn Anfangs- und Endzustand in dem wirklich vorliegenden Falle und in dem willkürlich variirten vollständig mit einander übereinstimmen sollen, auch noch die Bedingung einhalten, dass die $\delta \dot{q}$ an den beiden Grenzen verschwinden.

Das in Gl. (196) vorkommende Integral hat für die wirkliche Bewegung einen ganz bestimmten Werth, da zu jeder Zeit t eine bestimmte kinetische Energie L und eine bestimmte potentielle Energie V gehören. Auch für die variirte Bewegung können wir uns, nachdem die δq und hiermit die $\delta \dot{q}$ als Functionen der Zeit, die den angegebenen Bedingungen genügen, gewählt sind, den Werth des Integrals berechnet denken. Das Hamilton'sche Princip behauptet nun, dass beide Werthe stets einander gleich sind, wie man auch im Uebrigen die unendlich kleinen Variationen δq wählen möge. Man kann auch sagen, dass das Integral für die wirklich ausgeführte Bewegung entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum wird, denn die Bedingung dafür wird durch das Verschwinden der Variation angegeben. Diese letzte Bemerkung spielt aber keine Rolle bei den Anwendungen, die man von dem Princip machen kann.

Nach diesen Vorbemerkungen kann ich zum Beweise des Satzes übergehen. Dazu berechne ich die Variation des Integrals. Die Aenderung, die das Integral erfährt, ist gleich der Summe der Aenderungen seiner Elemente, also

$$\delta \int_0^{t_1} (L - V)\, dt = \int_0^{t_1} \delta (L - V)\, dt.$$

Um die Variation von $L - V$ zu erhalten, beachte man, dass sowohl L als V zunächst Functionen der q sind, ausserdem aber L auch noch Function der Geschwindigkeiten $\dot{q}$ ist. Man hat also

$$\delta(L-V) = \frac{\partial(L-V)}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial(L-V)}{\partial q_n}\delta q_n$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n \quad (197)$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (195)

$$\delta(L-V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\delta q_1 + \cdots + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\delta q_n$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}(\delta q_1) + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{d}{dt}(\delta q_n).$$

Hier lassen sich je zwei Glieder zusammenfassen, so dass der Ausdruck übergeht in

$$\delta(L-V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\right) + \cdots + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\right).$$

Die Integration nach der Zeit kann hieran sofort vorgenommen werden und man findet daher

$$\delta\int_0^{t_1}(L-V)\,dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\right]_0^{t_1}.$$

An den beiden Grenzen 0 und t_1 verschwinden aber alle Glieder, da wir die δq der Bedingung unterwerfen mussten, dass sie an den Grenzen zu Null werden. Hiermit ist Gl. (196) bewiesen.

Wir haben jetzt das Hamilton'sche Princip auf Grund der Lagrange'schen Gleichungen bewiesen; man kann auch umgekehrt zeigen, dass die Lagrange'schen Gleichungen eine nothwendige Folge von Gl. (196) sind. Setzt man nämlich $\delta(L-V)$ aus Gl. (197) in Gl. (196) ein, so hat man

$$\int_0^{t_1}\left\{\frac{\partial(L-V)}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial(L-V)}{\partial q_n}\delta q_n\right\}dt$$
$$+\int_0^{t_1}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n\right\}dt = 0.$$

Das letzte Integral lässt sich aber umformen, indem man beachtet, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

ist. Die Integration des ersten Gliedes in diesem Ausdrucke nach der Zeit lässt sich ausführen. Sie liefert Null, weil δq_i an den Grenzen verschwindet. Daher geht die Gleichung über in

$$\int\limits_0^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) \right) \delta q_1 + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \right) \delta \dot{q}_n \right\} dt = 0.$$

Nun sind aber die δq ganz willkürlich und die Gleichung gilt für jede Wahl, die wir dafür treffen mögen. Wir können also z. B. alle δq mit Ausnahme von δq_i gleich Null setzen. Dann muss auch sein

$$\int\limits_0^{t_1} \left(\frac{\partial (L-V)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \cdot dt = 0.$$

und da auch δq_i selbst noch eine willkürliche Function der Zeit ist, kann die Gleichung nur dann für jede beliebige Wahl dieser Function gültig sein, wenn zu jeder Zeit der andere Faktor gleich Null ist. Damit kommen wir wieder auf die Lagrange'sche Gleichung (195). Wir haben uns hiermit überzeugt, dass das Hamilton'sche Princip und die Lagrange'schen Gleichungen im Grunde genommen dasselbe aussagen. Selbstverständlich müssen für die Gültigkeit des einen Satzes auch dieselben Bedingungen erfüllt sein, wie für die des anderen.

In der That macht es auch für die Behandlung einer Aufgabe kaum einen Unterschied, ob man von dem einen oder dem anderen Satze ausgeht. Auch wenn man vom Hamiltonschen Princip ausgehen will, muss man zunächst den Ausdruck für die lebendige Kraft und zugleich den für die potentielle Energie V aufstellen, worauf man durch die Ausführung der Variation an dem Integrale der Gl. (196) zu den Bewegungsgleichungen gelangt. Der Mathematiker schätzt an dem Hamilton'sche Princip die einfache und sich dem Gedächtnisse leicht einprägende Form der Gl. (196). Wer es als Haupt-

aufgabe der Mechanik betrachtet, Aufschluss über die in der Wirklichkeit vorkommenden Bewegungsvorgänge zu geben, wird auf diese Eleganz der Form freilich weniger Werth legen. Aehnlich ist es auch mit dem Princip der kleinsten Wirkung und mit dem Gauss'schen Princip des kleinsten Zwanges; es hätte keinen Zweck, wenn ich auf diese auch noch eingehen wollte.

Dagegen darf nicht verschwiegen werden, dass diese allgemeinen Sätze (von denen es jedoch eigentlich genügt, einen einzigen zu kennen) auf einem Gebiete in der That wichtige Dienste geleistet haben, die durch die anderen Methoden nicht oder wenigstens nicht gleich gut geleistet werden konnten. Maxwell hat nämlich die Induktion zwischen mehreren elektrischen Stromkreisen auf Sätze der Mechanik zurückgeführt und sie dadurch dem Verständnisse näher gebracht, indem er die elektrischen Leiter als mechanische Systeme von mehreren Freiheitsgraden und die magnetische Energie als die lebendige Kraft dieser Systeme auffasste. Die Gesetze der elektrodynamischen Induktion, das Faraday'sche Induktionsgesetz u. s. f. zeigen sich dann in der That in genauer Uebereinstimmung mit dem Verhalten, das man von einem in der angegebenen Art zusammengesetzten mechanischen Systeme zu erwarten hätte. Auch die Reibungen finden in dem elektrischen Systeme ihr Analogon in den Ohm'schen Widerständen u. s. f. Der Elektrotechniker wird sich für diese Betrachtungen interessiren und schon desshalb glaubte ich in diesem Buche über die Sätze von Lagrange und Hamilton nicht ohne Erwähnung hinweggehen zu dürfen, obschon natürlich wegen der genannten Anwendungen auf andere Bücher verwiesen werden muss. In meiner „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität“ (Leipzig 1894) kann der Leser im ersten Capitel des 6. Abschnitts eine gedrängte und leicht verständliche Darstellung dieser Seite der Maxwell'schen Elektricitätslehre finden.

Natürlich lässt sich übrigens das Hamilton'sche Princip auch unmittelbar ohne Benutzung der Lagrange'schen Glei-

chungen ableiten. Das Verfahren schliesst sich dabei ziemlich eng an die Herleitung der Lagrange'schen Gleichungen an; ich gehe aber nicht weiter darauf ein.

§ 36. **Mechanische Aehnlichkeit; Theorie der Modelle.**

Der Begriff der mechanischen Aehnlichkeit ist aus dem der geometrischen Aehnlichkeit hervorgegangen. Mechanische Aehnlichkeit zweier Systeme schliesst die geometrische Aehnlichkeit zum mindesten in allen wesentlichen Bestimmungsstücken ein, wird aber dadurch nicht erschöpft. Man kann z. B. zwei Maschinen nach denselben Plänen und Werkzeichnungen bauen, indem man etwa die eingeschriebenen Maasse einmal als englische Zolle, ein anderes Mal als Centimeter deutet. Die Maschinen sind dann geometrisch ähnlich und so lange sie still stehen, besteht gar keine Veranlassung, ihre Aehnlichkeit zu bezweifeln. Sobald sie aber in Betrieb kommen, werden sie sich im Allgemeinen ganz verschieden verhalten. Während die eine von beiden vielleicht vollständig befriedigend arbeitet und sich als tüchtig durchconstruirt bewährt, wird die andere bald eine grosse Zahl von Fehlern aufweisen, wenn sie sich nicht schon von vornherein als ganz untauglich erweist.

Der Grund für das abweichende Verhalten ist leicht einzusehen. Die den Flächen proportionalen äusseren Kräfte wachsen mit den Flächen, also im Verhältnisse n^2, wenn n das lineare Vergrösserungsverhältniss bedeutet. Das Verhältniss n^2 würde z. B. bei dem treibenden Dampfdrucke zutreffen, wenn beide Maschinen Dampfmaschinen wären und von demselben Kessel aus betrieben werden sollten. Die Gewichte der Theile wachsen mit dem Volumen, also im Verhältnisse n^3. Wollte man verlangen, dass die Maschinen entsprechende Wege in gleichen Zeiten zurücklegen, so müssten die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen im Verhältnisse n zu einander stehen. Zwischen den nach dem d'Alembert'schen Princip einzuführenden Trägheitskräften hätte man dann das Verhältniss $n^3 \cdot n$ oder n^4. Da die mit einander in Vergleich zu

bringenden Kräfte in so verschiedenen Verhältnissen wie n^2, n^3, n^4 anwachsen, müsste das Verhalten beider Maschinen natürlich ein ganz verschiedenes sein, d. h. trotz der geometrischen Aehnlichkeit sind die Maschinen mechanisch einander durchaus nicht ähnlich.

Man kann sich aber die Aufgabe stellen, zwei geometrisch ähnliche Maschinen so zu construiren, dass sie sich auch mechanisch ähnlich verhalten. Durch die vorhergehenden Erwägungen wird dies nicht ausgeschlossen. Es steht uns nämlich, um bei dem gewählten Beispiele zu bleiben, frei, beide Dampfmaschinen mit verschiedenem Dampfdrucke zu betreiben und zugleich auch die Umlaufsgeschwindigkeit verschieden zu wählen. Ausserdem könnte man sich auch bei beiden Material von verschiedenem specifischen Gewichte angewendet denken, also etwa Eisen im einen, Aluminium im anderen Falle. In dieser Hinsicht ist man freilich praktisch an enge Grenzen gebunden. Jedenfalls kann man es aber durch solche Mittel dahin bringen, dass die Oberflächenkräfte, die Gewichte und die Trägheitskräfte bei beiden Maschinen in gleichen Verhältnissen zu einander stehen, so dass sich die Maschinen auch mechanisch ähnlich verhalten, d. h. so, dass die Bewegungsvorgänge im einen Falle ein getreues Abbild von jenen im anderen Falle darstellen, bei dem nur Längen, Zeiten und Kräfte in festen Verhältnissen vergrössert oder verkleinert erscheinen.

Von praktischer Bedeutung sind diese Betrachtungen namentlich immer dann, wenn man von dem Verhalten eines, der Kostenersparniss wegen zunächst in kleinerem Maassstabe ausgeführten Modells auf die Eigenschaften einer nach diesem Modell zu erbauenden grossen Maschine schliessen will. Von diesem Mittel wird sehr häufig Gebrauch gemacht; so wird z. B. vor dem Baue eines grossen Schiffes, das in wesentlichen Punkten von früheren Ausführungen abweichen soll, gewöhnlich zunächst ein Modell desselben hergestellt, mit dem man Versuche über den Schiffswiderstand bei verschiedenen Geschwindigkeiten anstellt, um danach beurtheilen zu können, wie gross die Maschinenstärke

des Schiffes sein muss, um diesem eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen u. s. f.

Strenge mechanische Aehnlichkeit lässt sich in solchen Fällen meist entweder gar nicht oder wenigstens nur mit einem unverhältnissmässigen Aufwand von Mitteln erreichen. Es genügt aber, wenn nur in den wesentlichen Punkten, die man grade untersuchen will, eine Uebereinstimmung erzielt wird, während man sonst Abweichungen, die zur Bequemlichkeit oder zur Ermöglichung der Ausführung geboten sind, unbedenklich zulassen kann. Natürlich erfordert die richtige Abwägung darüber, wie weit man in dieser Hinsicht gehen darf, im einzelnen Falle ein eingehendes Studium aller Nebenumstände, die etwa auf den Erfolg von Einfluss sein könnten. — Hier handelt es sich nur um eine Darlegung der allgemeinen Gesichtspunkte, von denen aus Fragen der mechanischen Aehnlichkeit zu beurtheilen sind.

Am einfachsten gestaltet sich die Betrachtung, wenn nur das statische Verhalten in Frage kommt. Eine Tragconstruction, etwa ein Brückenträger oder ein Dachverband, möge im Modell ausgeführt sein und man fragt, wie man aus den am Modell beobachteten Erscheinungen auf das Verhalten der in λ-facher Grösse ausgeführten Construction schliessen kann. Wenn das Modell der Construction geometrisch ähnlich aus demselben Material nachgebildet ist, müssen die Lasten, die man am Modell aufhängt, im Verhältnisse $1:\lambda^2$ zu den an der Construction auftretenden Lasten bemessen sein. Die Spannungen der einzelnen Stäbe erscheinen dann ebenfalls im Verhältnisse $1:\lambda^2$, d. h. im selben Verhältnisse wie die Querschnitte, so dass die specifischen Spannungen und hiermit die Beanspruchung des Materials in beiden Fällen dieselbe bleibt. Auch die Sicherheit gegen Ausknicken ist in beiden Fällen die gleiche, denn die Knicklast eines Stabes ist nach der Eulerschen Formel — etwa bei frei drehbaren Enden —

$$P = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}$$

und da E constant ist, Θ im Verhältnisse $1:\lambda^4$ und l im Ver-

hältnisse $1:\lambda$ steht, folgt, dass auch die Knicklasten das Verhältniss $1:\lambda^2$ haben, also dasselbe Verhältniss, wie die von den Stäben aufzunehmenden Kräfte.

Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, dass das Eigengewicht der Construction in beiden Fällen keine wesentliche Rolle spielt. Kommt dieses aber mit in Betracht, so ist zu beachten, dass es im Verhältnisse $1:\lambda^3$ steht, dass also die grosse Construction davon stärker beansprucht wird, als das Modell. Um die Bedingung der mechanischen Aehnlichkeit in diesem Falle, wenigstens in der Idee, streng aufrecht zu erhalten, müsste man schon voraussetzen, dass das specifische Gewicht des Materials, aus dem das Modell besteht, λ mal so gross sei, als bei der grossen Construction, während der Elasticitätsmodul und die zulässige Beanspruchung beider Materialien immer noch die gleichen sein müssten. Dies lässt sich natürlich nicht verwirklichen; man kann sich aber praktisch ganz gut dadurch helfen, dass man das Modell noch mit Zusatzgewichten belastet, die passend, etwa auf die Knotenpunkte, vertheilt sind, so dass der Unterschied in der Beanspruchung durch das Eigengewicht hierdurch ausgeglichen wird. Wenn man in der hier geschilderten Weise verfährt, kann man aus den elastischen Deformationen und den sonstigen Festigkeitseigenschaften des Modells zuverlässige Schlüsse auf das statische Verhalten der grossen Construction ziehen. Auch das Verhalten unter dem Einflusse gleicher Temperaturänderungen wird in beiden Fällen das gleiche sein. Voraussetzung ist natürlich, dass auch sonst in der That alle Bedingungen übereinstimmen, dass also die Kräfte in beiden Fällen in der gleichen Weise angreifen, dass das Material in den kleinen Stücken von derselben Beschaffenheit ist, wie in den grossen u. s. f. Dies ist ja freilich eigentlich selbstverständlich; es sollte aber noch besonders betont werden, weil in dieser Hinsicht grosse Vorsicht geboten ist, damit nicht irgend ein für den Erfolg sehr wesentlicher Nebenumstand, der eine Abweichung von den Anforderungen der mechanischen Aehnlichkeit in sich schliesst, bei flüchtiger Betrachtung übersehen wird.

Dies Alles bezieht sich indessen nur auf das statische Verhalten. Schon wenn man im vorhergehenden Falle Schlüsse über die Schwingungen, die die Construction unter dem Einflusse bewegter Lasten ausführt, aus Versuchen am Modell ziehen will, reichen die vorigen Betrachtungen nicht mehr aus. Wir fassen daher jetzt die Frage von einem allgemeineren Standpunkte her an, der zugleich die dynamischen Verhältnisse zu berücksichtigen gestattet.

Das Verhältniss der maassgebenden Längen (wobei unwesentliche Abweichungen im Einzelnen ebenso wie in den folgenden Fällen immerhin gestattet werden können) sei abermals λ. Das Verhältniss der von aussen her übertragenen Kräfte mit Ausschluss der Eigengewichte sei dagegen jetzt allgemein mit π bezeichnet; ferner sei das Verhältniss der Massen μ und das Verhältniss der Zeiten τ. Wenn beide Systeme mechanisch ähnlich sein sollen, müssen sie in entsprechenden Zeiten t und τt in gleichen Stellungen sein und in gleicher Art von Kräften P und πP beansprucht werden. M i t a n d e r e n W o r t e n h e i s s t d i e s, d a s s a l l e G r ö s s e n, d i e d i e B e w e g u n g u n d d e n Z u s t a n d b e i d e r S y s t e m e b e s c h r e i b e n, i d e n t i s c h m i t e i n a n d e r w e r d e n, w e n n m a n s i e i n b e i d e n F ä l l e n, a u f v e r s c h i e d e n e E i n h e i t e n b e z i e h t. D a n n g e l t e n a u c h a l l e G l e i c h u n g e n d e r M e c h a n i k, d i e m a n f ü r d a s e i n e d e r b e i d e n S y s t e m e a n s c h r e i b t, o h n e j e d e A e n d e r u n g f ü r d a s a n d e r e. Aus diesen Gleichungen lässt sich die spätere Bewegung des Systems voraussehen, wenn der Anfangszustand und alle übrigen Bedingungen hinreichend gekennzeichnet sind. D a d i e G l e i c h u n g e n m i t a l l e n N e b e n b e d i n g u n g e n i n b e i d e n F ä l l e n i d e n t i s c h s e i n s o l l t e n, b e z i e h e n s i c h a u c h d i e S c h l ü s s e, d i e m a n a u s i h n e n z i e h e n k a n n, i n g l e i c h e r W e i s e a u f b e i d e S y s t e m e u n d d a r a u s f o l g t, d a s s i n d e r T h a t b e i g l e i c h e n A n f a n g s b e d i n g u n g e n a u c h d e r s p ä t e r e V e r l a u f i n b e i d e n F ä l l e n ü b e r e i n s t i m m e n m u s s.

Die Verhältnisszahlen λ, π, μ, τ sind aber nicht unabhängig von einander. In der Mechanik kommen nur drei

Fundamentaleinheiten vor, die man beliebig wählen kann, während jede andere Einheit dadurch mit bestimmt ist. Daher können auch nur drei von den vorhergehenden Verhältnisszahlen beliebig gewählt werden. Nach dem dynamischen Grundgesetze ist die Kraft gleich der Masse mal der Beschleunigung. Sind in einem Maasssysteme alle diese drei Grössen in einem bestimmten Falle gleich der Einheit, so muss die Beziehung auch noch gültig bleiben, wenn man dieselben Grössen nach dem anderen Maasssysteme ausmisst, d. h. man hat

$$\pi = \mu \frac{\lambda}{\tau^2} \quad \text{oder} \quad \pi \tau^2 = \lambda \mu \tag{198}$$

und diese Gleichung spricht die Hauptbedingung aus, die bei der Construction der Modelle von Maschinen im Auge behalten werden muss.

Zu dieser Hauptbedingung treten noch Nebenbedingungen, je nach den Anforderungen, die man an den Grad stellt, in dem die mechanische Aehnlichkeit beider Systeme verwirklicht sein soll. Wenn die Eigengewichte der Körper, die den Massen proportional sind, neben den anderen Kräften nicht vernachlässigt werden dürfen, hat man

$$\pi = \mu \quad \text{und hiermit} \quad \tau^2 = \lambda \tag{199}$$

zu setzen. Man hat dann nur noch zwei Verhältnisszahlen zur beliebigen Wahl frei. Verlangt man ausserdem, wie in dem vorausgehenden statischen Beispiele, dass die Beanspruchung des Materials und das elastische Verhalten in beiden Fällen übereinstimmen, so muss, wie wir uns schon vorher überzeugten,

$$\pi = \mu = \lambda^2 = \tau^4 \tag{200}$$

sein. Wir haben dann nur noch eine Verhältnisszahl zur Verfügung und sind, um strenge mechanische Aehnlichkeit herzustellen, genöthigt, in beiden Systemen Stoffe mit verschiedenen specifischen Gewichten vorauszusetzen, die sich aber sonst in allen Eigenschaften gleichen.

Da das zuletzt erhobene Verlangen praktisch nicht erfüllbar ist, verzichtet man entweder auf die Berücksichtigung des Spannungszustandes und hiermit der elastischen und der Festig-

keitseigenschaften beider Systeme oder man vernachlässigt (je nach der Lage des einzelnen Falles) das Eigengewicht neben den übrigen äusseren Kräften, nimmt dagegen, um gleiches Material bei beiden Systemen voraussetzen zu können,

$$\mu = \lambda^3, \tag{201}$$

eine Gleichung, die sich mit den Bedingungen (200) nicht vereinigen lässt.

An einigen Beispielen wird man am besten erkennen, wie diese Bedingungen zu verwerthen sind. Zunächst sind zwei geometrisch ähnliche Pendel auch mechanisch ähnliche Systeme. Da bei ihnen das Eigengewicht in Frage kommt, muss man $\pi = \mu$ und daher wie in Gl. (199) $\tau^2 = \lambda$ setzen. Nach der Beanspruchung des Pendelmaterials und nach den elastischen Formänderungen, die das Pendel während der Schwingungen erfährt, fragt man in diesem Falle nicht. Wir sind daher nicht an die Erfüllung der Bedingungen (200) gebunden, ebensowenig an die Bedingung (201), können vielmehr μ ganz beliebig wählen, d. h. es macht keinen Unterschied, wie gross das specifische Gewicht des Pendelmaterials in beiden Fällen gewählt wird. Wesentlich bleibt nur die Bedingung $\tau^2 = \lambda$, die uns aussagt, dass sich die Schwingungsdauern wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Modell eines Schiffes, mit dessen Hülfe der Schiffswiderstand ermittelt werden soll. Das mechanische System, das ähnlich nachgebildet werden soll, besteht hier nicht nur aus dem Schiffe, sondern sehr wesentlich auch aus dem sich um das Schiff bewegenden Wasser. Hier ist daher an Gl. (201) festzuhalten, durch die ausgedrückt wird, dass es sich in beiden Fällen um dieselbe Flüssigkeit handelt. Ausserdem müssen auch die Gleichungen (199) erfüllt sein, da das Eigengewicht des Systems nicht vernachlässigt werden darf, sondern im Gegentheile eine wichtige Rolle spielt. Auf die durch die Gleichungen (200) ausgedrückte Bedingung, dass die specifischen Spannungen richtig nachgebildet werden, müssen wir dagegen verzichten, weil sich die

Gleichungen (200) mit den anderen Bedingungen, auf die hier das Hauptgewicht zu legen ist, nicht vereinigen lassen.

Durch Verbindung der Gleichungen (199) und (201) erhält man

$$\pi = \mu = \lambda^3 = \tau^6.$$

Macht man etwa $\lambda = 9$ (das Modell in $\frac{1}{9}$ der Schiffsgrösse), so wird $\tau = 3$. Die Geschwindigkeit des Modells muss, um den Vorgang mechanisch ähnlich zu gestalten, demnach so bemessen werden, dass es entsprechende Wege im dritten Theile der Zeit zurücklegt, als das Schiff. Das Geschwindigkeitsverhältniss sei v; dann folgt aus den Dimensionen der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda},$$

also hier $v = 3$. Soll also das Schiff etwa 12 m in der Secunde zurücklegen, so muss die Geschwindigkeit des Modells 4 m sec^{-1} betragen. Misst man nun die Kraft, die man aufwenden muss, um das Modell mit der constanten Geschwindigkeit von 4 m sec^{-1} vorwärts zu bewegen oder, wie man auch sagen kann, den Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Modells, und bezeichnet sie oder ihn mit R, so ist der Schiffswiderstand bei der entsprechenden Geschwindigkeit gleich πR, also gleich $R\lambda^3$ oder in unserem Falle gleich $729\,R$. — Diese Methode, den Schiffswiderstand unter den Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit am Modell zu untersuchen, rührt von Froude her.

Schliesslich wähle ich noch ein Beispiel zur näheren Besprechung aus, das ich dem schon mehrfach erwähnten Werke von Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von Schepp, Bd. I, S. 330 entnehme. Dort heisst es:

„Man soll die Durchbiegung einer Brücke von 15 m Länge und 100 t Gewicht, wenn eine Maschine, die 20 t wiegt, mit der Geschwindigkeit von 64 km in der Stunde über sie fährt, durch Experimente feststellen, die an einem Modell der Brücke gemacht werden, das 1,5 m lang ist und 2,8 kg wiegt. Man finde das Gewicht des Modells der Maschine und nehme an, das Modell der Brücke sei so steif, dass die statische Durchbiegung in der Mitte

unter dem Modell der Maschine ein Zehntel derjenigen der Brücke unter der Maschine selbst beträgt und zeige, dass dann die Geschwindigkeit des Modells der Maschine etwa 5,6 m in der Secunde betragen muss.“

Das Beispiel ist insofern bemerkenswerth, als die Fassung der Aufgabe leicht zu einem Zweifel darüber Veranlassung geben kann, ob die Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit hier überhaupt noch genügend gewahrt sind. Strenge mechanische Aehnlichkeit besteht offenbar nicht und überdies gehen auch die Abweichungen davon weiter, als es die praktischen Rücksichten erfordern. Weder die speciellen Bedingungen (200) noch die damit nicht vereinbare Bedingung (201) sind hier erfüllt. Wäre das Modell der Brücke geometrisch ähnlich und aus dem gleichen Material hergestellt, so müsste das Modell ein Gewicht von 100 kg haben, da λ hier gleich 10 ist. Um dagegen genaue Uebereinstimmung hinsichtlich des elastischen Verhaltens und der Beanspruchung des Materials herzustellen, müsste die Bedingung (200) erfüllt sein, d. h. das specifische Gewicht des Materials müsste am Modell das 10-fache von dem an der Brücke betragen oder es müsste wenigstens in der früher besprochenen Weise durch eine Zusatzlast das Eigengewicht des Modells entsprechend erhöht werden, während es in dem Beispiele umgekehrt niedriger angenommen ist, als es bei blosser geometrischer Nachbildung in dem gleichen Materiale ausfiele. Auf eine Uebereinstimmung des Verhaltens in jeder Hinsicht ist daher in der Aufgabe stillschweigend von vornherein verzichtet

Das hindert jedoch nicht, dass man auch bei dieser unvollkommenen Annäherung an die strengen Bedingungen der mechanischen Aehnlichkeit aus dem Versuche am Modell erfahren kann, was man zu wissen wünscht, falls nur vorausgesetzt werden darf, dass das Material weder an der Brücke noch am Modell über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht wird, was von vornherein freilich keineswegs feststeht.

Da das Eigengewicht hier eine wesentliche Rolle spielt, muss auf jeden Fall die Bedingung (199) erfüllt sein. Mit

Rücksicht auf die Zahlenangaben der Aufgabe hat man daher

$$\pi = \mu = \frac{100\,000}{2{,}8}, \quad \lambda = 10, \quad \tau = \sqrt{10}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass das Gewicht des Modells der Maschine gleich

$$20000 \cdot \frac{2{,}8}{100\,000} = 0{,}56 \text{ kg}$$

sein muss. Für das Geschwindigkeitsverhältniss v hat man wie im vorigen Beispiele

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3{,}16.$$

Das Modell muss daher mit der Geschwindigkeit

$$\frac{64\,000 \text{ m}}{3{,}16 \cdot 3600 \text{ sec}} \quad \text{oder rund} \quad 5{,}6 \text{ m sec}^{-1}$$

über das Brückenmodell geführt werden, wie in der Aufgabe schon angegeben ist. — Bei Erfüllung der angegebenen Bedingungen hat man aber in der That für jede Stellung der Maschine und des Modells geometrisch ähnliche Durchbiegungslinien zu erwarten. Man thut gut, sich davon besonders zu überzeugen, indem man auf die Differentialgleichung (126) zurückgeht, die von einem schwingenden Stabe erfüllt sein muss. Diese Gleichung lautete

$$E\Theta \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

wobei zu beachten ist, dass μ darin eine andere Bedeutung hatte, als die ihm vorhin zugeschriebene. In dieser Form möge sich die Gleichung auf die Brücke beziehen; für das Modell gilt eine von der gleichen Form, nämlich

$$E_1 \Theta_1 \frac{\partial^4 y_1}{d x_1{}^4} = -\mu_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1{}^2}.$$

Zum Vergleiche zwischen $E\Theta$ und $E_1 \Theta_1$ dient die Bemerkung der Aufgabe, dass der statische Biegungspfeil bei der Stellung der Last in der Brückenmitte oder Modellmitte im Längenverhältnisse λ gefunden wird. Nach Gl. (80) von Band III ist der Biegungspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48\,E\,\Theta} \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{P_1 l_1{}^3}{48\,E_1\,\Theta_1}$$

und hiernach

$$\frac{f}{f_1} = \lambda = \frac{\pi \lambda^3}{E\Theta : E_1 \Theta_1} \quad \text{oder} \quad \frac{E\Theta}{E_1 \Theta_1} = \pi \lambda^2.$$

Ferner ist das Verhältniss der auf die Längeneinheit entfallenden Massen

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \pi \frac{1 : l}{1 : l_1} = \frac{\pi}{\lambda},$$

wobei μ wieder in derselben Bedeutung wie in der Differentialgleichung gebraucht ist. Ausserdem ist $y = \lambda y_1$, $x = \lambda x_1$ und $t = \tau t_1$ zu setzen. Multiplicirt man die für das Modell geltende Differentialgleichung auf beiden Seiten mit der Constanten

$$\pi \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{\lambda^4} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau^2},$$

was wegen der hier erfüllten Beziehung $\tau^2 = \lambda$ auf dasselbe hinauskommt, so geht die Differentialgleichung in die für die Brücke geltende über. Durch die Differentialgleichung wird aber im Zusammenhange mit den Grenz- und Anfangsbedingungen der zeitliche und örtliche Verlauf der Stabschwingung vollständig beschrieben und da auch diese Bedingungen im Modell, so weit als erforderlich, genau nachgebildet sind, hat man in beiden Fällen, abgesehen von den verschiedenen Maassstäben, in denen die Zeit- und Längengrössen auszumessen sind, genau den gleichen Schwingungsvorgang zu erwarten.

Auch in anderen Fällen, bei denen Abweichungen von den strengen Bedingungen der geometrischen Aehnlichkeit unvermeidlich oder durch die Festsetzungen der Aufgabe vorgeschrieben sind, wird man stets am besten thun, sich durch unmittelbares Zurückgehen auf die Differentialgleichung des ganzen Vorgangs am einzelnen Objekt oder überhaupt auf die specielle mechanische Theorie dieses Vorgangs davon zu überzeugen, ob und inwiefern jene Abweichungen zulässig sind, ohne den Vergleich unmöglich zu machen. Auf diese Art kann man aus Differentialgleichungen eines mechanischen Problems auch dann noch leicht Nutzen ziehen, wenn die unmittelbare Lösung der durch die Differentialgleichung umschriebenen Aufgabe nicht möglich ist.

Fünfter Abschnitt.

Hydrodynamik.

§ 37. Die Untersuchungsmethoden der Hydrodynamik.

Zu den einfacheren Betrachtungen über Wasserbewegungen m ersten Bande dieser Vorlesungen stehen die Methoden der „höheren“ Hydrodynamik in einem gewissen Gegensatze. Zwar kamen auch damals schon hie und da die in der höheren Hydrodynamik gebrauchten Schlussweisen — wenn auch nur in den einfachsten Formen oder nur andeutungsweise — zur gelegentlichen Verwendung. Von solchen Ausnahmen abgesehen, fasste man aber dort von vornherein das Verhalten grösserer Wassermengen in ihrer Gesammtbewegung ins Auge, während man in der höheren Hydrodynamik von der Betrachtung der Geschwindigkeiten, der Beschleunigungen und der Kräfte an einem einzelnen Raum- oder Flüssigkeitselemente ausgeht. Hierdurch führt man die verwickelten Erscheinungen in endlichen Raumgebieten auf ein Zusammenwirken der einfachsten gesetzmässigen Vorgänge zwischen benachbarten Theilchen zurück. Ihren Ausdruck finden die Elementargesetze, die in solcher Weise das gesammte Verhalten der Flüssigkeit beherrschen, durch partielle Differentialgleichungen. Als letztes Ziel gilt hier freilich ebenso wie im anderen Falle die Erkenntniss aller mit den Bewegungen ausgedehnter, endlicher Wassermassen zusammenhängenden Umstände. Von den Differentialgleichungen aus kann dieses Ziel nur durch eine Integration unter Berücksichtigung der im einzelnen Falle näher vorgeschriebenen Bedingungen erreicht werden. Uebrigens

schliesst sich dieser Untersuchungsplan eng an jenen an, der den Lesern des dritten Bandes von der mathematischen Elasticitätstheorie her bekannt ist.

Das in diesen Sätzen geschilderte Vorgehen hat den Vorzug, dass es wenigstens den Grundzügen nach alle Flüssigkeitsbewegungen zu umfassen gestattet. Dagegen sind andererseits die Integrationen, die zur Ableitung brauchbarer Ergebnisse aus den Differentialgleichungen erforderlich sind, bisher nur in einer beschränkten Anzahl einfacherer Fälle ausführbar. Dazu kommt, dass das Elementargesetz selbst, das durch die Differentialgleichungen ausgesprochen werden soll, keineswegs mit solcher Sicherheit bekannt ist, dass sich unbedingt zuverlässige Schlüsse darauf stützen liessen. Ausserdem ist man auch oft, um die Durchführung der Rechnung überhaupt zu ermöglichen, zu mehr oder weniger weit gehenden Vereinfachungen, namentlich auch zu willkürlichen Abweichungen des vorausgesetzten Elementargesetzes von dem physikalisch genau zutreffenden — soweit dieses überhaupt als bekannt angesehen werden darf — genöthigt. Daher kommt es, dass die aus der Theorie abgeleiteten Erscheinungen zunächst oft in starkem Widerspruche mit dem unmittelbar beobachteten physikalischen Vorgange stehen. Wenn auch der Grund für einige der wichtigsten dieser Abweichungen durch neuere Arbeiten hinreichend aufgedeckt und hierdurch das Misstrauen gegen den als Ausgangspunkt der ganzen Theorie gewählten Ansatz bis zu einem gewissen Grade unterdrückt werden konnte, so kam diese Verbesserung bisher doch nur wenig der unmittelbaren Beantwortung jener Fragen zu Gute, über die der Techniker in erster Linie Aufschluss erhalten möchte. Darum sind auch jetzt noch die im ersten Bande auseinandergesetzten einfachen Betrachtungen trotz mancher Mängel, die ihnen anhaften, mit Rücksicht auf ihre praktische Nutzbarkeit als der werthvollste Schatz zu betrachten, den wir zur Zeit auf dem Gebiete der Mechanik der flüssigen Körper besitzen.

Immerhin darf bei dem gegenwärtigen Zustande unseres Wissens ein Fortschritt in der theoretischen Erkenntniss der

Flüssigkeitsbewegungen, von dem auch praktisch werthvolle Ergebnisse zu erhoffen wären, in erster Linie auf jenen Wegen erwartet werden, die die „höhere“ Hydrodynamik einschlägt. Voraussetzung ist dabei, dass sie in ihren Bestrebungen durch gut ausgedachte und sorgfältig durchgeführte Versuche unterstützt wird. Es mag sein, dass die Ergebnisse solcher Beobachtungen mit der Zeit zur Aufstellung neuer Ansätze oder neuer Bilder, d. h. zu einer Aenderung des seither angenommenen Elementargesetzes führen werden, in der Art, dass den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten dadurch in höherem Grade Rechnung getragen wird, als bisher. Jedenfalls wird aber dabei die heutige Hydrodynamik, die auch jetzt schon auf viele schöne Erfolge zurückblicken kann, die Führerin abgeben müssen.

Abgesehen davon zeigt uns die heutige Hydrodynamik wenigstens, wie sich die Flüssigkeitsbewegungen im einfachsten Falle gestalten müssten. Sie giebt uns damit ein Vorbild ab, mit dem die davon abweichenden Beobachtungsergebnisse in passender Weise verglichen werden können, während man beim Fehlen eines solchen Vergleichs häufig ohne einen Anhalt dafür wäre, wie die einzelnen Erscheinungen in Zusammenhang mit einander gebracht werden könnten.

Der Mangel an physikalischer Genauigkeit der hydrodynamischen Theorien ist, wie schon erwähnt, darin begründet, dass die Eigenschaften des Wassers und der übrigen Flüssigkeiten in dem einfachen Abbilde, unter dem man sie betrachtet, nicht hinreichend zum Ausdrucke kommen. Die Hydrodynamik beschäftigt sich in erster Linie mit der „vollkommenen“, d. h. der reibungsfreien und gewöhnlich zugleich als unzusammendrückbar vorausgesetzten Flüssigkeit. Ein besonderer Abschnitt ist freilich auch den zähen Flüssigkeiten gewidmet; aber auch hier wird die Eigenschaft der Zähigkeit nur mathematisch in bestimmter Weise formulirt, ohne dass man behaupten könnte, dass diese Formulirung in so strenger Weise den Thatsachen entspräche, wie dies von den fundamentalen Sätzen der Mechanik zutrifft.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zur Dynamik der vollkommenen und unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Als deren Haupteigenschaft war schon früher die Gleichheit des Druckes an jeder Stelle für alle möglichen Schnittrichtungen erkannt worden. Nachdem inzwischen die allgemeinen Untersuchungen des dritten Bandes über den Spannungszustand in einem beliebigen Körper vorausgegangen sind, vermag man den Zusammenhang, in dem die Gleichheit des Drucks mit der Eigenschaft des Flüssigseins steht, in einfachster Weise zu überblicken. Vollkommen flüssig nennen wir den Körper dann, wenn in jeder Schnittrichtung nur Normalspannungen und keine tangentialen Kräfte, also keine Schubspannungen oder Reibungen übertragen werden können.*) Hiermit ist aber schon ausgesprochen, dass zu jeder Schnittrichtung eine Hauptspannung gehören soll; das Spannungsellipsoid geht daher in eine Kugel über und die Spannungen sind alle untereinander gleich.

Zunächst gilt diese Betrachtung für das Gleichgewicht. Mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips können wir aber den Fall der Bewegung auf den Fall des Gleichgewichts zurückführen. Nachdem die Trägheitskräfte eingeführt sind, muss die Flüssigkeit unter dem Einflusse dieser, des Gewichts und der übrigen äusseren Kräfte in der augenblicklichen Lage im Gleichgewichte sein und der Flüssigkeitsdruck an jeder Stelle kann daher auf Grund einfacher hydrostatischer Betrachtungen leicht gefunden werden. Streng gilt dies freilich nur für die vollkommene Flüssigkeit; wegen der Zähigkeit, die das Wasser in Wirklichkeit besitzt, treten bei der Bewegung innere Reibungen auf, die im Sinne der allgemeinen Theorie des Spannungszustandes als Schubspannungen zu bezeichnen sind. Das Spannungsellipsoid vereinfacht sich dann nicht mehr zu einer Kugel und der Flüssigkeitsdruck ist nicht mehr an jeder Stelle

*) Es wird sich in der Folge noch zeigen, dass diese Begriffsbestimmung mit der anderen identisch ist, dass im Innern eines unzusammendrückbaren, vollkommen flüssigen Körpers bei stossfreier Bewegung keine mechanische Energie verloren (oder in Wärme verwandelt) werden kann.

für alle Schnittrichtungen gleich gross. Diese Unterschiede kommen aber in der Dynamik der vollkommenen Flüssigkeit nicht in Betracht.

Für die weitere Untersuchung stehen uns nun zwei Wege offen. Wir können zunächst unser Augenmerk auf eine bestimmte Stelle des Raumes richten, in dem die Flüssigkeitsströmung erfolgt. Der augenblickliche Zustand der Strömung an dieser Stelle wird, da die Flüssigkeit unzusammendrückbar sein sollte, vollständig durch die Richtung und Grösse der Geschwindigkeit beschrieben, mit der die Bewegung hier gerade vor sich geht. Bezeichnen wir den von einem festen Anfangspunkte nach dieser Stelle gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$ und die Geschwindigkeit, die zur Zeit t hier auftritt, mit $\mathfrak{v}$, so wird durch eine Function

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t) \tag{202}$$

die Geschwindigkeit für jede Stelle des von der Flüssigkeit erfüllten festen Raumes und für jeden Augenblick beschrieben werden können. Will man in Coordinaten rechnen, so kann man Gl. (202) auch in ihre Componenten

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(x, y, z, t) \\ v_2 &= \varphi_2(x, y, z, t) \\ v_3 &= \varphi_3(x, y, z, t) \end{aligned}\right| \tag{203}$$

zerlegen. Das ganze Problem wird demnach darauf hinauskommen, die Function φ (oder ihre Componentenfunctionen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$) zu ermitteln, denn mit ihr wird zugleich die Bewegung in allen Einzelheiten und für den ganzen Verlauf des Vorgangs bekannt. Freilich gehört zur vollständigen Beschreibung auch die Angabe des Drucks, der zu irgend einer Zeit an irgend einer Stelle herrscht. Man erkennt aber schon aus den vorausgehenden Bemerkungen, dass der Druck nachträglich immer leicht angegeben werden kann, wenn man die Bewegung schon kennt und in der That wird sich in der Folge zeigen, dass der Druck mit der Function φ in so einfacher Weise zusammenhängt, dass er mit φ ebenfalls überall und zu jeder Zeit bekannt wird.

Der durch diese Betrachtung angewiesene Weg zur Untersuchung des ganzen Vorgangs ist zuerst von Euler beschritten worden. Die Gleichungen, zu denen man auf diesem Wege geführt wird, bezeichnet man daher als die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen. Gewöhnlich ist diese Untersuchungsmethode die bequemste. Zuweilen führt aber auch eine zweite, die von Lagrange weiter ausgearbeitet wurde, besser zum Ziele und die Gleichungen, die sich auf diese beziehen, bezeichnet man als die hydrodynamischen Gleichungen von Lagrange, obwohl auch Euler selbst, der um ein Menschenalter früher lebte, mit diesem zweiten Wege ebenfalls schon ganz gut bekannt war.

Das zweite Verfahren besteht nämlich darin, dass man das Augenmerk nicht auf eine bestimmte Stelle des Raumes richtet und zusieht, wie sich die Geschwindigkeit hier im Laufe der Zeit ändert, sondern indem man die Schicksale eines bestimmten Flüssigkeitstheilchens im Laufe des Bewegungsvorgangs verfolgt. Um anzugeben, was für ein Theilchen man meint, zieht man einen Radiusvektor $\mathfrak{r}_0$ von einem festen Anfangspunkte nach jener Stelle, die das Theilchen zu einer gewissen Zeit, die zum Ausgange der Untersuchung gewählt wird, inne hatte. Nach Verlauf einer Zeit t wird es sich an einer anderen Stelle befinden, deren Radiusvektor $\mathfrak{r}$ sei. Die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \psi(\mathfrak{r}_0, t) \tag{204}$$

giebt dann bei constantem $\mathfrak{r}_0$ die Bahncurve des Theilchens an. Wenn die Function ψ für alle möglichen Werthe von $\mathfrak{r}_0$ bekannt ist, hat man ebenfalls eine erschöpfende Beschreibung des ganzen Bewegungsvorgangs. Auch bei der Untersuchungsmethode von Lagrange handelt es sich daher im Wesentlichen um die Bestimmung einer Function ψ. Natürlich kann auch Gl. (204) durch drei Componentengleichungen ersetzt werden.

§ 38. Die hydrodynamischen Gleichungen von Euler.

Bis jetzt ist die Untersuchungsmethode, die hier einzuhalten ist, nur im Allgemeinen geschildert worden, ohne jede Rücksicht auf die Bedingungen, denen eine Flüssigkeitsbewegung unterworfen ist. Die Formulirung dieser Bedingungen wird uns zu den hydrodynamischen Gleichungen führen. Die Bedingungen sind von zweifacher Art. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar anzusehen ist, muss die Strömung jedenfalls immer in solcher Weise erfolgen, dass aus einem gegebenen Theile des festen Raumes, der ganz im Innern der Flüssigkeit liegt, jederzeit ebensoviel ausströmt, als durch andere Theile der Grenzfläche einströmt. Diese Bedingung ist eine rein kinematische oder geometrische; sie wird als die Continuitätsbedingung bezeichnet und die Gleichung, die ihr Ausdruck giebt, spielt bei hydrodynamischen Untersuchungen stets die Hauptrolle. Hierzu kommt aber noch die fernere Bedingung, dass die Bewegung des Wassers den allgemeinen Sätzen der Mechanik und speciell der dynamischen Grundgleichung unterworfen ist. Dass die Gleichungen, die dies aussprechen, erst in zweiter Linie, nämlich nach der Continuitätsgleichung, in Betracht kommen, rührt davon her, dass die an den Wassertheilchen wirkenden Kräfte auch erst nachträglich so gewählt werden können, dass irgend eine an sich (d. h. geometrisch) mögliche Bewegung zu Stande kommt, während eine Bewegung, die der Continuitätsbedingung nicht von vornherein genügt, überhaupt nicht verwirklicht werden kann.

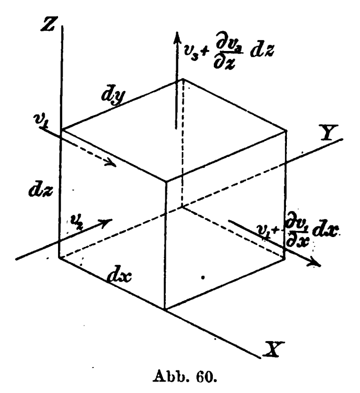


Abb. 60.

Zur Ableitung der Continuitätsgleichung in der Euler'schen Form betrachte man das in Abb. 60 gezeichnete Raumelement mit den Kantenlängen dx, dy, dz. Durch eine Ecke sind Parallelen zu den Coordinaten-

axen der x, y, z gezogen. Wir fragen uns zunächst, wie viel Wasser, auf die Zeiteinheit bezogen, im Augenblicke durch das in der YZ-Ebene liegende Rechteck einströmt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sei ebenfalls in ihre rechtwinkligen Componenten v_1, v_2, v_3 zerlegt. Die Componenten v_2 und v_3 tragen hier zur Einströmung nichts bei; es kommt bei dem fraglichen Rechtecke nur auf die Normalcomponente v_1 an. Wenn diese positiv ist, also im Sinne der positiven X-Axe geht, findet eine Einströmung statt, die während der Zeiteinheit dem Parallelepipede das Wasservolumen $v_1\, dy\, dz$ zuführt. Gleichzeitig strömt durch die gegenüberliegende Seitenfläche eine Wassermenge aus, die ebenso gross wäre, als die zugeführte, wenn sich v_1 mit x nicht änderte. Im Allgemeinen wächst aber v_1 um das Differential $\frac{\partial v_1}{\partial x} dx$, wenn man um dx weiter geht. Wenn man beide Flächen zusammenfasst, hat man daher einen Ueberschuss der Ausströmung über die Einströmung vom Betrage

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} dx \cdot dy\, dz.$$

In gleicher Weise kann man auch eine Zusammenfassung für die beiden zur Y-Axe senkrecht stehenden Seitenflächen vornehmen und erhält dann als Ueberschuss der Ausströmung über die Einströmung

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} dy \cdot dx\, dz$$

und ebenso für die beiden zur Z-Axe senkrechten Seitenflächen. Im Ganzen strömt daher auf die Zeiteinheit bezogen aus dem Parallelepiped das Flüssigkeitsvolumen

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

mehr aus, als ein. Wenn die Flüssigkeit als unzusammendrückbar (und unausdehnbar) angesehen wird, kann freilich nur ebensoviel ausströmen, als einströmen und man erkennt daraus, dass $\mathfrak{v}$ in diesem Falle keine ganz willkürliche Function von $\mathfrak{r}$ sein kann, sondern nur eine solche, die den vorhergehenden Ausdruck zu Null macht. Es macht aber hier gar

keine Schwierigkeit, die Betrachtung gleich noch etwas allgemeiner zu fassen und wir wollen daher die Voraussetzung der Unzusammendrückbarkeit für den Augenblick fallen lassen. Dann kann während eines Zeitelementes dt in der That mehr Flüssigkeit aus dem Raumelemente ausströmen, als einströmt und zwar geschieht dies auf Kosten des darin enthaltenen Vorraths an Flüssigkeit, die sich dabei ausdehnt. Zur näheren Verfolgung dieses Zusammenhangs führe ich den Begriff der specifischen Masse μ ein, also jener Masse, die bei überall gleicher Dichte auf die Raumeinheit käme. Für die zusammendrückbare Flüssigkeit ist μ nicht constant, sondern nach der Euler'schen Darstellung eine Function von $\mathfrak{r}$ und t.

Die durch eine Seitenfläche des Raumelementes strömende Flüssigkeitsmasse wird aus deren Volumen durch Multiplikation mit μ gefunden. Hiernach erhält man für die im Ganzen während des Zeitelementes dt aus dem Raumelemente mehr aus- als einströmende Flüssigkeitsmasse den Werth

$$\left(\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \cdot dt.$$

Andererseits kann die Aenderung, die der Flüssigkeitsvorrath $\mu\, dx\, dy\, dz$ in dem Raumelemente während der Zeit dt erfuhr, auch durch

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} dt \cdot dx\, dy\, dz$$

ausgedrückt werden. Dieser Ausdruck würde indessen bei positivem Vorzeichen eine Zunahme, der andere eine Abnahme des Flüssigkeitsinhalts angeben; beide sind daher von gleichem Werthe, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Hiermit erhält man sofort die Continuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial(\mu v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu v_3)}{\partial z} = -\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{205}$$

Setzen wir dagegen weiterhin die Flüssigkeit wieder als unzusammendrückbar voraus, so ist μ constant und die Continuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0. \tag{206}$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurden alle Grössen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen. Man erkennt aber, dass die Summe der drei Differentialquotienten auf der linken Seite von der speciellen Wahl, die man für dieses Coordinatensystem getroffen hat, ganz unabhängig ist. Dies folgt aus der physikalischen Bedeutung, die dieser Summe zukommt: wir sahen nämlich, dass das Produkt der Summe mit dem Volumen des Raumelementes, die während der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge angiebt. Dass dies auch für jedes anders gestaltete Raumelement noch zutrifft, folgt daraus, dass sich ein solches aus Elementen höherer Ordnung von parallelepipedischer Gestalt zusammensetzen lässt. Die Summe der drei Differentialquotienten giebt demnach an, wie viel Flüssigkeit, auf die Raumeinheit und auf die Zeiteinheit bezogen, aus irgend einem Volumenelemente an der betreffenden Stelle und zur gegebenen Zeit ausströmt.

Es ist wünschenswerth, diese Grösse, die an sich mit einem Coordinatensysteme gar nichts zu schaffen hat, wenn sie auch auf ein solches bezogen werden kann, in einfacherer Weise zu bezeichnen. Man hat dafür die Bezeichnungen Divergenz oder Quelle eingeführt. In der That divergirt ja die Flüssigkeit — indem sie sich ausdehnt — an der betreffenden Stelle, wenn die Summe der drei Differentialquotienten positiv ist und man kann auch sagen, dass die Strömung nach aussen hin so ist, als wenn sie durch eine im Inneren gelegene Quelle hervorgerufen wäre. In den Formeln schreibt man Divergenz abgekürzt div, setzt also

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{207}$$

womit der Begriff der Divergenz seine nähere Feststellung erhält. Mit Benutzung dieser Bezeichnung kann die Euler'sche Continuitätsgleichung für die unzusammendrückbare Flüssigkeit auch in der einfachen Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{208}$$

angeschrieben werden.

Die Flüssigkeitsbewegung muss ferner auch dem dynamischen Grundgesetze unterworfen sein. Um dies in einer Gleichung aussprechen zu können, müssen wir zunächst einen Ausdruck für die Beschleunigung und einen für die Resultirende der an einem Massentheilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte aufstellen. Die Beschleunigung wird hier nicht dadurch gefunden, dass man die durch die Gl. (202)

$$\mathfrak{v} = \varphi(\mathfrak{r}, t)$$

als Function der Zeit t dargestellte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nach t differentiirt. Der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ giebt vielmehr nur an, wie sich die Geschwindigkeit an dem gerade ins Auge gefassten Orte im Laufe der Zeit ändert, während die Beschleunigung die Geschwindigkeitsänderung eines bestimmten Massentheilchens darstellt. Man bedenke, dass sich ein zur Flüssigkeit gehöriger materieller Punkt im Laufe der Zeit dt um $\mathfrak{v}dt$ verschoben hat. Wenn nun, wie in der Euler'schen Untersuchungsmethode, $\mathfrak{v}$ als Function der Zeit und des Ortes dargestellt ist, setzt sich die Aenderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des bestimmten Massentheilchens zusammen aus der Aenderung wegen der Verschiebung $\mathfrak{v}dt$ nach einem anderen Orte und aus der Aenderung, die $\mathfrak{v}$ auch ohne diese Verschiebung während der Zeit dt schon am gleichen Orte erfährt. Wir wollen dies in der Form

$$d\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} dt + (\mathfrak{v} dt \cdot \nabla)\mathfrak{v}$$

anschreiben, zu deren Erklärung die Bemerkung genügt, dass das Zeichen ∇ einen Differentialoperator vorstellt, der nach Hinzutritt des Faktors $\mathfrak{v}dt$ die durch die Verschiebung um $\mathfrak{v}dt$ hervorgebrachte Aenderung von $\mathfrak{v}$ angiebt. Die Beschleunigung mag im Gegensatze zu dem vorher schon eingeführten partiellen Differentialquotienten als totaler Differentialquotient von $\mathfrak{v}$ nach t angeschrieben werden. Man findet dann aus der vorhergehenden Gleichung nach Division mit dt

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla) \cdot \mathfrak{v}. \tag{209}$$

Ich sehe mich jetzt vor die Wahl gestellt, entweder auf das Rechnen mit gerichteten Grössen noch etwas weiter einzugehen, als es schon früher geschehen ist, und namentlich den Differentialoperator ∇ ausführlicher zu besprechen oder auf den Gebrauch gerichteter Grössen zu verzichten und Gl. (209) durch ihre Componentengleichungen zu ersetzen. Ich entscheide mich für die letzte Wahl. Wenn später einmal vorausgesetzt werden darf, dass der Leser schon durch den vorausgehenden mathematischen Unterricht mit den Rechengesetzen und den Bezeichnungen der Vektoranalysis hinreichend vertraut gemacht wurde, wird es Niemand, der über solche Dinge schreibt, mehr einfallen, von der Darstellung nach der Vektormethode abzugehen; heute halte ich es aber für besser, in dieser Hinsicht vorsichtig zu Werke zu gehen und vor allen Dingen Maass zu halten, um dem an die Cartesische Darstellungsmethode Gewöhnten das Studium nicht zu verleiden.

Ich spalte also Gl. (209) in drei Gleichungen, von denen die erste den Werth von $\frac{dv_1}{dt}$, also die Beschleunigungscomponente in der Richtung der X-Axe anzugeben hat. Man erhält dafür

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}. \tag{210}$$

Dieses Resultat kann entweder unmittelbar aus Gl. (209) abgelesen werden, indem man sich des zuvor angegebenen Sinnes der Operation $(\mathfrak{v}\nabla)$ erinnert oder man kann auch auf Grund derselben Ueberlegung, die schon zu Gl. (209) führte, unmittelbar zu Gl. (210) gelangen. Auch die Aenderung der Geschwindigkeitscomponente v_1 während eines Zeitelementes dt für einen bestimmten materiellen Punkt setzt sich zusammen aus der Aenderung, die v_1 unabhängig von der Verschiebung während dt erleidet und aus der Aenderung, die mit dem Ortswechsel verbunden ist. Da sich der materielle Punkt in den Richtungen der Axen während dt um die Strecken $v_1 dt$, $v_2 dt$,

$v_3 dt$ verschiebt, setzt sich auch die mit dem Ortswechsel verbundene Aenderung von v_1 aus drei Gliedern zusammen, die durch Multiplikation dieser Wege mit den Differentialquotienten von v_1 nach den drei Axenrichtungen erhalten werden. Dividirt man die auf solche Art erhaltene Gleichung mit dt, so erhält man Gl. (210). Dieser lassen sich natürlich noch zwei andere für v_2 und v_3 anreihen und im Ganzen wird daher Gl. (209) durch den Verein der folgenden drei Gleichungen ersetzt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d v_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{d v_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{d v_3}{dt} &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\} . \qquad (211)$$

Wir kommen jetzt zu den Kräften, die diese Beschleunigungen hervorbringen. Von aussen her wirkt auf die im Innern liegenden Theile der Flüssigkeit in der Regel nur das Gewicht ein; allgemein mögen aber die drei Componenten der auf die Volumeneinheit bezogenen äusseren Kraft nach den Coordinatenaxen mit XYZ bezeichnet werden. Ausserdem wirkt an jedem Massentheilchen noch der Druck der ringsum angrenzenden Flüssigkeit. Man denke sich wieder ein Parallelepiped wie in Abb. 60 aus der Flüssigkeit abgegrenzt. Der Druck auf jede Seitenfläche steht senkrecht zur Seitenfläche und geht durch deren Schwerpunkt, also auch durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds. Die Druckkräfte auf alle Seitenflächen lassen sich daher zu einer Resultirenden zusammensetzen, die ebenfalls durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds geht. Auch die äussere Kraft, also in den gewöhnlich vorliegenden Fällen das Gewicht, geht durch diesen Mittelpunkt. Hieraus erkennt man schon, dass die Kräfte an dem in der angegebenen Weise abgegrenzten Wasserkörper keine Drehung, sondern nur eine Translation hervorzubringen suchen; auf diesen Punkt wird in der Folge noch zurückzukommen sein.

Wir wollen jetzt die in der Richtung der X-Axe gehende

Componente der Resultirenden aller an dem betrachteten Wasserkörper angreifenden Kräfte berechnen. Sie setzt sich zusammen aus der Componente $X\,dx\,dy\,dz$ der äusseren Kraft und aus dem Unterschiede des Flüssigkeitsdruckes auf den beiden zur X-Axe senkrecht stehenden Seitenflächen. Der Flüssigkeitsdruck auf die Flächeneinheit bezogen sei p; falls p wächst, wenn man in der X-Richtung weiter geht, überwiegt der Druck auf jener Seite, deren äussere Normale in die positive X-Richtung fällt und auf der der Druck daher dieser positiven Richtung entgegengesetzt ist. Demnach erhält man für die X-Componente der Resultirenden

$$X\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx \cdot dy\,dz.$$

Diese Componente bringt die Beschleunigungscomponente $\frac{dv_1}{dt}$ der Masse $\mu\,dx\,dy\,dz$ hervor. Nach der dynamischen Grundgleichung hat man daher bei Weglassung des gemeinsamen Faktors $dx\,dy\,dz$ die Beziehung

$$\mu\,\frac{dv_1}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{212}$$

und für die beiden anderen Coordinatenrichtungen gilt eine entsprechende Gleichung. Setzt man noch die Werthe der Beschleunigungscomponenten aus den Gl. (211) ein, so erhält man die Euler'schen Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)& \\
= X - \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(V+p) \\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)& \\
= Y - \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}(V+p) \\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)& \\
= Z - \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z}(V+p)
\end{aligned}\right\} \cdot \tag{213}$$

Die Umformung, die noch mit den rechten Seiten vorgenommen wurde, bezieht sich auf den Fall, dass die äussere Massenkraft mit den Componenten XYZ von einem Potentiale V abgeleitet werden kann, was in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, dass diese Kraft nur in dem Gewichte besteht, stets zutrifft. Dabei ist die Flüssigkeit als unzusammendrückbar vorausgesetzt. Man erkennt übrigens leicht, wie die vorausgehende Entwickelung auch für den Fall einer elastischen Flüssigkeit benutzt werden kann. — Durch die Continuitätsgleichung in Verbindung mit den Gl. (213) und auch in Verbindung mit den Grenz- und Anfangsbedingungen ist die Bewegung der unzusammendrückbaren Flüssigkeit dynamisch vollständig gekennzeichnet; bei den elastischen Flüssigkeiten muss noch eine aus der Erfahrung zu entnehmende Beziehung zwischen μ und p hinzutreten, um das Problem eindeutig zu umgrenzen.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass sich die Gl. (213) auch in eine einzige Gleichung zwischen gerichteten Grössen zusammenfassen lassen, nämlich in die Gleichung

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}\right) = \mathfrak{P} - \nabla p = -\nabla(V + p), \qquad (214)$$

in der $\mathfrak{P}$ die Resultirende der XYZ bedeutet.

§ 39. Wirbelbewegung und wirbelfreie Bewegung.

Die in der Ueberschrift angedeutete Eintheilung der Flüssigkeitsbewegungen in zwei wesentlich von einander verschiedene Klassen ist von grösster Bedeutung für die Hydrodynamik. Man betrachte den augenblicklichen Bewegungszustand der Flüssigkeit zu irgend einer Zeit. Jedem Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ist dann eine bestimmte augenblickliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zugeordnet (die auch gleich Null sein kann). Man grenze ferner in der Flüssigkeit noch einen einfach zusammenhängenden Raum von im Uebrigen beliebiger Gestalt ab und ziehe innerhalb dieses Raumes eine zum Anfangspunkt zurücklaufende, sonst aber beliebige Linie. Ein Element dieser Linie sei mit $d\mathfrak{s}$, die Ge-

schwindigkeit an der betreffenden Stelle mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Aus $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{s}$ soll das innere Produkt genommen und dann soll die Summe dieser Produkte für alle Linienelemente der geschlossenen Linie gebildet werden. Diese Summe heisst das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ längs des durch die beliebig gewählte geschlossene Linie dargestellten Integrationsweges. Wenn das Linienintegral stets gleich Null wird, wie man auch den Integrationsweg innerhalb des Bezirks, den wir zu diesem Zwecke willkürlich abgegrenzt hatten, wählen möge, wird die Bewegung innerhalb des Bezirks als wirbelfrei bezeichnet. Trifft dasselbe Kennzeichen auch noch zu für jeden Bezirk, den man abgrenzen mag und auch für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum, so ist die Bewegung überall wirbelfrei. In Form der Gleichung

$$\int_0^0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0, \tag{215}$$

die sich auf einen beliebigen, vom Anfangspunkte O ausgehenden und nach diesem wieder zurückführenden Integrationsweg bezieht, lässt sich demnach die Bedingung, der die wirbelfreie Bewegung genügen muss, in einfachster Weise aussprechen.

Warum man diese besondere Art der Wasserbewegung als eine „wirbelfreie“ bezeichnet, ergiebt sich aus einer einfachen Betrachtung. In der Umgangssprache bezeichnet man als „Wasserwirbel“ eine Bewegungsform, bei der die einzelnen Wassertheilchen in sich zurücklaufende Bahnen beschreiben. Allgemein bekannt ist die Erscheinung aus der Beobachtung der Strömung in Flussläufen, bei der sich namentlich in der Nähe von Bewegungshindernissen, etwa von Brückenpfeilern, leicht Wirbel ausbilden, die sich an den Bewegungen kleiner Körper, die von dem Wasser mitgeführt werden, leicht erkennen lassen. Es macht dabei auch nichts aus, wenn zu dieser wirbelnden Bewegung noch andere Bewegungscomponenten hinzutreten, die etwa den Wirbel flussabwärts führen. Beschränkt sich die Wasserbewegung auf die Bewegung längs geschlossener Bahnen und wählt man eine dieser Bahnen als den Integra-

tionsweg für die Bildung des Linienintegrals von $\mathfrak{v}$, so ist dieses jedenfalls positiv, da $\mathfrak{v}$ mit $d\mathfrak{s}$ überall gleichgerichtet ist. Die in Gl. (215) als Kennzeichen für die wirbelfreie Bewegung aufgestellte Bedingung ist daher im vorliegenden einfachsten Falle schon in bester Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche. Wir bemerkten aber schon, dass zu der wirbelnden Bewegung auch noch andere Bewegungscomponenten hinzutreten können, die zu den Wirbeln selbst nichts beitragen. Diesem Umstande trägt die vorher aufgestellte Definition Rechnung. Sie weist uns an, jeden geschlossenen Integrationsweg gewissermaassen als *wirbelverdächtig* zu betrachten. Zu einer in sich längs einer solchen Bahn zurücklaufenden Bewegung tragen nur jene Geschwindigkeitscomponenten etwas bei, die überall in die Bahnrichtung fallen und nur diese sind es auch in der That, die in dem inneren Produkte $\mathfrak{v}d\mathfrak{s}$ zur Geltung kommen. Hat also das Linienintegral von $\mathfrak{v}$ einen von Null verschiedenen Werth, so zeigt dies wenigstens einen Ueberschuss der tangentialen Bewegungscomponenten in einem Umlaufssinne über die im entgegengesetzten Sinne an und man kann sagen, dass im Ganzen genommen die Wasserbewegung mit einem bestimmten Umlaufsinne längs des Integrationswegs übereinstimmt. — Freilich ist das durch Gl. (215) angegebene Kennzeichen mit dem Begriffe der Wirbelbewegung in der Umgangssprache, der keine strenge Abgrenzung besitzt, nicht geradezu identisch; *es widerspricht ihm aber nirgends und kann als eine Verfeinerung oder als eine schärfere Fassung dieses Begriffes betrachtet werden.* Bei der wissenschaftlichen Untersuchung einer allgemein bekannten und vom Volksmunde nach seiner Art schon beschriebenen Erscheinung ist man nur selten in der glücklichen Lage, wie hier, ohne Weiteres an den gewöhnlichen Sprachgebrauch anknüpfen zu können, nämlich ohne zuvor entweder eine vollständige Umwerthung der Worte oder eine Neubildung von Worten, die man dann meist fremden Sprachen entnimmt, vornehmen zu müssen.

Zur Vermeidung von Missverständnissen betrachte ich noch

die Bewegung einer Flüssigkeit längs eines ringförmig in sich geschlossenen Rohres. Die Bewegung kann in diesem Falle so erfolgen, dass etwa für jeden kugelförmigen Bezirk, den man im Innern der Flüssigkeit abgrenzen mag, Gl. (215) erfüllt ist. Für einen Integrationsweg, der dem Rohre folgt und sich in dieser Weise schliesst, ist sie aber natürlich nicht erfüllt. Der Grund für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, dass der Sitz des Wirbels in diesem Falle an den Flüssigkeitsgrenzen liegt. Im Ganzen genommen ist die Bewegung jedenfalls nicht wirbelfrei, wenn sie auch für jeden einfach zusammenhängenden Bezirk im Innern der Flüssigkeit wirbelfrei sein kann.

Die allgemeinste Bewegung einer Flüssigkeit ist natürlich eine solche, mit der Wirbel verbunden sind; die wirbelfreie Bewegung stellt nur einen besonders einfachen Ausnahmefall dar. Ganz streng ist die Bedingung der Wirbelfreiheit bei einer wirklichen Wasserbewegung überhaupt niemals erfüllt. Die Bewegung kann sich aber der wirbelfreien unter gewissen Umständen sehr nähern und es ist daher von Interesse, die Gesetze dieser einfachsten Bewegungsart kennen zu lernen. In der That beziehen sich auch ihrem Umfange nach die meisten Untersuchungen der heutigen Hydrodynamik auf die wirbelfreie Bewegung. Dass eine solche Abgrenzung des Untersuchungsgebiets möglich und in sich einwandfrei ist, beruht übrigens auf einem von Lagrange aufgestellten Satze, zu dessen Beweis ich bald übergehen werde.

Vorher erinnere ich noch an die den vorausgehenden ganz ähnlichen Betrachtungen des ersten Abschnittes über die Kraftfelder. An die Stelle des Linienintegrals der Kraft ist hier nur das Linienintegral der Geschwindigkeit getreten, während sich sonst nichts geändert hat. Es ist daher nicht nöthig, die in § 3 durchgeführten Betrachtungen über das Potential hier nochmals zu wiederholen; wir können vielmehr die Schlüsse, zu denen wir damals gelangten, auf den jetzt vorliegenden Fall ohne Weiteres übertragen. Von diesen ist für uns namentlich von Wichtigkeit, dass sich im wirbelfreien Felde der Vektor

des Feldes durch Differentiation aus einer richtungslosen Grösse ableiten lässt, die früher als das Potential des Kraftfeldes bezeichnet wurde. Auch bei der wirbelfreien Wasserbewegung muss sich aus denselben Gründen wie damals zu jedem Punkte des Raumes in einem gegebenen Augenblicke eine Grösse ohne Richtung angeben lassen, aus der die Geschwindigkeitscomponente nach irgend einer Richtung durch Differentiation nach dieser Richtung abgeleitet werden kann. Man bezeichnet diese Grösse, um die enge Verwandtschaft mit den früheren Betrachtungen über die Kraftfelder ausdrücklich hervorzuheben, als das Geschwindigkeitspotential, obschon die sprachliche Herkunft des Wortes Potential mit der Verwendung, die das Wort hier findet, kaum noch etwas zu thun hat. Das Geschwindigkeitspotential sei in der Folge stets mit Φ bezeichnet; ich setze dann

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{216}$$

Hier findet freilich eine Abweichung im Vorzeichen von den früheren Festsetzungen über das Potential der Kraftfelder (vgl. Gl. (12), S. 22) statt. Damals war es mir von Wichtigkeit, an dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten des Potentials festzuhalten, weil das Potential des Kraftfeldes nur bei dieser Vorzeichenfestsetzung mit der potentiellen Energie des Feldes gleichbedeutend werden kann. Beim Geschwindigkeitspotential fällt aber ein solcher bestimmender Grund weg und wir können uns daher das Vorzeichen von Φ von vornherein so gewählt denken, dass die Differentialquotienten, ohne dass ein Vorzeichenwechsel vorauszugehen brauchte, unmittelbar die Geschwindigkeitscomponenten angeben. In der That ist es allgemeiner Brauch, das Geschwindigkeitspotential mit der durch die Gl. (216) bereits zum Ausdrucke gebrachten Vorzeichenfestsetzung zu benutzen. Vielleicht wäre es ja besser, an der bei den Kraftfeldern getroffenen Wahl der Gleichmässigkeit wegen auch hier festzuhalten und ich war auch zuerst im Zweifel, ob ich dies nicht thun sollte. Da aber auf diese Wahl schliesslich ohnehin nicht

viel ankommt, habe ich eine Abweichung vom Herkommen vermieden.

Differentiirt man die erste der Gl. (216) nach y und die zweite nach x und subtrahirt, so erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$$

und dazu treten noch zwei andere Gleichungen, die in derselben Weise gewonnen werden können. Diese Gleichungen geben die Bedingung an, der die Geschwindigkeitscomponenten genügen müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll. Damit werden wir in den Stand gesetzt, die Bedingung für die wirbelfreie Bewegung noch in anderer Form auszusprechen, als dies schon mit Hülfe des Linienintegrals in Gl. (215) geschehen war. Man bilde nämlich eine gerichtete Grösse $\mathfrak{w}$, deren Componenten nach den Axenrichtungen gleich den Differenzen von Differentialquotienten sind, die in dem vorausgehenden Ausdrucke vorkommen, nämlich

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \quad (217)$$

Die Grösse $\mathfrak{w}$ wird nur dann zu Null, wenn alle drei Componenten für sich verschwinden. Wenn ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll, also wenn die Bewegung wirbelfrei sein soll, müssen aber diese Componenten, wie aus dem Vergleiche mit den Gl. (216) hervorgeht, sämmtlich zu Null werden. Als Bedingung für die wirbelfreie Wasserbewegung kann man daher auch die Gleichung

$$\mathfrak{w} = 0 \quad (218)$$

an Stelle von Gl. (215) aufstellen. Jedenfalls ist diese Bedingung eine nothwendige; dass sie auch hinreichend ist, lässt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen noch nicht erkennen. Da dieser Nachweis für die Folge nicht nöthig ist, werde ich davon absehen, ihn hier ebenfalls zu führen; Näheres darüber findet man in meiner „Geometrie der Wirbelfelder". Nur dies möchte ich noch erwähnen, dass man mit Hülfe eines von Stokes aufgestellten Satzes den unmittelbaren Zu-

sammenhang zwischen den Gl. (215) und (218) in einfachster Weise erkennen kann.

Wenn das Feld nicht wirbelfrei ist, entsteht das Bedürfniss nach einem Maasse für den Wirbel, oder vielleicht besser gesagt, nach einem Maasse dafür, in welchem Grade und in welcher Art die Bewegung von der wirbelfreien abweicht. Hierzu kann die durch Gl. (217) definirte gerichtete Grösse $\mathfrak{w}$ ohne Weiteres benützt werden, da ihr Verschwinden die Bedingung für das Nichtvorhandensein von Wirbeln innerhalb eines Bezirks bildet, der der grade betrachteten Stelle eng benachbart ist. An Stelle der Grösse $\mathfrak{w}$ selbst kann auch irgend ein Vielfaches davon als Maass des Wirbels benutzt werden. Helmholtz, dem man die ersten Untersuchungen über die Wirbelbewegungen verdankt, hat dazu die Hälfte von $\mathfrak{w}$ gewählt, aus einem Grunde, auf den ich hier nicht weiter einzugehen brauche.

Die grosse Bedeutung des Wirbelbegriffes beschränkt sich übrigens nicht auf die Hydrodynamik, sondern sie tritt in der Elektricitätslehre fast noch mehr hervor. Es hat sich daher die Nothwendigkeit herausgestellt, eine einfache Bezeichnung für den analytischen Zusammenhang zwischen dem Wirbel $\mathfrak{w}$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ einzuführen. Gl. (217) gestattet zunächst, $\mathfrak{w}$ unter Zugrundelegung eines Coordinatensystems zu berechnen, wenn $\mathfrak{v}$ überall gegeben ist. Aus der physikalischen Bedeutung des Vektors $\mathfrak{w}$ folgt aber schon, dass $\mathfrak{w}$ von der besonderen Wahl des Coordinatensystems unabhängig sein muss. Es ist daher zweckmässiger, bei der Angabe des Zusammenhangs zwischen $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ die Bezugnahme auf ein Coordinatensystem zu vermeiden. Man nennt $\mathfrak{w}$ den Quirl von $\mathfrak{v}$, und setzt mit Benutzung der ursprünglichen englischen (von Maxwell eingeführten) Bezeichnung

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} \tag{219}$$

(curl = Quirl). Bei der wirklichen Ausrechnung von $\mathfrak{w}$ ist man freilich sehr oft genöthigt, auf die mit Gl. (219) gleichbedeutenden Gl. (217) wieder zurückzugehen.

§ 40. Allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen für die wirbelfreie Bewegung.

Die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen werden für den Fall der wirbelfreien Bewegung am besten so umgeformt, dass alle Geschwindigkeitscomponenten im Geschwindigkeitspotentiale Φ mit Hülfe der Gl. (216) ausgedrückt werden. Sie vereinfachen sich dann erheblich. Die Continuitätsgleichung (206) nimmt dann die Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{220}$$

an, wofür man mit Benutzung des schon von früher her bekannten Laplace'schen Operators ∇^2 kürzer

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{221}$$

schreiben kann. Ferner findet man für den in Gl. (210) angegebenen Ausdruck für die Beschleunigungscomponente in der X-Axe, nämlich

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

nach Einsetzen von

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

jetzt

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}.$$

Die drei letzten Glieder in diesem Ausdrucke bilden den partiellen Differentialquotienten nach x von

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] \text{ oder von } \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2,$$

wenn $\mathfrak{v}$ wieder die Gesammtgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle nach Grösse und Richtung bedeutet, wobei man beachten möge, dass das Quadrat (oder das innere Produkt mit sich selbst) einer gerichteten Grösse eine Grösse ohne Richtung angiebt. Setzt man dies ein, so erhält man die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dv_1}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}\\ \frac{dv_2}{dt}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}\\ \frac{dv_3}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}\end{array}\right\}. \tag{222}$$

Die in Gl. (213) zusammengestellten Euler'schen Gleichungen gehen nun — immer unter der Voraussetzung, dass die äussere Massenkraft von einem Potentiale V abgeleitet werden kann — über in

$$\left.\begin{array}{l}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}=-\frac{\partial}{\partial x}(V+p)\\ \mu\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}=-\frac{\partial}{\partial y}(V+p)\\ \mu\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}=-\frac{\partial}{\partial z}(V+p)\end{array}\right\}. \tag{223}$$

Da nun μ für die raumbeständige Flüssigkeit, um die es sich bei diesen Betrachtungen allein handelt, constant ist, lassen sich die Gl. (223) zu einer einzigen Integralgleichung zusammenfassen. Sie sprechen ja in der That nur aus, dass sich die Grössen, deren Differentialquotienten nach x, y und z mit einander übereinstimmen, nur um eine Grösse von einander unterscheiden können, die von diesen Veränderlichen unabhängig ist, während sie von t abhängig sein kann. Bezeichnen wir diese Grösse mit $f(t)$, so liefert die Integration der Gl. (223)

$$\mu\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right\}+V+p=f(t). \tag{224}$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Beziehung bei der stationären Flüssigkeitsströmung, also bei einer Bewegung, die sich dauernd in der gleichen Weise fortsetzt. Dann sind $\mathfrak{v}$, Φ, p zwar immer noch mit dem Orte veränderlich, an jedem Punkte des festen Raumes bleiben sie aber der Zeit nach constant. Der Differentialquotient von Φ verschwindet dann in der vorausgehenden Gleichung und auch $f(t)$ muss der Zeit nach constant, also überhaupt eine Constante sein, weil alle

übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen von t unabhängig sind. Für die stationäre wirbelfreie Strömung hat man daher die einfache Beziehung

$$\frac{1}{2}\mu\mathfrak{v}^2 + V + p = C \tag{225}$$

oder in Worten: die Summe aus der kinetischen Energie, dem Potentiale der äusseren Kräfte (d. h. der potentiellen Energie) und dem Flüssigkeitsdrucke hat zu jeder Zeit und für alle Stellen des Raumes denselben Werth, wenn man diese Grössen auf die Raumeinheit bezw. auf die Flächeneinheit bezieht. Dieses Resultat stimmt nahezu überein mit einem, das schon im ersten Bande § 56 auf viel einfacherem Wege gefunden und durch Gl. (139), 2. Aufl., ausgedrückt wurde. In einer Hinsicht besteht indessen zwischen beiden Resultaten doch ein sehr wesentlicher Unterschied. Das frühere Resultat galt nur für die Veränderlichkeit des Druckes in dem gleichen Stromfaden und es bleibt in diesem begrenzten Umfange, wie aus der Ableitung hervorgeht, auch dann noch gültig, wenn die Bewegung nicht wirbelfrei ist, falls dabei nur von der Flüssigkeitsreibung abgesehen werden kann. Gl. (225) ist insofern viel allgemeiner gültig, als sie die Veränderlichkeit des Druckes auch dann noch angiebt, wenn man von einem Punkte eines Stromfadens zu einem Punkte irgend eines anderen Stromfadens übergeht. Andererseits ist dagegen die Gültigkeit dieser erweiterten Beziehung an die Bedingung geknüpft, dass die Bewegung wirbelfrei ist. Ich bitte auf diesen wesentlichen Unterschied sorgfältig zu achten, da der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck bei der Theorie der hydraulischen Motoren in der theoretischen Maschinenlehre sehr häufig zum Ausgangspunkte der ganzen Entwickelung gemacht wird.

Schliesslich gebe ich hier noch den Beweis für den schon im vorigen Paragraphen erwähnten Satz von Lagrange. Dazu berechne ich die Veränderungen, die die Geschwindigkeits-Componenten an irgend einer fest angenommenen Stelle des

Raumes im Laufe der Zeit erfahren. Zunächst hat man nach Gl. (211)

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{d v_1}{d t} - \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)$$

oder auch nach den Gleichungen (213), indem man für die Beschleunigung-Componente $\frac{d v_1}{d t}$ ihren Werth nach der dynamischen Grundgleichung einsetzt und dabei annimmt, dass sich die äussere Massenkraft von einem Potentiale V ableiten lasse,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(V+p) - \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right).$$

Dies gilt noch allgemein: auch für die Wirbelbewegung. Setzt man aber nun ferner voraus, dass in einem bestimmten Augenblicke, der zum Ausgangspunkte der Untersuchung gewählt wird, die Bewegung im ganzen Raume wirbelfrei war, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung, dass sie auch weiterhin wirbelfrei bleiben muss. Jedenfalls kann man nämlich unter der genannten Voraussetzung die Geschwindigkeiten zu Anfang der Zeit aus einem Potentiale Φ ableiten, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(V+p) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}(V+p) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right)\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}(V+p) + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right)
\end{aligned}$$

und entsprechende Gleichungen gelten auch für die Aenderungen von v_2 und v_3 mit der Zeit. Damit ist aber gezeigt, dass sich auch nach Ablauf eines Zeitelementes dt die Geschwindigkeits-Componenten immer noch von einem Geschwindigkeitspotentiale ableiten lassen und zwar hat das Potential alsdann den Werth

$$\Phi + d\Phi = \Phi - \left(\frac{1}{\mu}(V+p) + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^2\right)dt,$$

denn hieraus folgt in der That der vorher aufgestellte Werth von $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, ebenso auch der von $\frac{\partial v_2}{\partial t}$ und von $\frac{\partial v_3}{\partial t}$. Wenn sich

die Geschwindigkeiten nach dt aber immer noch von einem Potentiale ableiten lassen, so ist die Bewegung auch noch wirbelfrei geblieben. — Was ferner von dem einen Zeitelemente dt gilt, lässt sich ebenso auf alle folgenden übertragen und die Bewegung muss daher immer wirbelfrei bleiben. Damit ist der Satz von Lagrange bewiesen, der noch in den Worten ausgesprochen werden soll:

Wenn die Bewegung einer raumbeständigen und reibungsfreien Flüssigkeit, auf die von aussen her nur solche Massenkräfte einwirken, die sich (wie das Gewicht) von einem Potentiale ableiten lassen, zu irgend einer Zeit wirbelfrei war, so bleibt sie auch weiterhin wirbelfrei.

Erst durch diesen Satz erlangen die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung die ihr in der Hydrodynamik mit Recht eingeräumte Bedeutung. Es ist nur zu billigen, dass man sich zunächst Rechenschaft darüber zu geben sucht, was geschehen müsste, wenn die Zähigkeit nicht in Betracht käme. Man darf dabei freilich nicht vergessen, dass keine genaue Uebereinstimmung zwischen diesem einfachsten Falle und dem wirklichen Bewegungsvorgange erwartet werden kann. Da man wegen des Bestehens eines Geschwindigkeitspotentials die Untersuchungen über die wirbelfreie Bewegung weit einfacher durchführen kann, als im anderen Falle, gelangt man indessen mit verhältnissmässig geringer Mühe zu Resultaten, die zwar nicht als genau angesehen werden dürfen, die aber wegen des Vergleichs, den sie gestatten, immerhin sehr zu schätzen sind.

§ 41. Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit.

Ein fester kugelförmiger Körper möge sich in einer Flüssigkeit gradlinig mit constanter Geschwindigkeit bewegen. Es fragt sich, was für eine Kraft von aussen her an ihm wirken muss, um diese Bewegung zu Stande zu bringen. Dabei soll angenommen werden, dass sich der Körper hinlänglich

weit von den Grenzflächen der Flüssigkeit entfernt befindet, um den Einfluss benachbarter Wände u. s. f. vernachlässigen zu können. Wir drücken diese Voraussetzung am einfachsten dahin aus, dass wir die Flüssigkeit nach allen Seiten hin als unbegrenzt ansehen. In grösserer Entfernung von der sich bewegenden Kugel soll die Flüssigkeit ruhen; in der Nachbarschaft der Kugel treten natürlich Strömungen auf, da die Flüssigkeit der Kugel während ihres Fortschreitens vorn ausweichen muss, während sie sich hinter ihr wieder zusammenschliesst.

Wenn die Kugel in Ruhe wäre, würde die Flüssigkeit einen hydrostatischen Auftrieb an ihr ausüben und es müsste daher, um sie in Ruhe zu erhalten, eine lothrechte Kraft an ihr angebracht werden, die mit dem Gewichte der Kugel und dem hydrostatischen Auftriebe Gleichgewicht herstellte. Denken wir uns nachher die Kugel in horizontaler Richtung durch die Flüssigkeit bewegt, so wird immer noch, um ein Verschieben in der lothrechten Richtung zu verhüten, durch eine äussere Kraft Gleichgewicht zwischen dem Auftriebe und dem Kugelgewichte hergestellt werden müssen. Diese Kraft ist einfach zu ermitteln und sie interessirt uns hier weiter nicht; von Interesse ist für uns nur die Kraft, die man in der Bewegungsrichtung aufwenden muss, um den Widerstand der Flüssigkeit gegen die Bewegung zu überwinden. Wir wollen uns desshalb die Kugel von vornherein von gleichem specifischem Gewichte mit dem Wasser vorstellen, so dass sie im Ruhezustande darin von selbst schwimmt. Wir können dann von der Einwirkung der Schwerkraft auf die Kugel und die Flüssigkeit ganz abgesehen; der Vorgang erfolgt so, als wenn die Schwere überhaupt nicht vorhanden wäre.

Wenn die Aufgabe in dieser Weise gestellt wird, haben wir es nicht mit einer stationären Strömung zu thun, da die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem bestimmten Punkte des festen Raumes wechselt, wenn die Kugel auf ihrer Bahn fortschreitet. Relativ zu einem Raume, der sich mit der Kugel ohne Drehung gleichförmig weiter bewegt, wird die Bewegung

dagegen, nachdem sie schon längere Zeit angedauert hat, stationär sein. Man vereinfacht daher die Aufgabe, wenn man die Bewegung von einem solchen Raume aus beobachtet; Zusatzkräfte der Relativbewegung brauchen dabei nicht angebracht zu werden, da sich der Raum weder dreht, noch eine Translationsbeschleunigung besitzt. Einfacher lässt sich dies auch dahin ausdrücken, dass man sich die Kugel von vornherein an ihrer Stelle festgehalten denkt, während die Flüssigkeit an ihr vorüberströmt. Man kann sich die Kugel etwa in das Wasser eines Flusses versenkt denken, so dass sie hinreichend weit von dem Umfange des Flussbettes und der Wasseroberfläche entfernt bleibt. Bewegte sich das Wasser an dieser Stelle vor dem Einsenken der Kugel gleichförmig, so nämlich, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sowohl dem Orte als der Zeit nach in diesem Bezirke constant war, so wird dieselbe Kraft an der Kugel angebracht werden müssen, um sie vor dem Fortreissen mit der Strömung zu schützen, als wenn das Wasser ruhte und die Kugel sich im entgegengesetzten Sinne mit constanter Geschwindigkeit bewegte. In dieser Form lässt sich die Aufgabe am einfachsten weiter behandeln.

Wir betrachten die Flüssigkeit als reibungsfrei und nehmen hiermit zugleich an, dass die Bewegung wirbelfrei sei. Die Wasserströmung ist dann vollständig bekannt, wenn man das von der Zeit unabhängige Geschwindigkeitspotential Φ anzugeben vermag. Da das Problem durch die auferlegten Bedingungen physikalisch vollständig bestimmt ist, muss auch Φ bis auf eine willkürliche Constante, die man ihm nach Belieben zufügen darf, ohne an den daraus abgeleiteten Geschwindigkeitscomponenten etwas zu ändern, vollständig bestimmt sein. Falls man daher einen Ausdruck von Φ kennt, der allen Bedingungen genügt, ist dieser — abgesehen von jener willkürlichen Constanten — der richtige. Wenn man will, kann man dies auch noch strenger beweisen, indem man zuerst annimmt, es wären zwei Werthe von Φ möglich, die allen Bedingungen genügten, dann ihre Differenz bildet und zeigt, dass diese nothwendig eine Constante sein muss.

Dirichlet hat den Ausdruck von Φ, der den Bedingungen unserer Aufgabe genügt, gefunden, nämlich

$$\Phi = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right). \tag{226}$$

Dabei ist angenommen, dass die positive Z-Axe in jene Richtung gelegt ist, in der die ungestörte Strömung der Flüssigkeit erfolgt; a ist die Geschwindigkeit dieser Strömung, ϱ der Radius der festgehaltenen Kugel und r die Entfernung jenes Punktes in der Flüssigkeit, für den Φ durch Gl. (226) angegeben wird, vom Kugelmittelpunkte, der als Coordinatenursprung dient. Auf die Orientirung der X- und der Y-Axe kommt offenbar nichts an, da rings um die Z-Axe alles symmetrisch ist. Für r hat man übrigens nach dem Pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{227}$$

mit deren Hülfe sofort die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \tag{228}$$

gebildet werden können. Um zu beweisen, dass der für Φ angegebene Ausdruck in der That die Lösung unseres Problems bildet, ermitteln wir zunächst die Geschwindigkeitscomponenten die sich daraus ergeben. Wir erhalten mit Rücksicht auf die Gleichungen (228)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}xz \\ v_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}yz \\ v_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = a\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right) - az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\frac{\partial r}{\partial z} \\ &= a\frac{\varrho^3}{2r^3} + a - a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z^2 \end{aligned}\right\}. \tag{229}$$

Diese Geschwindigkeitscomponenten müssen vor Allem der Continuitätsbedingung genügen. Um dies zu prüfen, stellen wir die Differentialquotienten nach x, y, z auf, nämlich

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z + a\frac{15\varrho^3}{2r^6}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot xz = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5x^2}{r^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5y^2}{r^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -a\frac{3\varrho^3}{2r^5}z - 2az\frac{3\varrho^3}{2r^5} + a\frac{15\varrho^3}{2r^7}z^3 = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5z^2}{r^2}-3\right).$$

Die Summe dieser drei Differentialquotienten oder $\nabla^2\Phi$ muss Null ergeben. In der That findet man aber beim Zusammenzählen

$$\nabla^2\Phi = az\frac{3\varrho^3}{2r^5}\left(\frac{5x^2+5y^2+5z^2}{r^2}-5\right)$$

und dies wird mit Rücksicht auf Gl. (227) identisch zu Null. Damit ist zunächst gezeigt, dass die durch Φ angegebene Flüssigkeitsbewegung in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit geometrisch möglich ist.

Hierzu kommen noch die Grenzbedingungen. An der Kugeloberfläche muss die Flüssigkeit der Kugel ausweichen, d. h. die Geschwindigkeit der Flüssigkeit kann dort überall nur tangential gerichtet sein. Um dies zu untersuchen, denke man sich an irgend einer Stelle der Kugeloberfläche eine Normale n nach aussen hin gezogen. Die Geschwindigkeitscomponente in der Richtung dieser Normalen wird erhalten, wenn man Φ in der Richtung der Normalen differentiirt und wenn die Lösung richtig sein soll, muss dieser Werth überall gleich Null sein. Wir bilden den Differentialquotienten

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = a\left(\frac{\varrho^3}{2r^3}+1\right)\frac{\partial z}{\partial n} - az\frac{3\varrho^3}{2r^4}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Wenn man in der Richtung der Normalen um ∂n von der Kugelfläche weiter geht, wächst r um ∂n und man hat daher

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 1.$$

Projicirt man ferner ∂n auf die Z-Axe, so erhält man das zugehörige ∂z, und da ∂n mit dem zur betreffenden Stelle gezogenen Radius r, dessen Projektion z ist, gleiche Richtung hat, besteht die Proportion

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{z}{r}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{a z}{r}\left(\frac{\varrho^3}{2 r^3} + 1\right) - a z \frac{3 \varrho^3}{2 r^4} = \frac{a z}{2 r^4}(\varrho^3 + 2 r^3 - 3 \varrho^3)$$

und an der Kugeloberfläche wird dies in der That überall zu Null, weil dort $r = \varrho$ ist.

Schliesslich muss noch in grösserer (oder streng genommen in unendlicher) Entfernung von der Kugel die Flüssigkeit überall parallel zur Z-Axe mit der Geschwindigkeit a strömen. In der That wird aber, wie man aus den Gleichungen (229) erkennt, für $r = \infty$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = a.$$

Die Flüssigkeit strömt demnach überall so, wie es den geometrischen Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es bleibt jetzt nur noch übrig, auf die Erfüllung der aus der dynamischen Grundgleichung hervorgegangenen Euler'schen Gleichungen zu achten. Für den Fall der stationären Strömung sind diese bereits in der Integralgleichung (225) zusammengefasst. Da wir auf die Veränderlichkeit des Druckes mit der Höhe jetzt nicht zu achten brauchen, weil der Vorgang, wie bereits bemerkt, im Uebrigen so erfolgt, als wenn die Flüssigkeit und die Kugel der Schwere überhaupt nicht unterworfen wären, können wir diese Gleichung hier noch dadurch vereinfachen, dass wir das Potential constant setzen und es in die Constante C mit einrechnen. Wir haben dann

$$\frac{1}{2} \mu \mathfrak{v}^2 + p = C.$$

In unendlicher Entfernung von der Kugel wird $\mathfrak{v}^2 = a^2$ und wir erkennen daraus, dass dort auch überall derselbe Druck herrscht, so als wenn die Kugel nicht vorhanden wäre. Bezeichnen wir diesen Druck an den fernen Grenzen mit p_0, so findet man damit auch die Constante C, nämlich

$$C = \frac{1}{2} \mu a^2 + p_0$$

und der Druck an irgend einer anderen Stelle ist

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \mu (a^2 - \mathfrak{v}^2). \qquad (230)$$

Hiermit ergiebt sich auch der Druck, den die Flüssigkeit auf irgend eine Stelle der Kugeloberfläche ausübt, indem man

$$\mathfrak{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

bildet und die Werthe aus den Gleichungen (229) einführt, wobei noch darauf zu achten ist, dass an der Kugeloberfläche $r = \varrho$ zu setzen ist und $x\,y\,z$ Coordinaten eines Punktes der Kugelfläche bedeuten. Führt man dies aus und bezeichnet man die Geschwindigkeit irgendwo in nächster Nähe der Kugelfläche mit $\mathfrak{v}_\varrho$, so wird

$$\mathfrak{v}_\varrho^2 = \frac{9a^2}{4}\left(1 - \frac{z^2}{\varrho^2}\right). \tag{231}$$

Dort, wo die Z-Axe die Kugeloberfläche schneidet, wird $z = \varrho$ und daher $\mathfrak{v}_\varrho$ gleich Null, was schon aus Symmetriegründen zu erwarten war. Am grössten wird die Geschwindigkeit am Aequator der Kugel, der in die XY-Ebene fällt und für den $z = 0$ ist. Die Flüssigkeit strömt dort mit der Geschwindigkeit $\frac{3a}{2}$ an der Kugel vorüber. Der Druck p_ϱ an der Kugelfläche ist nach Gl. (230)

$$p_\varrho = p_0 + \frac{\mu a^2}{8}\left(9\frac{z^2}{\varrho^2} - 5\right). \tag{232}$$

In den Endpunkten des in der Richtung der Strömung gezogenen Durchmessers nimmt p_ϱ seinen grössten Werth $p_{\max}$ an, nämlich

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\mu a^2}{2}$$

und zwar wird der Druck, worauf wohl zu achten ist, an der der Strömung abgekehrten Stelle ebensogross, als an der der Strömung zugekehrten. Der kleinste Druck $p_{\min}$ herrscht am Aequator der Kugel, nämlich

$$p_{\min} = p_0 - \frac{5\mu a^2}{8}.$$

Wir setzen dabei voraus, dass p_0 gross genug ist, damit $p_{\min}$ positiv bleibt, weil sonst die Ausbildung eines Hohlraumes zu erwarten wäre.

Im Uebrigen ist p_ϱ eine grade Function von z. Es ist daher für p_ϱ gleichgültig, ob das Vorzeichen von z positiv oder negativ ist, d. h. der Druck ist an entsprechenden Stellen

der der Strömung abgewendeten Halbkugel genau ebensogross, als auf der ihr zugewendeten Halbkugel. Daraus folgt ohne Weiteres, dass sich alle von der Flüssigkeit auf die Kugel übertragenen Druckkräfte im Gleichgewichte mit einander halten. Wir kommen daher zu dem unerwarteten Resultate, dass man überhaupt keine Kraft an der Kugel anzubringen braucht, um sie bei der wirbelfreien Strömung in der vollkommenen Flüssigkeit an ihrer Stelle festzuhalten; sie bleibt vielmehr von selbst stehen und lässt die Flüssigkeit um sich herumfliessen, ohne sich von der Stelle zu rühren.

Zugleich folgt daraus auch, dass sich der gradlinig gleichförmigen Bewegung einer Kugel durch eine vollkommene Flüssigkeit kein Widerstand entgegensetzt. Wenn das Wasser eine vollkommene Flüssigkeit wäre, brauchte man keine Arbeit aufzuwenden, um darauf zu fahren; nur zu Beginn der Fahrt wäre ein Anstoss erforderlich, um die Anfangsgeschwindigkeit herzustellen.

Das wirkliche Verhalten des Wassers ist natürlich ganz anders. Wir sind mit dem Widerstande, den das Wasser der Fortbewegung eines in ihm schwimmenden Körpers entgegensetzt, so bekannt, dass wir unwillkürlich geneigt sind, diesen Widerstand mit der Eigenschaft des Flüssigseins in Verbindung zu bringen und ihn daher auch bei einer vollkommenen Flüssigkeit vorauszusetzen. Unsere Untersuchung lehrt uns aber, dass diese Meinung irrig ist. Der Widerstand, den das Wasser schwimmenden Körpern entgegensetzt, kommt nicht davon her, dass das Wasser an sich ein flüssiger Körper ist, sondern nur davon, dass es nicht vollkommen flüssig ist. Ueber solche Fragen kann daher ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat nur aus Betrachtungen gewonnen werden, die auf die Zähigkeit des Wassers Rücksicht nehmen. Ich möchte hier nur erwähnen, dass man die Aufgabe der sich durch das Wasser bewegenden Kugel auch mit Berücksichtigung der Zähigkeit gelöst und hierbei gefunden hat, dass das Wasser der Bewegung einen Widerstand entgegensetze,

der der Geschwindigkeit (bei gleichförmiger Bewegung) proportional sei. In § 48 wird man auch von dieser Untersuchung eine kurz gefasste Darstellung finden.

Dass die vollkommene Flüssigkeit der gleichförmigen Bewegung eines in ihr schwimmenden Körpers kein Hinderniss zu bereiten vermag, lässt sich übrigens auch auf Grund einer ganz einfachen Betrachtung erkennen. Wäre ein solcher Widerstand zu überwinden, so müsste an dem Körper, um ihn in seiner Bewegung zu erhalten, eine Arbeit von aussen her geleistet werden. Wohin sollte aber diese Energie gelangen? Bei der zähen Flüssigkeit wird Energie zur Ueberwindung der inneren Reibungen verbraucht und in Wärme verwandelt. Bei der vollkommenen Flüssigkeit ist aber kein solcher Energieaufwand möglich; sie vermag überhaupt keine mechanische Energie aufzuzehren, abgesehen von dem Falle eines Zusammenstosses mit endlich verschiedenen Geschwindigkeiten, bei dem wie beim Stosse fester Körper mechanische Energie vernichtet werden könnte. Dieser Fall liegt aber hier nicht vor. Auch die lebendige Kraft des ganzen Systems behält fortwährend denselben Werth und ins Unendliche vermag sich ebenfalls die Energie nicht zu zerstreuen. Da kein Energiebedarf vorliegt, um die Bewegung zu unterhalten, braucht dem bewegten Körper auch keine Energie zugeführt zu werden, d. h. der Widerstand der Flüssigkeit ist gleich Null. Diese Ueberlegung hat zugleich den Vortheil, dass sie die Gültigkeit der Betrachtung von dem kugelförmigen Körper auf einen Körper von beliebiger Gestalt erweitert.

Vor allem interessirt natürlich den Techniker bei diesen Betrachtungen der Widerstand, den ein Schiff auf seiner Fahrt findet. Für ein unterseeisches Boot, das nicht zu nahe an der Oberfläche schwimmt, könnten für die Bewegung in der vollkommenen Flüssigkeit die vorausgehenden Schlüsse ohne Weiteres angewendet werden. Bei einem gewöhnlichen Schiffe, das nur zum Theile im Wasser schwimmt und sich im Uebrigen im Luftraume fortbewegt, muss aber noch eine wichtige Ergänzung hinzutreten. Der Luftwiderstand mag dabei übrigens

gegenüber dem viel grösseren Widerstande des Wassers vernachlässigt werden. Wir gehen wieder auf die Bewegung der Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit zurück. Die Kugel mag sich in horizontaler Richtung bewegen; durch die Z-Axe, die mit der Bewegungsrichtung zusammenfiel, sei eine horizontale Ebene, etwa die YZ-Ebene gelegt. Diese theilt die Kugel und die Flüssigkeit in zwei symmetrisch zu einander liegende und sich in jeder Hinsicht genau gleich verhaltende Hälften. Es strömt auch niemals während des Bewegungsvorgangs Flüssigkeit aus der einen Hälfte in die andere über. Es ändert daher nichts, wenn wir uns die eine, und zwar die obere Hälfte ganz beseitigt denken. Wir behalten dann eine Halbkugel, die sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit, mit der sie grade abschneidet, fortbewegt. Man kann sich diese Halbkugel etwa als ein Schiffsgefäss denken, das sich auch noch über die Wasseroberfläche erheben darf, wenn der Luftwiderstand, den der emporragende Theil findet, vernachlässigt werden kann. Es scheint zunächst, als wenn für den Bewegungswiderstand des an der Oberfläche schwimmenden Schiffes dasselbe gelten müsste wie für den Widerstand an der vollständig eingetauchten Kugel.

Man muss aber bedenken, dass der Druck in der YZ-Ebene veränderlich ist, wie aus Gl. (232) hervorgeht. Solange die Flüssigkeit zusammenhing, war dies gleichgültig, da der Druck auf beiden Seiten der YZ-Ebene um gleich viel abnahm. Wenn sich aber nur auf der einen Seite Wasser und auf der anderen Luft befindet, deren Druck auf die Wasseroberfläche überall fast genau denselben Werth hat, kann der Druckunterschied in der YZ-Ebene nicht so weiter bestehen, wie er vorher berechnet war. An den Stellen, wo p nach der früheren Rechnung seinen grössten Werth annahm, also an den Endpunkten des in der Bewegungsrichtung gezogenen Durchmessers, muss die Wasseroberfläche nach oben hin ausweichen, da ihr dort kein genügender Gegendruck widersteht und an den Endpunkten der Y-Axe, wo der Druck nach Gl. (232) am kleinsten wird, senkt sich der Wasserspiegel. Der Be-

wegungsvorgang bei einem an der Wasseroberfläche schwimmenden Schiffe ist aus diesem Grunde recht erheblich von dem bei einem unterseeischen Boote oder bei einem Fische verschieden. Wenn das Schiff weiterrückt, müssen sich die Hebungen und Senkungen, die der Wasserspiegel erfuhr, wieder ausgleichen und hierbei entsteht eine weitere Bewegung, die sich in Form einer Welle über die Wasseroberfläche ausbreitet. *Ein an der Wasseroberfläche schwimmendes Schiff müsste hiernach auch selbst in einer vollkommenen Flüssigkeit einen Bewegungswiderstand finden; es müsste ihm nämlich fortwährend Energie zur Neubildung der Oberflächenwellen während der Fahrt zugeführt werden.* Die Oberflächenwellen würden bei der seitlich unbegrenzten vollkommenen Flüssigkeit die Energie stetig ins Unendliche hinaus fortführen.

Die zuletzt gezogenen Schlüsse stimmen nun auch in der That wieder ganz gut mit den Beobachtungen am Wasser überein. Jedermann kennt die Oberflächenwellen, die ein in der Fahrt befindliches Schiff hervorruft und man weiss auch, dass die Kraft der Maschine bei grösseren Geschwindigkeiten in der Hauptsache zur Erzeugung dieser Wellen verbraucht wird. *Es kann gar kein Zweifel darüber bestehen, dass ein unterseeisches Boot in dieser Hinsicht erheblich im Vortheil wäre*; es brauchte unter sonst gleichen Umständen einen geringeren Arbeitsaufwand zur Erzielung der gleichen Geschwindigkeit. Auch ein Fisch ist besser daran, als unsere Schiffe; für ihn ist der Schluss, dass ein Körper im bewegten Wasser an der Stelle bleiben könne, ohne dass ihn eine Kraft festzuhalten brauchte, ein der Wirklichkeit näher kommendes Resultat, als für ein an der Oberfläche schwimmendes und verankertes Schiff.

Natürlich lassen sich die vorhergehenden Betrachtungen noch nach manchen Richtungen hin erweitern und damit verallgemeinern. Ich erwähne hier nur, dass man die Aufgabe in ähnlicher Weise wie für die Kugel auch für ein *Ellipsoid* lösen kann und dass man ferner die Aufgabe auch für *zwei*

Kugeln gelöst hat, die beide in der strömenden Flüssigkeit festgehalten werden oder die sich in der ruhenden Flüssigkeit mit gleicher Geschwindigkeit parallel fortbewegen. In diesem Falle lässt sich zeigen, dass die Resultirende des Flüssigkeitsdruckes auf jede Kugel nicht verschwindet, sondern eine Kraft ergiebt, die auch als eine Anziehung der einen Kugel auf die andere gedeutet werden kann. Denkt man sich eine Ebene gelegt, die den Abstand beider Kugeln senkrecht halbirt, so ist diese eine Symmetrieebene der Strömung und an dem Bewegungsvorgang auf der einen Seite wird nichts geändert, wenn man sich die andere Hälfte entfernt denkt und an Stelle der Symmetrieebene eine Wand setzt, die die Flüssigkeit begrenzt. Daraus schliesst man dann weiter, dass eine Kugel, die sich in der Nähe einer Wand parallel zu dieser durch die Flüssigkeit bewegt, nach der Wand hingetrieben wird, so als wenn sie von der Wand angezogen würde. Dieser Schluss steht auch in Uebereinstimmung mit gewissen Beobachtungsthatsachen. Wenn man z. B. eine Seifenblase in der Nähe einer Zimmerwand emporsteigen lässt, so nähert sie sich im Allgemeinen der Wand. Natürlich muss man, um die Erscheinung rein beobachten zu können, für die Fernhaltung von anderen Luftströmungen sorgen, die eine Störung verursachen könnten. — Schliesslich erwähne ich noch, dass in neuerer Zeit bei der Besprechung der Cirkulationsströmungen in Wasserröhrenkesseln und auch sonst bei der Besprechung des Vorgangs der Dampfbildung in Dampfkesseln die Bewegung kugelförmiger Dampfblasen im Wasser eine erhebliche Rolle gespielt hat, die es erwünscht erscheinen lässt, wenn der Techniker mit dem, was die Hydrodynamik über einen solchen Vorgang zu lehren vermag, einigermaassen vertraut ist. — Auf die Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit, von der ich schon vorher sprach, komme ich in der Folge noch zurück.

§ 42. Zusammenhang des vorhergehenden Problems mit einem Probleme aus der Lehre vom Magnetismus.

Sehr häufig lässt sich eine Erkenntniss, die auf einem Gebiete der theoretischen Physik gewonnen wurde, mit grossem Vortheile und ohne grosse Mühe auch in anderen Gebieten nutzbar machen. Da der Ingenieur neuerdings auch in der Lehre vom Magnetismus bewandert sein muss, möchte ich, ohne desshalb freilich ausführlicher auf den Gegenstand einzugehen, darauf hinweisen, welcher Gebrauch von den vorausgehenden Untersuchungen auf diesem Gebiete gemacht werden kann.

Ich schicke voraus, dass ein magnetisches Feld durch eine gerichtete Grösse $\mathfrak{B}$, die magnetische Induction, an jeder Stelle gekennzeichnet werden kann. Zieht man Linien, die der Richtung von $\mathfrak{B}$ überall folgen, so heissen diese Inductionslinien (öfters, obschon mit Unrecht, „Kraftlinien" genannt). Das magnetische Feld kann unter dem Bilde einer strömenden Flüssigkeit dargestellt werden, so dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ überall ein Maass für die Grösse von $\mathfrak{B}$ bildet und in der Richtung damit übereinstimmt. Man weiss ferner, dass der Inductionsfluss, der in ein Raumelement eintritt, stets ebensogross ist, als der davon austretende, dass also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der die Induction abbildenden Strömung der Continuitätsbedingung genügt und dass ferner in „magnetisch weichen" Körpern, die von elektrischen Strömen frei sind, das Feld wirbelfrei ist. Das Problem, den Inductionsfluss in einem solchen Falle zu ermitteln, fällt daher in den wesentlichen geometrischen Bedingungen mit einem hydrodynamischen Probleme zusammen.

Man stelle sich nun ein homogenes magnetisches Feld ($\mathfrak{B}$ bezw. $\mathfrak{v}$ der Grösse und Richtung nach constant) in einer weichen Eisenmasse vor und nehme an, dass in dieser ein kleiner kugelförmiger Hohlraum angebracht sei. Einige Inductionslinien gehen zwar immer noch durch den mit Luft gefüllten Hohlraum. Wegen der viel grösseren magnetischen

„Permeabilität" des Eisens ist dies aber nur ein ganz geringer Bruchtheil und der Inductionsfluss erfolgt daher fast genau so, als wenn der Luftraum für ihn undurchdringlich wäre. Damit haben wir aber im Wesentlichen denselben Fall, wie den der Strömung der Flüssigkeit um eine Kugel im vorhergehenden Paragraphen und wir können daher das, was wir dort fanden, ohne Weiteres benutzen. Es zeigt sich also z. B., dass $\mathfrak{B}$ seinen grössten Werth in dem durch die Kugel gestörten Felde am Aequator der Kugel annimmt und dass $\mathfrak{B}$ dort $1^1/_2$mal so gross ist, als im ungestörten Felde.

Man kann übrigens durch eine kleine Aenderung der früheren Lösung sofort auch dem Umstande Rechnung tragen, dass ein kleiner Theil des Inductionsflusses doch noch durch den kugelförmigen Hohlraum geht. Dazu ist nur nöthig, dem früheren Geschwindigkeitspotentiale

$$\Phi = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right)$$

noch ein Glied bz beizufügen, womit es übergeht in

$$\Phi' = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right) + bz,$$

zunächst gültig für den Aussenraum.

Von den Geschwindigkeitscomponenten wird damit nur v_3 um den constanten Summanden b vermehrt. Die Erfüllung der Continuitätsbedingung wird dadurch nicht gestört; im ungestörten Felde ist die Stromgeschwindigkeit jetzt gleich $a + b$, im Luftraume der Kugel ist sie überall gleich b zu setzen und parallel zur Z-Axe. Wie gross man b zu wählen hat, wenn die magnetische Permeabilität des Eisens $= \mu$ und die der Luft $= 1$ gesetzt wird, geht ebenfalls aus einer einfachen Betrachtung hervor. Am Aequator der Kugel muss sich nämlich der Inductionsfluss im Eisenraume zum Inductionsflusse im angrenzenden Luftraume verhalten wie $\mu : 1$. Ausserhalb der Kugel wird aber, wie aus den Untersuchungen des vorausgehenden Paragraphen folgt, die Geschwindigkeit am Aequator jetzt gleich $\frac{3a}{2} + b$; man hat daher

$$\frac{3a}{2} + b = \mu b \quad \text{und hieraus} \quad b = \frac{3a}{2(\mu - 1)} = \frac{3(a+b)}{2\mu + 1}.$$

Eng verwandt hiermit ist auch die folgende Aufgabe. Eine Kugel aus weichem Eisen von der Permeabilität μ ist in einem von Luft erfüllten homogenen magnetischen Felde (etwa im magnetischen Felde der Erde) aufgestellt. Man soll ermitteln, wie sich der Inductionsfluss in der Kugel zu dem ungestörten Felde im Luftraume verhält. Wir bilden zu diesem Zwecke das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi'' = bz - az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right),$$

das bei passender Wahl von a und b allen Anforderungen der Aufgabe entspricht. Im ungestörten Felde ($r = \infty$) wird der Vektor des Feldes gleich $b - a$; in der Eisenkugel ist er gleich b und am Aequator der Kugel wird er im Luftraume gleich $b - \frac{3a}{2}$. Dieselbe Ueberlegung wie vorher liefert die Bedingung

$$b = \mu\left(b - \frac{3a}{2}\right) \quad \text{oder} \quad b = \frac{3\mu(b-a)}{\mu + 2}.$$

Setzt man die Permeabilität des Eisens gleich unendlich, so erhält man

$$b = 3(b - a),$$

d. h. der Inductionsfluss wird in diesem Falle in der Eisenkugel dreimal so gross als im ungestörten Felde des Luftraums — ein sehr bekanntes und oft benutztes Resultat der Theorie des Magnetismus. Natürlich lassen sich in ähnlicher Weise auch andere Lösungen hydrodynamischer Probleme für die Lehre vom Magnetismus verwerthen, namentlich jene, auf die schon am Schlusse des vorigen Paragraphen hingewiesen wurde.

§ 43. Die zweidimensionalen Probleme.

Eine erhebliche Vereinfachung wird herbeigeführt, wenn man voraussetzen kann, dass die Strömung der Flüssigkeit eine ebene ist, d. h. so, dass überhaupt keine Geschwindigkeits-

componenten senkrecht zu der betreffenden Ebene auftreten und dass auch die Geschwindigkeit in allen parallel dazu gezogenen Ebenen für gleich gelegene Punkte die gleiche Richtung und Grösse hat. Wählen wir die Bewegungsebene zur XY-Ebene, so soll demnach

$$v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 \tag{233}$$

sein. Die beiden letzten Forderungen bilden im Uebrigen eine nothwendige Folge der ersten, wenn die Bewegung wirbelfrei sein soll, denn dazu gehört ganz allgemein nach Gl. (217), dass

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}$$

ist. Man braucht indessen Wirbel nicht grade von vornherein auszuschliessen, um auf die durch die Gleichungen (233) gekennzeichnete ebene Bewegung zu kommen; dazu ist nur nöthig, dass die $\mathfrak{i}$- und die $\mathfrak{j}$-Componente von $\mathfrak{w}$ verschwinden, während eine senkrecht zur Bewegungsebene stehende Componente von $\mathfrak{w}$ immer noch möglich ist. Hier soll jedoch die ebene Bewegung überdies noch als wirbelfrei vorausgesetzt werden.

Wir haben dann ein Geschwindigkeitspotential Φ, das bei der stationären Bewegung nur noch von den unabhängigen Veränderlichen x und y abhängt. Die Continuitätsbedingung vereinfacht sich daher zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{234}$$

die eine erheblich einfachere Behandlung zulässt, als die allgemeinere Gl. (220). Als Lösung von Gl. (234) dient nämlich sowohl der reelle als der imaginäre Bestandtheil jeder beliebigen Function einer complexen Variabeln $x + yi$ oder auch $x - yi$. Von diesem Umstande ist schon im dritten Bande bei der Untersuchung des Torsionsproblems Gebrauch gemacht worden. Die dort aufgestellte Differentialgleichung (327) stimmt nämlich mit der hier gefundenen Gl. (234) vollständig überein und auch die damals (in Gl. (334), Bd. III) gegebene Lösung ist hier von Neuem zu benutzen. Die vollständige Lösung des Torsionsproblems hing davon ab, unter allen möglichen analy-

tischen Formen der Function Φ jene auszusuchen, die den speciellen Grenzbedingungen entspricht und vor derselben Aufgabe stehen wir auch hier. Dies zeigt von Neuem den engen Zusammenhang zwischen der Hydrodynamik und anderen physikalischen Theorieen.

Vor Allem hängt aber, wie man aus den vorhergehenden Bemerkungen bereits entnehmen kann, die Lehre von den ebenen Flüssigkeitsbewegungen aufs Engste mit der Theorie der Functionen complexer Grössen und hierdurch, wie ich sofort hinzufügen will, auch mit der Theorie der conformen oder winkeltreuen Abbildung zusammen. Da die sich hierauf beziehenden mathematischen Lehren eine weitgehende Ausbildung erfahren haben, vermag man Aufgaben über ebene Flüssigkeitsbewegungen verhältnissmässig leicht und sicher zu behandeln. Hier werde ich mich übrigens damit begnügen, nur einen ungefähren Ueberblick über diese Betrachtungen zu geben; die praktische Bedeutung derselben ist nämlich ziemlich gering, weil die Voraussetzungen, von denen sie ausgehen, nur selten hinreichend genau erfüllt sind.

Ausser dem Geschwindigkeitspotentiale treten bei der ebenen Flüssigkeitsbewegung noch zwei andere Functionen auf, die in dem allgemeineren Falle fehlen. Die eine davon ist die Stromfunction, die in der Folge mit Ψ bezeichnet werden möge. Man denke sich in der Bewegungsebene eine geschlossene Curve gezogen. Dann muss in den davon eingeschlossenen Raum nach der Continuitätsbedingung ebensoviel Flüssigkeit einströmen, als ausströmt. Ferner denke man sich einen Anfangspunkt O mit einem Punkte A durch irgend eine Linie verbunden. Dann strömt durch die Linie hindurch eine gewisse Flüssigkeitsmenge von der einen Seite nach der anderen Seite hinüber und nach dem, was vorher über die geschlossene Linie gesagt war, ist die Flüssigkeitsmenge unabhängig von der Form der Linie, die O mit A verbindet. Diese (auf die Zeiteinheit bezogene) Flüssigkeitsmenge hat für jeden Punkt A der Ebene einen Werth Ψ, wenn O ein für alle Mal gewählt wird und diese Grösse Ψ heisst die Stromfunction des Punktes A gegenüber dem Punkte O.

Natürlich ist Ψ ebenso wie das Geschwindigkeitspotential Φ eine Function der Coordinaten x und y. Wählt man an Stelle von O einen anderen Anfangspunkt O', so kann man nun von O' aus über O nach A eine Linie ziehen, um die Stromfunction Ψ' von A für den neuen Anfangspunkt zu ermitteln. Die durch die Linie $O'OA$ strömende Flüssigkeitsmenge setzt sich nun zusammen aus dem Theile, der zur Verbindungslinie $O'O$ gehört und aus dem Strome durch OA, der gleich Ψ war. Der erste Antheil ist für alle Punkte A der gleiche. Daraus folgt, dass sich Ψ' von Ψ nur um eine Constante unterscheidet. Wird demnach von der Stromfunction gesprochen, ohne dass genau angegeben wird, auf welchen Anfangspunkt sie sich beziehen soll, so ist sie nur bis auf eine willkürlich zu wählende Constante bestimmt. Auch in dieser Hinsicht verhält sich demnach die Stromfunction genau wie das Geschwindigkeitspotential Φ.

Verbindet man zwei benachbarte Punkte A und B mit einander, für die die Stromfunction gleich gross ist, so heisst dies, dass durch die Linie AB keine Flüssigkeit strömt, d. h. AB ist das Element einer Stromlinie und die Gleichungen $\Psi = \text{const}$ sind die Gleichungen der Stromlinien. Die Gleichung $\Phi = \text{const}$ stellt eine Linie gleichen Geschwindigkeitspotentials dar, und da die Strömung senkrecht zu den Flächen gleichen Potentials erfolgt, müssen die Gleichungen $\Psi = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ zwei sich überall rechtwinklig schneidende Linienschaaren darstellen. Hiermit ist auch die Vorschrift dafür gegeben, wie man die Stromlinien und die Stromfunction Ψ am einfachsten ermitteln kann, wenn das Geschwindigkeitspotential Φ bekannt ist.

Um auf die dritte Function zu kommen, die neben Φ und Ψ noch eine wesentliche Rolle spielt, muss ich zuvor noch etwas weiter ausholen. Bei der Lehre von den complexen Grössen (etwa $x + yi$) pflegt man sich den reellen Antheil x auf einer Abscissen- und den imaginären Antheil y senkrecht dazu auf einer Ordinatenaxe aufgetragen zu denken. Der Punkt mit den Coordinaten x und y dient als Bild für die Zahl

$x + yi$ und die ganze Ebene wird in diesem Zusammenhange als die Zahlenebene bezeichnet. Man kann auch sagen, dass jeder complexen Zahl ein Radiusvektor zugeordnet ist, nämlich jener, der in der Zahlenebene vom Punkte Null zum Punkte $x + yi$ gezogen werden kann. Hierdurch erlangt das Operiren mit complexen Grössen eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Rechnen mit Vektoren. In der That vermag man, so lange es sich nur um gerichtete Grössen handelt, die alle in einer Ebene liegen, durch Rechnen mit complexen Grössen ziemlich genau dasselbe zu erreichen, was sonst mit den Vektoren bezweckt wird. Im dreifach ausgedehnten Raume lässt die Analogie freilich vollständig im Stiche und die Versuche, eine höhere Art von complexen Zahlen einzuführen, die für den Raum dieselbe Bedeutung hätten, wie die gewöhnlichen complexen Zahlen für die Ebene, sind als gescheitert zu betrachten. Es hätte keinen Zweck, wenn ich hierauf weiter eingehen wollte. Dagegen möchte ich noch betonen, dass man gut thut, auch bei ebenen Problemen zwischen einem Vektor und einer complexen Grösse immer noch sorgfältig zu unterscheiden. Um dies zum Ausdrucke zu bringen, schreibe ich

$$\left.\begin{aligned} z &= x + yi \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y \end{aligned}\right\}. \tag{235}$$

In der ersten Zeile wird z als eine complexe Zahl definirt und i ist die imaginäre Einheit; in der zweiten Zeile wird der Vektor $\mathfrak{z}$ aus seinen beiden Componenten zusammengesetzt und $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ sind im Gegensatze zum vorigen Falle blosse Richtungsfaktoren, die mit der Wurzel aus der negativen Einheit durchaus nichts zu thun haben, sondern deren Quadrate die positive Einheit ergeben. In vielen Fällen kann jedoch, solange keine Componenten in der $\mathfrak{k}$-Richtung hinzutreten, die complexe Zahl z zur Darstellung des Vektors $\mathfrak{z}$ verwendet werden. Natürlich hat der Buchstabe z oder $\mathfrak{z}$ hier nichts mit einer Z-Axe zu thun, die zur XY-Ebene senkrecht wäre. In diesem Paragraphen kommt eine Z-Axe überhaupt nicht in

Betracht und der Buchstabe z konnte daher in dem geänderten Sinne gebraucht werden. Ein solcher Gebrauch schien nämlich erwünscht, weil er in der Lehre von den complexen Grössen allgemein eingeführt ist.

Von der complexen Zahl z sei irgend eine Function w gegeben, die selbst wieder in den reellen Antheil Φ und den imaginären Antheil Ψ zerlegt sein möge, also

$$w = F(z) = \Phi + i\Psi. \tag{236}$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell nach x und beachtet dabei die erste der Gleichungen (235), so erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Der Differentialquotient der Function F nach der Variabelen z ist mit $F'(z)$ bezeichnet. Durch Differentiation nach y erhält man ebenso

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = iF'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

und hieraus

$$F'(z) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke von $F'(z)$, zu denen man hierbei gelangt ist, mit einander, so erhält man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{237}$$

Eliminirt man ferner aus den letzten beiden Gleichungen zunächst Ψ, indem man die erste nach x, die zweite nach y differentiirt und dann addirt, so erhält man die erste der beiden folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{238}$$

Die andere ergiebt sich ebenso durch Elimination von Φ.

Hieraus folgt zunächst, dass der reelle Antheil Φ (ebenso wie der imaginäre Antheil Ψ) der Function w in der That

die Differentialgleichung (234) erfüllt, der das Geschwindigkeitspotential genügen muss. Welcher Art auch die Function w sein möge, jedenfalls wird daher ihr reeller Antheil als das Geschwindigkeitspotential irgend einer ebenen Flüssigkeitsbewegung angesehen werden können und hiermit erklärt es sich auch, wesshalb ich von vornherein für den reellen Antheil von w den Buchstaben Φ gebraucht habe. Warum der imaginäre Antheil mit Ψ bezeichnet wurde, wird sich ebenfalls sofort ergeben.

Die zum Potentiale Φ gehörige Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ lässt sich in der Form

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

darstellen. Wir wollen sehen, um wieviel sich der imaginäre Antheil von w ändert, wenn man um ein Wegelement $\mathfrak{v}\,dt$ weitergeht. Die Componenten dieses Wegelements in den Axenrichtungen seien mit dx und dy bezeichnet, dann ist

$$dx = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dt; \qquad dy = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dt$$

und die zugehörige Aenderung von Ψ ist

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,dy = dt\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (237)

$$d\Psi = 0.$$

Wenn man längs einer Stromlinie weiter geht, bleibt demnach Ψ constant, d. h. der aus diesem Grunde vorher schon mit dem Buchstaben Ψ bezeichnete imaginäre Antheil von w stellt in der That die zum Geschwindigkeitspotentiale Φ gehörige Stromfunction dar.

Versucht man ferner den Differentialquotienten von w nach z ebenfalls als eine gerichtete Grösse zu deuten, so gelangt man auf einen Vektor, der sich nicht in unmittelbare Beziehung zur Flüssigkeitsströmung bringen lässt. Drückt man die Differentialquotienten von Ψ mit Hülfe der Gl. (237) in denen von Φ aus, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

und der zugehörige Vektor ist daher

$$\mathfrak{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mathfrak{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Dieser ist zwar von gleicher Grösse mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Strömung, aber nicht mit ihr gleich gerichtet; er liegt vielmehr (da sich das Vorzeichen der $\mathfrak{j}$-Componente umgekehrt hat) symmetrisch zu $\mathfrak{v}$ in Bezug auf die X-Richtung. Direkt verwendbar ist daher in dem hydrodynamischen Probleme der Differentialquotient $F'(z)$ nicht.

Man kann diesem Uebelstande aber leicht abhelfen. Wenn w eine Function von z ist, so kann auch umgekehrt z als eine Function von w angesehen werden. Man kann daher auch einen Differentialquotienten von z nach w bilden. Dieser ist übrigens das Reciproke von $F'(z)$ und man hat daher

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{F'(z)} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}. \tag{239}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist reell und gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Der Zähler ist eine complexe Zahl, die, als Vektor gedeutet, $\mathfrak{v}$ darstellt. Hierauf beruht die Wichtigkeit des Ausdrucks $\frac{dz}{dw}$ für die Hydrodynamik. Man pflegt desshalb die Grösse mit einem besonderen Buchstaben und zwar mit ζ zu bezeichnen, also

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\mathfrak{v}^2}$$

zu setzen. Dabei ist zu beachten, dass ζ, als Vektor gedeutet, mit $\mathfrak{v}$ gleich gerichtet und dem Werthe von $\mathfrak{v}$ umgekehrt proportional ist. Die complexe Grösse ζ ist es, die neben Φ und Ψ und der daraus zusammengesetzten Function w eine wichtige Rolle in der Lehre von den ebenen Flüssigkeitsströmungen spielt.

Bisher betrachtete ich w immer nur als eine Function von $x + yi$. Man überzeugt sich aber leicht, dass die vorausgehenden Betrachtungen auch dann noch gültig bleiben, wenn $x - yi$ an Stelle von $x + yi$ tritt. Es wird nicht nöthig sein, die Betrachtung für diesen Fall von Neuem zu wiederholen.

Man kann nun eine Reihe von Beispielen für ebene Flüssigkeitsströmungen erhalten, wenn man für w eine beliebige Function von z setzt oder umgekehrt. Ich behandle hier zunächst ein Beispiel, das von besonderem Interesse ist. Man setze

$$w = a\left(z + \frac{\varrho^2}{z}\right), \tag{240}$$

wobei unter a und ϱ reelle Constanten zu verstehen sind. Man hat dann

$$\frac{dw}{dz} = a\left(1 - \frac{\varrho^2}{z^2}\right) \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{1}{a} \cdot \frac{z^2}{z^2 - \varrho^2}\,.$$

Bezeichnet man ferner den Modul der complexen Variabeln z mit r, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so erhält man für w auch

$$w = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2}{x + yi}\right) = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2(x - yi)}{r^2}\right).$$

Durch Zerlegen von w in den reellen und den imaginären Bestandtheil finden wir daher für das Geschwindigkeitspotential und für die Stromfunction der durch w gekennzeichneten Flüssigkeitsbewegung die Ausdrücke

$$\Phi = ax\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right)$$

$$\Psi = ay\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Für $z = 0$ würde $\zeta = 0$ und die Geschwindigkeit daher unendlich gross. In der Nachbarschaft des Coordinatenursprungs lässt sich daher die durch Gl. (240) gegebene Lösung jedenfalls nicht benutzen. Schlagen wir dagegen einen Kreis mit dem Halbmesser ϱ um den Ursprung, so kann die durch Gl. (240) angegebene Flüssigkeitsströmung ausserhalb dieses Kreises bei geeigneten Grenzbedingungen erfolgen. Für $z = \infty$ wird $\zeta = \frac{1}{a}$, also reell, d. h. in grosser Entfernung vom Coor-

dinatenursprunge erfolgt die Strömung parallel zur X-Axe mit der constanten Geschwindigkeit a.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Geschwindigkeit in den Punkten des Umfangs des Kreises vom Halbmesser ϱ gerichtet ist. Zu diesem Zwecke denke ich mir einen Radius dieses Kreises gezogen und bezeichne den Winkel, den er mit der positiven X-Axe bildet, mit ϑ. Für den auf dem Kreisumfange liegenden Endpunkt dieses Radius ist

$$z = \varrho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

und wenn man dies einsetzt, geht ζ über in

$$\zeta = \frac{1}{a} \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2}{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 - 1} = \frac{1}{a} \frac{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2}{2\sin\vartheta\,(i\cos\vartheta - \sin\vartheta)}$$

oder nach zwei weiteren einfachen Umformungen

$$\zeta = -\frac{1}{a} \frac{(\sin\vartheta - i\cos\vartheta)^2}{2\sin\vartheta\,(i\cos\vartheta - \sin\vartheta)} = \frac{1}{2a\sin\vartheta}(\sin\vartheta - i\cos\vartheta).$$

Hiermit ist auch die Zerlegung von ζ in den reellen und den imaginären Antheil bereits ausgeführt. Die X-Componente von ζ ist überall positiv, die Y-Componente hat dagegen das Vorzeichen von $-\operatorname{cotg}\vartheta$, d. h. sie ist im ersten und dritten Quadranten negativ und im zweiten und vierten Quadranten positiv. Dasselbe gilt auch von den Vorzeichen der Componenten von $\mathfrak{v}$. Das Verhältniss beider Componenten, von dem die Richtung von $\mathfrak{v}$ abhängt, ist gleich $1 : -\operatorname{cotg}\vartheta$. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ überall senkrecht zum Radius steht oder in die Richtung des Kreisumfangs fällt. Dies folgt auch noch einfacher aus dem Ausdrucke von Ψ. Für $r = \varrho$ geht nämlich der Werth von Ψ über in $\Psi = 0$, d. h. der Kreisumfang bildet eine Stromlinie, nämlich jene specielle Stromlinie, die dem Werthe Null der Stromfunction entspricht. Die ausserhalb des Kreises auf jener Seite der X-Axe, die zu positiven Werthen von y gehört, verlaufenden Stromlinien sind durch positive Werthe, die innerhalb liegenden durch negative Werthe von Ψ gekennzeichnet.

Längs einer Stromlinie kann man stets auch eine feste Wand anbringen und die Flüssigkeit auf der einen Seite dieser

Wand beseitigen, ohne die Bewegung auf der anderen Seite der Wand dadurch zu stören. Wir denken uns die Flüssigkeit nur ausserhalb des Kreises vom Halbmesser ϱ, während dieser Kreis selbst für die Flüssigkeit undurchdringlich sein soll. Dann kann man die betrachtete Lösung immer noch benutzen. Dem Kreise entspricht ein in die Flüssigkeit versenkter cylindrischer Körper, um den die Strömung herumgehen muss. Man denke sich etwa einen cylindrischen Pfahl, der in ein Flussbett in aufrechter Stellung eingerammt ist und der über den Wasserspiegel hinausragt. Das Wasser muss um den Pfahl herumfliessen. Nimmt man dabei näherungsweise an, dass die Strömung eben und wirbelfrei sei, so hat man den durch unsere Lösung dargestellten Fall. Den kleinsten Absolutwerth $\frac{1}{2a}$ nimmt ζ am Umfange an für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. an jenen Stellen des Kreisumfangs, die auf die Y-Axe fallen. Die Geschwindigkeit wird also dort am grössten, nämlich gleich $2a$, d. h. doppelt so gross als die Geschwindigkeit in der ungestörten Strömung. Eine Anzahl Stromlinien kann man auf Grund des für Ψ aufgestellten Ausdruckes leicht verzeichnen; man erhält so die Abbildung 61 (s. S. 410), die ich dem Buche von Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895 entnehme.

Professor Hele-Shaw in Liverpool hat bei einer Reihe schöner Versuche, über die er in den letzten Jahrgängen des Engineering berichtete,*) auch eine Prüfung dieser Theorie vorgenommen. Zwei parallele Glasplatten schlossen eine dünne Wasserschicht zwischen sich ein und das Hinderniss, um das die Strömung herumfliessen musste, war zwischen die Glasplatten gebracht. Auf der einen Rechteckseite erfolgte der Wasserzufluss, auf der gegenüberliegenden der Wasserabfluss und die beiden anderen waren verschlossen. Auf der Zuflussseite wurde durch feine Oeffnungen, die in gleichen Abständen vertheilt waren, eine Farblösung in den Flüssigkeitsstrom eingeführt. Dadurch zeichneten sich die zugehörigen Stromlinien

*) Einen Auszug davon findet man in der Zeitschrift d. Ver. D. Ing. 1898, S. 1387.

deutlich ab. Das Bild, das man erhielt, glich dem aus der Theorie in Abb. 61 erhaltenen sehr nahe, so lange die Geschwindigkeit der Strömung nicht zu gross war. Je dünner die Wasserschicht ist, um so grösser darf die Geschwindigkeit gewählt werden, ohne dass die Bewegung diesen Charakter verliert. Bei grösseren Geschwindigkeiten (bezw. grösseren Dicken der Wasserschicht) treten aber ganz

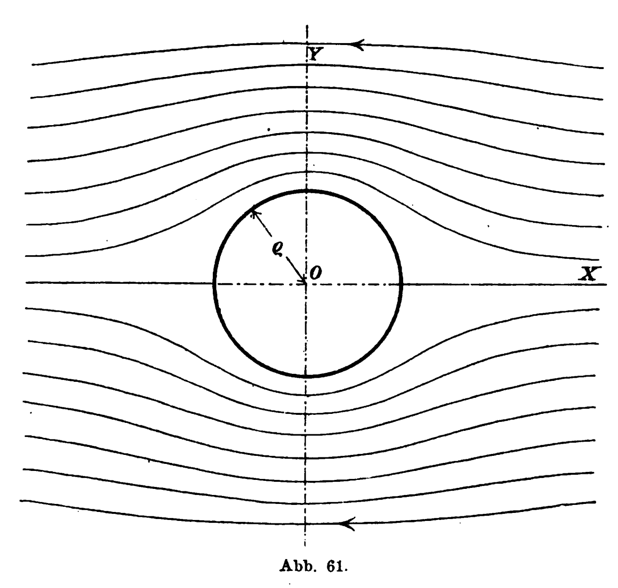


Abb. 61.

andere Bewegungen auf, die auf Wirbelbildungen zurückzuführen sind. Ueber diesen zweiten Bewegungsvorgang vermag die heutige Theorie nichts Näheres auszusagen.

Natürlich würde auch der Pfahl ebensowenig wie die in § 41 behandelte Kugel einen resultirenden Flüssigkeitsdruck aufzunehmen haben, wenn die Wasserbewegung in der That vollkommen reibungs- und wirbelfrei erfolgte. — Ausserdem kann man auch die hier gefundenen Ergebnisse in derselben Weise für die Theorie des Magnetismus nutzbar machen, wie die früheren Ergebnisse in § 42.

§ 44. Die Flüssigkeitsstrahlen.

Die oft sehr mangelhafte Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie der wirbel- und reibungsfreien Flüssigkeitsströmungen mit den Erscheinungen der Wirklichkeit hat Helmholtz zur Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen geführt, die den Beobachtungen in vielen Fällen weit besser gerecht wird. Helmholtz wies z. B. darauf hin, dass die einem Schornsteine entströmende Rauchsäule bei ruhiger Luft oft auf grosse Strecken hin ganz geschlossen emporsteigt, so dass schon in geringer Entfernung davon die Luft fast in Ruhe bleibt, während bei wirbelfreier Bewegung der Rauch sich sofort nach dem Verlassen des Schornsteins nach allen Seiten hin ausbreiten müsste. Er bemerkte auch, dass man einen feinen Luftstrahl durch eine leuchtende Flamme hindurch blasen kann, so dass dadurch ein Loch aus der Flamme herausgeschnitten wird, ohne dass der übrige Theil der Flamme dadurch merklich in Mitleidenschaft gezogen würde.

Die Bewegung ist in solchen Fällen natürlich nicht mehr wirbelfrei. Man denke sich nämlich einen geschlossenen viereckigen Integrationsweg, von dem eine Seite ein Stück einer Strömungslinie des Strahls bildet, während die beiden anschliessenden Seiten rechtwinklig zu den Stromlinien nach aussen führen und dort durch eine in der ruhenden oder wenig bewegten Flüssigkeit gezogene vierte Seite mit einander verbunden werden. Das Linienintegral der Geschwindigkeit kann für diesen geschlossenen Integrationsweg nicht zu Null werden, denn die in die Stromlinie fallende Seite liefert zu dem Linienintegrale einen hohen Beitrag, die beiden anschliessenden Seiten tragen dazu überhaupt nichts bei und die vierte Stelle jedenfalls auch nur wenig.

Man schliesst sich nun dem wirklichen Verhalten jedenfalls näher an, wenn man im Strahle und ausserhalb des Strahles zwar immer noch von der Berücksichtigung der Wirbel absieht, die Strömung also dort wie eine wirbelfreie behandelt, an der Grenze

des Strahls aber eine Trennungsfläche annimmt, längs deren die Art der Bewegung sprungweise wechselt. Längs der Trennungsfläche ist die Bedingung für die wirbelfreie Bewegung nicht mehr erfüllt, sie bildet vielmehr den Sitz von Wirbeln und wird daher auch als eine Wirbelfläche bezeichnet.

Ein solcher durch die Wirbelfläche von der nahezu ruhenden Flüssigkeit getrennter Strahl kann sich, wie schon aus den erwähnten Beispielen hervorgeht, unter Umständen auf längere Strecken hin ziemlich rein erhalten. Mit der Zeit wird er freilich aufgelöst, da die starken Geschwindigkeitsunterschiede an benachbarten Stellen in der Nähe der Trennungsfläche in Wirklichkeit eine Flüssigkeitsreibung hervorbringen, durch die die Wirbel immer weiter ausgebreitet werden, womit die Bewegungsart geändert wird. Lässt man einen Wasserstrahl in den Luftraum übertreten, so sind die Reibungen an der Trennungsfläche zwischen Wasserstrahl und Luft übrigens unerheblich, so dass sie an der Bewegung nicht viel zu ändern vermögen. Freilich kommt in diesem Falle die Schwere hinzu, die eine Ablenkung des Strahls nach unten bewirkt. Es ist aber nützlich zu untersuchen, wie die Bewegung im Strahle erfolgen müsste, wenn die Schwere nicht einwirkte. Es kommt dies darauf hinaus, die schon im ersten Bande dieses Werkes besprochene Contraction eines aus einer Oeffnung in dünner Wand hervortretenden Wasserstrahls noch etwas näher zu besprechen, als es dort geschehen konnte. Dabei muss hier ferner noch angenommen werden, dass die Bewegung als eine ebene betrachtet werden kann, d. h. die Oeffnung soll ein langer Schlitz von überall gleicher Breite sein, so dass durch jeden Querschnitt des Schlitzes die Bewegung in derselben Weise erfolgt. Auf die Untersuchung der damit umschriebenen Aufgabe werde ich mich hier beschränken, wobei ich bemerke, dass man die Bedingungen auch noch ein wenig variiren kann, ohne die Lösung dadurch unmöglich zu machen oder sie auch nur erheblich zu erschweren. Vorausschicken möchte ich indessen noch, dass die hier zu gebende Lösung immer noch keineswegs als physikalisch streng richtig be-

trachtet werden darf, da die Flüssigkeit auch bei ihr als reibungsfrei und die Flüssigkeitsbewegung im Innern des Strahls und im Innern des Gefässes, aus dem der Strahl austritt, als wirbelfrei angesehen wird. Sie giebt aber jedenfalls einen besseren Aufschluss über die ganze Erscheinung, als die summarische Erörterung, mit der wir uns im ersten Bande begnügen mussten.

Die Lösung hängt auch hier davon ab, eine Function w der complexen Variabeln z zu ermitteln, deren reeller Theil das Geschwindigkeitspotential Φ und deren imaginärer Theil die Stromfunction Ψ im Gefässe und im freien Strahle angiebt. Die Gestalt dieser Function w hängt von den Grenzbedingungen des Problems ab. Die Wände des Gefässes müssen mit Stromlinien zusammenfallen. Wenn wir uns das Gefäss jenseits der Wand, um die Aufgabe zu vereinfachen, sehr ausgedehnt im Vergleiche zur Querseite des Ausflussschlitzes denken, muss die Geschwindigkeit im Gefässe in grösseren Abständen von der Ausflussöffnung sehr klein und der Flüssigkeitsdruck daher dort überall constant sein. Für die Grenze des freien Strahles kommt dazu noch eine andere Bedingung. Der Druck, den die angrenzende Luft (oder allgemeiner die angrenzende ruhende Flüssigkeit) auf die Oberfläche des Strahls ausübt, ist nämlich überall von der gleichen Grösse. Mit dem Drucke hängt aber die Geschwindigkeit nach Gl. (225) zusammen und da hier das Potential V der äusseren Kräfte wegfällt, muss dem constanten Drucke auch ein constanter Absolutwerth der Geschwindigeit entsprechen. Analytisch gesprochen, muss daher längs der „Trennungsfläche“, d. h. an der Grenze des Strahls der Differentialquotient von w oder auch die complexe Grösse ζ einen constanten Modul haben. Da diese Bedingungen genügen, um das Problem physikalisch zu kennzeichnen, schliessen wir, dass es nur eine einzige Lösung haben kann. Wenn man also eine Lösung angeben kann, die allen genannten Bedingungen entspricht, haben wir damit auch die in Wirklichkeit zu erwartende Flüssigkeitsbewegung gefunden.

Man setze

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}, \tag{241}$$

woraus durch eine Integration, die sich leicht ausführen lässt, auch z als Function von w gefunden werden kann. Ein Glied des Ausdrucks, zu dem man hierbei gelangt, enthält aber einen arc tg, also eine periodische Function und daraus erwachsen für die weitere Behandlung gewisse Schwierigkeiten oder wenigstens Umständlichkeiten, die man besser umgeht, indem man die weitere Behandlung unmittelbar an Gl. (241) anknüpft. Allerdings ist auch schon in Gl. (241) eine gewisse Vorsicht wegen des Wurzelvorzeichens geboten; daraus werden uns aber keine besonderen Schwierigkeiten entstehen.

Für unsere Zwecke genügt es vollständig, wenn wir nur wissen, dass durch Gl. (241) zugleich z als eine Function von w und hiermit auch w als eine Function von z gegeben ist und dass demnach der durch diese Gleichung gegebene Werth von ζ einer möglichen Flüssigkeitsbewegung entspricht. Wie diese Strömung im Einzelnen erfolgt, lässt sich schon aus Gl. (241) selbst ohne Weiteres erkennen, wenn man berücksichtigt, dass der zur complexen Variabeln ζ gehörige Vektor überall in die Richtung der Geschwindigkeit fällt und deren Grösse umgekehrt proportional ist. Es stört dabei nicht viel, dass der Ort in der Ebene, zu dem jedes ζ gehört, aus Gl. (241) nicht ohne Weiteres durch seine Coordinaten ausgedrückt werden kann. Man kann nämlich einen bestimmten Ort in der Flüssigkeitsbewegung auch noch auf eine andere Art als durch seine rechtwinkligen Coordinaten beschreiben. Dazu genügt erstens die Angabe der Stromlinie, zu der der betreffende Punkt gehört und zweitens die Angabe des zugehörigen Geschwindigkeitspotentials. Längs einer Stromlinie muss das Geschwindigkeitspotential seiner Definition nach in der Stromrichtung fortwährend wachsen und daher wird ein Punkt auf der Stromlinie durch die Angabe des zugehörigen Geschwindigkeitspotentials eindeutig bezeichnet. Jedem Werthe von w entspricht aber zugleich ein bestimmter Werth von Ψ

und von Φ und daher kann der Ort, auf den sich ζ bezieht, auch schon durch die Angabe der complexen Variabeln w ausreichend gekennzeichnet werden.

Zur besseren Orientirung schicke ich hier schon eine Zeichnung in Abb. 62 voraus, die der durch Gl. (241) beschriebenen Bewegung entspricht und die einer Figur aus Holzmüller, „Ingenieur-Mathematik, Bd. II, Das Potential" (Leipzig, 1898) nachgebildet ist. $ABCD$ ist die dünne Wand, in der sich der Schlitz BC befindet. Oberhalb der Wand

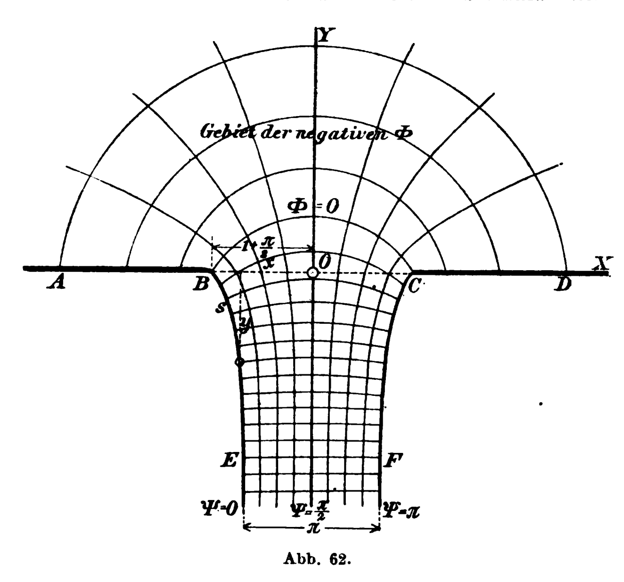


Abb. 62.

liegt das Gefäss, aus dem die Stromlinien durch die Oeffnung austreten und die die Stromlinien senkrecht schneidenden Curven sind die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials. Die Grenzen des freien Strahls sind die Linien BE und CF. Die Symmetrieaxe ist zur Y-Axe gewählt und die X-Axe fällt mit der Wand zusammen. — Ich habe freilich erst noch nachzuweisen, dass Gl. (241) zu einer solchen Bewegung führt.

Zunächst betrachte ich jene Stromlinie, für die $\Psi = 0$ ist. Hiermit wird $w = \Phi$ und Gl. (241) geht über in

$$\zeta = e^{-\Phi} + \sqrt{e^{-2\Phi} - 1}. \tag{242}$$

Solange Φ negativ ist, bleibt ζ reell. Die Strömung geht daher in der Richtung der X-Axe und die Stromlinie $\Psi = 0$ ist für die Werthe von $\Phi = -\infty$ bis $\Phi = 0$ eine in der Richtung der X-Axe gehende Grade. Hiernach entspricht der eine Theil der Wand AB in Abb. 62 dem ersten Stücke der Stromlinie $\Psi = 0$.

Wenn Φ positiv ist, wird die Wurzel in Gl. (242) imaginär. Man schreibt dann besser dafür

$$\zeta = e^{-\Phi} - i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}}. \tag{243}$$

Dass hierbei die Wurzel $\sqrt{-1}$ gleich $-i$ und nicht — was an und für sich am nächsten liegen würde — gleich $+i$ gesetzt ist, wird alsbald näher begründet werden.

Dieser Theil der Stromlinie $\Psi = 0$ entspricht der Grenze BE des freien Strahls. Dass die Linie von der Kante B der Ausflussöffnung, die zum Werthe $\Phi = 0$ gehört, ausgeht, ist bereits bekannt. Es muss aber noch bewiesen werden, dass ζ zugleich die Bedingung für die freie Grenze eines Strahls erfüllt. Wie wir vorher sahen, besteht diese Bedingung darin, dass ζ überall längs der Grenze denselben Modul (oder der zugehörige Vektor denselben Absolutwerth) hat. Das Quadrat des Moduls einer complexen Zahl ist aber gleich der Quadratsumme aus dem reellen und dem imaginären Antheile und für ζ giebt dies nach Gl. (243) den Werth 1. Auch diese Grenzbedingung wird demnach erfüllt.

Für die Stromlinie $\Psi = 0$ setzten wir das Wurzelvorzeichen in Gl. (242) als positiv fest. Das Wurzelvorzeichen in anderen Fällen ist hiernach so zu bestimmen, dass ein stetiger Uebergang von jeder Stelle zur benachbarten stattfindet. — Wir betrachten jetzt irgend eine andere Stromlinie, für die Ψ einen Werth zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ hat. Mit $w = \Phi + i\Psi$ erhält man

$$e^{-w} = e^{-\Phi} \cdot e^{-i\psi} = e^{-\Phi}(\cos \Psi - i \sin \Psi).$$

Setzt man dies in Gl. (241) ein, so erhält man

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos \Psi - i \sin \Psi) + \sqrt{e^{-2\Phi}(\cos 2\Psi - i \sin 2\Psi) - 1}.$$

Die Wurzel aus einer complexen Grösse kann ausgezogen werden mit Hülfe der Formel

$$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} \pm i\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Das Vorzeichen des reellen Gliedes kann hierbei zunächst beliebig genommen werden; dann muss aber, falls b positiv ist, das Vorzeichen des imaginären Gliedes ebenso gewählt werden, während bei negativem b beide Wurzelvorzeichen entgegengesetzt sein müssen. Nun war für $\Psi = 0$ und negatives Φ das positive Vorzeichen für das dann allein noch übrig bleibende reelle Glied gewählt. Für Werthe von Ψ, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, wird die zuvor mit b bezeichnete Grösse negativ. Man hat daher für ζ

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos\Psi - i\sin\Psi) + \sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} \\ - i\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}},$$

wobei a und a^2+b^2 zur Abkürzung für die Ausdrücke

$$a = e^{-2\Phi}\cos 2\Psi - 1$$

$$a^2+b^2 = e^{-4\Phi} - 2e^{-2\Phi}\cos 2\Psi + 1$$

gesetzt sind. Hiermit erklärt sich auch die Wahl, die in Gl. (243) für das Wurzelvorzeichen getroffen werden musste. — Wird ferner $\Psi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man hiernach

$$\zeta = -ie^{-\Phi} - i\sqrt{e^{-2\Phi}+1},$$

d. h. ζ ist rein imaginär und die Strömung erfolgt längs der Stromlinie $\Psi = \frac{\pi}{2}$ überall parallel zur Y-Axe. Es macht dabei auch keinen Unterschied, ob Φ negativ, Null oder positiv ist, d. h. diese Stromlinie ist ihrer ganzen Ausdehnung nach gradlinig. Sie fällt mit der Symmetrieaxe der Abb. 62 zusammen. Wenn Ψ noch grösser wird, als $\frac{\pi}{2}$, wird der Ausdruck

$$b = -e^{-2\Phi}\sin 2\Psi$$

positiv und beim Ausziehen der Wurzel aus der complexen Grösse $a + bi$ müssen nun beide Glieder gleiche Vorzeichen erhalten. An der Stromlinie $\Psi = \frac{\pi}{2}$ hatte aber das imaginäre Glied ein negatives Vorzeichen und dieses muss es auch weiterhin behalten. Das reelle Glied verschwand an der Uebergangsstelle und sein Vorzeichen jenseits derselben kann daher nur daraus geschlossen werden, dass es dem des imaginären Gliedes gleich gewählt werden muss. Daher ist für die zwischen $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \pi$ liegenden Stromlinien

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos\Psi - i\sin\Psi) - \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} - i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}$$

zu setzen. Für die Stromlinie $\Psi = \pi$ endlich geht dies über in

$$\zeta = -e^{-\Phi} - \sqrt{\frac{e^{-2\Phi} - 1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-2\Phi} - 1)^2}} - i\sqrt{\frac{1 - e^{-2\Phi}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-2\Phi} - 1)^2}}.$$

Die innere Quadratwurzel ist hier noch nicht ausgezogen; es geschah desshalb nicht, weil das Vorzeichen dieser Wurzel auf jeden Fall so zu wählen ist, dass ein positiver Werth herauskommt. Wir haben daher zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem Φ negativ oder positiv ist. Ist Φ negativ, also $e^{-2\Phi}$ grösser als Eins, so wird für den zugehörigen Theil der Stromlinie $\Psi = \pi$

$$\zeta = -e^{-\Phi} - \sqrt{e^{-2\Phi} - 1}, \tag{244}$$

d. h. ζ ist reell und die Stromlinie ist gradlinig und verläuft in der Richtung der X-Axe. Zugleich bemerkt man, dass dieser Werth von ζ das Negative des für die Stromlinie $\Psi = 0$ in Gl. (242) gefundenen ist. Das betreffende Stück der Stromlinie $\Psi = \pi$ entspricht daher dem anderen Theile CD der graden Wand des Gefässes und die Geschwindigkeiten sind in entsprechenden Punkten beider Wandtheile, wie auch schon aus

Gründen der Symmetrie zu erwarten war, gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

Wird dagegen Φ positiv, so geht der Ausdruck für ζ über in

$$\zeta = -e^{-\Phi} - i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}}. \tag{245}$$

Dieser Theil der Stromlinie $\Psi = \pi$ entspricht der zweiten freien Grenzlinie CF des Strahls. Der imaginäre Antheil stimmt, wie ebenfalls aus Symmetriegründen zu erwarten war, mit dem von ζ in Gl. (243) für die erste Grenzlinie überein, und der reelle Antheil hat entgegengesetztes Vorzeichen wie dort. Dass der Modul von ζ überall längs der Grenzlinie den constanten Werth 1 und daher auch die Geschwindigkeit überall den Absolutwerth 1 hat, erkennt man auf dieselbe Weise wie vorher im Anschlusse an Gl. (243).

Es bleibt nur noch übrig, die Flüssigkeitsbewegung in grösseren Entfernungen von der Ausflussöffnung zu betrachten. Im Innern des Gefässes, also für negative Werthe von Φ, kann man in grosser Entfernung von der Oeffnung $e^{-\Phi} = \infty$ setzen. Auch e^{-w} ist dann eine complexe Zahl von unendlich grossem Modul und aus Gl. (241) folgt, dass dann auch ζ complex unendlich gross ist. Die Geschwindigkeit ist aber dem Modul von ζ umgekehrt proportional und sie erlangt daher in grosser Entfernung von der Oeffnung einen unendlich kleinen Absolutwerth, wie es unseren Grenzbedingungen entspricht. — Für positive Werthe von Φ, die zu dem freien Strahle gehören, kann man in grösserer Entfernung von der Oeffnung $e^{-2\Phi} = 0$ setzen und e^{-w} verschwindet damit ebenfalls. Es bleibt daher

$$\zeta = \sqrt{-1} = -i,$$

wobei auch hier zur Begründung für das Wurzelvorzeichen auf die vorhergegangene Untersuchung über $\sqrt{a + bi}$ zu verweisen ist. In grösserer Entfernung von der Oeffnung erfolgt daher die Strömung in allen Stromlinien mit der Geschwindigkeit 1 (entgegen der positiven Y-Axe) und die Stromlinien werden dort zu einander parallel.

Der Nachweis, dass die durch Gl. (241) gegebene Lösung allen Grenzbedingungen unseres Problems entspricht, ist nun vollständig erbracht. Wir können jetzt noch dazu übergehen, die Form der Grenzlinie, also etwa die Gestalt der Stromlinie $\Psi = 0$ vom Punkte $\Phi = 0$ an bis zu $\Phi = +\infty$ festzustellen und hiermit auch die Contraction des Strahls zu berechnen. Die Coordinaten eines Punktes dieser Stromlinie seien x und y und der Bogen vom Punkte $\Phi = 0$, also von der Kante der Ausflussöffnung an bis zum Punkte xy sei mit s bezeichnet. Da die Geschwindigkeit längs der Grenzlinie den constanten Werth Eins hat, folgt

$$\frac{d\Phi}{ds} = 1 \quad \text{oder} \quad \Phi = s \quad \text{und auch} \quad w = s.$$

Aus Gl. (241) bezw. Gl. (243) wird daher hier

$$\zeta = \frac{dz}{ds} = e^{-s} - i\sqrt{1 - e^{-2s}}.$$

Wenn wir hier $z = x + yi$ setzen und die reellen und imaginären Theile trennen, zerfällt diese Gleichung in die beiden

$$\frac{dx}{ds} = e^{-s}; \quad \frac{dy}{ds} = -\sqrt{1 - e^{-2s}}, \tag{246}$$

die sich leicht integriren lassen. Aus der ersten erhalten wir

$$x = C - e^{-s}.$$

Die Bedeutung der Integrationsconstanten C folgt daraus, dass für $s = \infty$ die Abscisse x der Asymptote an die Grenzlinie gleich C wird. Für $s = 0$ ist dagegen $x = C - 1$, d. h, die Asymptote geht um die Strecke Eins an der Kante der Ausflussöffnung vorüber. Setzt man

$$e^{-s} = C - x$$

in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhält man für die Grenzlinie die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{1}{C - x}\right)^2 - 1}, \tag{247}$$

die ebenfalls leicht integrirt werden kann. Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C beachte man schliesslich, dass nach den Gl. (237)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ist. In grösserer Entfernung von der Ausflussöffnung, wo die Stromlinien schon als parallel zur Y-Axe betrachtet werden können, ist überall

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1$$

nämlich gleich der dort bestehenden Geschwindigkeit und damit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 \quad \text{oder} \quad \Psi = \Psi_0 + x,$$

wenn mit Ψ_0 der Werth von Ψ auf der Y-Axe bezeichnet wird. Dieser ist aber, wie wir wissen, gleich $\frac{\pi}{2}$ und für $x = C$ wird $\Psi = 0$. Hieraus folgt

$$C = -\frac{\pi}{2}.$$

Die ganze Breite des Strahls nach vollständiger Contraction ist daher gleich π und die Breite der Ausflussöffnung gleich $2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + \pi$. Der Contractionscoefficient, d. h das Verhältniss zwischen dem contrahirten Querschnitte und dem Querschnitte der Ausflussöffnung wird daher gleich

$$\frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}61 \cdots$$

Die Grössen ζ, w u. s. f. treten in den vorhergehenden Rechnungen überall nur als absolute Zahlen auf, ohne Rücksicht auf die Dimensionen, die ihnen ihrer physikalischen Bedeutung nach zukämen. Man könnte dem zwar leicht abhelfen, indem man an Stelle von w überall ein Verhältniss $\frac{w}{w_0}$ setzte, wobei w_0 die constante Einheit wäre, in der die w auszumessen sind und ähnlich bei den übrigen Grössen. Es ist aber einfacher, die Gleichungen so stehen zu lassen, wie sie lauten und die Fundamentaleinheiten nachträglich passend zu wählen, so dass die Zahlen in den Formeln das richtige Maass für die Grössen bilden, denen sie entsprechen. Zunächst muss die

Einheit der Länge so gewählt werden, dass die Breite der Oeffnung $\pi + 2$ Längeneinheiten enthält. Zugleich muss ferner die Einheit der Zeit so bestimmt werden, dass im Strahle nach erfolgter Contraction während dieser Zeit die Längeneinheit zurückgelegt wird. Dann sind die vorhergehenden Formeln ohne Weiteres auf jeden gegebenen Fall anwendbar; der Contractionscoefficient, auf dessen Ableitung es besonders ankam, ist übrigens von diesen besonderen Festsetzungen unabhängig.

Schliesslich sei noch einmal hervorgehoben, dass die Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen auch solche Fälle umfasst, in denen der austretende Strahl in eine ruhende Flüssigkeit der gleichen Art eindringt, wie etwa ein Luftstrahl in den Luftraum oder wie ein unter Wasser ausmündender Wasserstrahl. Freilich liegt in diesen Fällen die Möglichkeit zur Auflösung des Strahls durch die Ausbreitung der Wirbel von der Trennungsfläche her in Folge der Reibungen viel näher und die Entwickelungen werden daher weniger zuverlässig.

Eine beachtenswerthe Anwendung hat die Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen namentlich zur Berechnung des Widerstandes gefunden, den eine Flüssigkeit einem relativ zu ihr bewegten Körper entgegensetzt. Wir sahen früher, dass eine vollkommene Flüssigkeit bei wirbelfreier Bewegung überhaupt keinen Widerstand leistet. Dagegen kann man einen solchen Widerstand herausrechnen, wenn man die Bewegung zwar sonst immer noch als wirbel- und reibungsfrei behandelt, dagegen eine Trennungsfläche annimmt, die sich in der Strömung hinter dem Hindernisse bildet. Der Grund dafür, dass dann ein resultirender Wasserdruck herauskommen muss, ist leicht einzusehen. Wenn das Hinderniss, das sich der Strömung entgegenstellt, etwa ein ebenes Brett ist, grenzt das ruhende Wasser auf der Rückseite des Brettes in der Wirbelfläche an die schnell strömende Flüssigkeit an, die sich um das Hinderniss herumgebogen hatte. An der Grenzfläche herrscht zu beiden Seiten derselbe Flüssigkeitsdruck; das ruhende Wasser auf der Rückseite des Bretts steht daher unter demselben Drucke wie das schnell strömende im Strahle. Andererseits soll die Bewegung

jenseits der Trennungsfläche im Strahle und vor dem Hindernisse überall wirbelfrei sein. Innerhalb dieses Gebiets gilt daher überall die in § 40 abgeleitete Beziehung, dass die Summe aus kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck constant ist. Auf der Vorderseite des Bretts, in dessen nächster Nachbarschaft, sind die Geschwindigkeiten jedenfalls gering und daher ist der Druck dort viel grösser, als in den Grenzlinien des Strahls oder also auch als auf der Rückseite des Bretts. Der Druckunterschied zwischen Vorderseite und Rückseite sucht das Brett in der Richtung der Strömung mit fortzureissen. — Man sieht hier deutlich, wie wesentlich die Trennungsfläche ist. In dieser springt die Geschwindigkeit von einem endlichen Werthe plötzlich auf Null, ohne dass damit eine Druckabnahme verbunden wäre. Nur durch die Wirbelfläche wird es möglich, dass zu beiden Seiten des Bretts zur Geschwindigkeit Null ganz verschiedene Drücke gehören.

Die Ausführung der Rechnung gleicht vollständig der vorhergehenden. Lord Rayleigh hat auf diesem Wege die schon im ersten Bande § 61 erwähnte Formel für den Winddruck beim schiefen Stosse auf eine ebene Fläche abgeleitet. Die theoretischen Erwägungen sind bei diesen Untersuchungen freilich nicht ganz einwandfrei, da sie keine Rechenschaft darüber geben, was schliesslich in grösserer Entfernung nach dem Passiren des Hindernisses geschieht, oder vielmehr, weil das, was die Formeln hierüber aussagen, im offenbaren Widerspruche mit dem wirklichen Verhalten steht. Ich gehe desshalb auch nicht weiter darauf ein. Immerhin wird aber durch die Berücksichtigung der Trennungsfläche schon der erste und wichtigste Schritt gemacht, um zu einer den Thatsachen besser gerecht werdenden Theorie zu gelangen; mit Rücksicht darauf kann es auch einstweilen zugelassen werden, dass die näheren Annahmen, die sich auf die Trennungsfläche selbst beziehen, freilich noch durchaus nicht zutreffend sind. Jedenfalls hat bereits jener erste Schritt eine Winddruckformel abzuleiten gestattet, die mit der Wirklichkeit schon recht gut

übereinzustimmen scheint. — Auch der Werth für den Contractionscoefficienten, den die vorher durchgeführte Rechnung lieferte, stimmt mit den Beobachtungen nicht schlecht überein. Die Helmholtz'sche Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen ist daher als ein beachtenswerther Fortschritt der Hydrodynamik zu betrachten, wenn sie auch selbst in Hinsicht auf die physikalische Genauigkeit noch viel zu wünschen übrig lässt.

§ 45. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen.

Eine der Hauptursachen für die Abweichungen zwischen der Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeiten und den in Wirklichkeit stattfindenden Flüssigkeitsbewegungen besteht, wie schon aus den Untersuchungen des vorausgehenden Paragraphen folgt, in dem Auftreten von Wirbeln. Den physikalischen Grund für die Bildung der Wirbel erkennen wir (abgesehen von besonderen Fällen, auf die jetzt nicht weiter hingewiesen zu werden braucht) in der Flüssigkeitsreibung. Solange wir uns nicht dazu entschliessen, das einfache Bild der reibungsfreien Flüssigkeit aufzugeben, vermögen wir daher über das Entstehen der Wirbel keine hinreichende Rechenschaft zu geben. Man kann sich dagegen die Aufgabe stellen, den weiteren Verlauf der Flüssigkeitsbewegung, nachdem einmal auf irgend eine Art Wirbel in ihr entstanden sind, unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die Flüssigkeit weiterhin als reibungsfrei angesehen werden könne. Jedenfalls wird damit ein wichtiger weiterer Schritt zur Erforschung des wahren Verhaltens der Flüssigkeiten gethan, ohne dass man dabei sofort genöthigt wäre, die für die theoretische Behandlung so wesentliche Vereinfachung zu opfern, die in der Vernachlässigung der Reibungen liegt.

Ich greife hier auf die Euler'schen Gl. (213) und (206) und auf die Definitionsgleichung (217) für den Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ zurück, die ich der Uebersicht wegen hier nochmals zusammenstelle:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad [(206)]$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial x}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial y}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial}{\partial z}(V+p)
\end{aligned}\right\}\quad [(213)]$$

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \quad [(217)]$$

Im Allgemeinen verschwindet der Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ jetzt nirgends. In einem gegebenen Augenblicke möge innerhalb der Flüssigkeit eine Linie gezogen werden, die überall der Richtung von $\mathfrak{w}$ folgt. Eine solche Linie soll als eine Wirbellinie bezeichnet werden. Denkt man sich ferner an irgend einer Stelle einer Wirbellinie ein Flächenelement dF senkrecht zur Wirbellinie gelegt und durch alle Punkte des Umfangs von dF Wirbellinien gezogen, so schliessen diese einen Raum ein, von dem dF ein Querschnitt ist und den man als einen Wirbelfaden bezeichnet.

Um ein anschauliches Bild von der augenblicklichen Vertheilung der Wirbel zu erhalten, kann man sich eine zweite Flüssigkeit vorstellen, die einen gleichgestalteten Raum einnimmt, wie die erste und deren Geschwindigkeit in gleichgelegenen Punkten mit dem Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ in der ersten Flüssigkeit der Richtung nach übereinstimmt und der Grösse nach damit proportional ist. Dies ist nämlich möglich, ohne die Continuitätsbedingung in der zweiten Flüssigkeit zu verletzen, denn aus Gl. (217) folgt für die Componenten von $\mathfrak{w}$

$$w_1=\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}, \qquad w_2=\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}, \qquad w_3=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y},$$

und wenn man diese Werthe in die Continuitätsgleichung einsetzt, erhält man in der That

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}=0. \qquad (248)$$

Die Wirbelfäden in der ersten Flüssigkeit entsprechen den

Stromfäden in der zweiten und sie sind diesen congruent. Daraus folgt auch, dass ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit nicht aufhören kann; er muss entweder an den Grenzflächen der Flüssigkeit enden oder er muss in sich zurückkehren, so dass die Leitlinie eine geschlossene Curve bildet. Im letzten Falle wird der Wirbelfaden auch als ein Wirbelring bezeichnet. Das Produkt aus einem Querschnitte des Wirbelfadens und der Grösse des Wirbelvektors $\mathfrak{w}$ an dieser Stelle muss längs des ganzen Wirbelfadens einen constanten Werth behalten, denn bei der zweiten Flüssigkeit, die zur Erläuterung für die Vertheilung der Wirbel diente, entspricht dem Produkte $w dF$ die durch den Querschnitt dF gehende Flüssigkeitsmenge und diese muss der Continuitätsbedingung wegen für alle Querschnitte des Stromfadens gleich gross sein. Das Produkt $w dF$ wird auch als die Stärke des Wirbelfadens bezeichnet und wir können daher auch sagen, dass ein Wirbelfaden in allen Theilen seiner Länge dieselbe Stärke hat.

Man betrachte ferner zwei materielle Punkte der Flüssigkeit, die zur Zeit t unendlich benachbart auf der gleichen Wirbellinie liegen mögen. Der Abstand zwischen beiden Punkten, also das zwischen ihnen liegende Element der Wirbellinie, möge die Projektionen $\xi \eta \zeta$ auf die Coordinatenaxen haben. Man fragt nach der Richtung und Grösse der Verbindungsstrecke beider materieller Punkte nach Ablauf eines Zeitelementes dt. Der Anfangspunkt der Strecke verschiebt sich während dt in den Richtungen der Coordinatenaxen um $v_1 dt$, $v_2 dt$, $v_3 dt$; der Endpunkt dagegen in der Richtung der X-Axe um

$$\left\{v_1 + \xi \frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v_1}{\partial z}\right\} dt$$

und um entsprechende Strecken in den Richtungen der beiden anderen Coordinatenaxen. Der Unterschied zwischen den Verschiebungen beider Endpunkte der Projektion ξ der Verbindungsstrecke giebt die Aenderung an, die ξ während dt er-

fährt. Für die totalen Differentialquotienten von $\xi\,\eta\,\zeta$ nach der Zeit erhält man demnach

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{249}$$

Diese Gleichungen gelten für die Abstandsänderungen von irgend zwei benachbarten Punkten. Um noch auszudrücken, dass sie auf zwei zur gleichen Wirbellinie gehörige Punkte angewendet werden sollen, setze man zu Anfang des Zeitelements dt

$$\xi = \varepsilon w_1, \qquad \eta = \varepsilon w_2, \qquad \zeta = \varepsilon w_3, \tag{250}$$

wo nun ε irgend eine unendlich kleine Grösse ist. Nach Division mit ε gehen dann die vorigen Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\xi}{dt} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\eta}{dt} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\zeta}{dt} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{251}$$

Wir wollen jetzt ferner berechnen, um wie viel sich die Wirbelcomponenten $w_1\,w_2\,w_3$, die zum gleichen Flüssigkeitstheilchen gehören, während der Zeit dt ändern. Man muss sich dabei vor einigen naheliegenden Fehlern hüten: zunächst kann nämlich $\frac{dw_1}{dt}$ nicht etwa aus Gl. (250) in $\frac{d\xi}{dt}$ ausgedrückt werden, denn diese Gleichungen gelten nach Voraussetzung nur zu Anfang der Zeit dt und es bleibt vorläufig ganz zweifelhaft, ob sie auch späterhin noch bestehen bleiben. Ausserdem darf $\frac{dw_1}{dt}$ nicht mit dem sich auf den constanten Ort beziehenden $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ verwechselt werden; zwischen beiden besteht vielmehr der Zusammenhang

$$\frac{d w_1}{d t} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z}.$$

Zur Berechnung von $\frac{d w_1}{d t}$ kann man natürlich nicht durch blos geometrische Betrachtungen gelangen, denn die Flüssigkeitsbewegung hängt von dem dynamischen Grundgesetze ab und wir müssen daher von den Euler'schen Gleichungen (213) ausgehen, durch die dieses zum Ausdrucke gebracht wird. Die dritte von diesen sei nach y, die zweite nach z partiell differentiirt und hierauf diese von jener subtrahirt. Dadurch heben sich die rechten Seiten von einander fort und nach Wegheben des constanten Faktors μ bleibt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Beim Auflösen der Klammern entstehen je sieben Glieder und die einander entsprechenden aus beiden Klammern vereinigen wir in passender Weise mit einander. So wird z. B.

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial w_1}{\partial t}$$
$$v_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} = v_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

u. s. f. Hierdurch geht die vorige Gleichung zunächst über in

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial z}$$
$$-\frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0.$$

Die ersten vier Glieder bilden aber, wie wir schon sahen, den totalen Differentialquotienten von w_1 nach der Zeit. Die sechs übrigen bringen wir auf die rechte Seite und ordnen sie passend; nach einigen weiteren Umformungen, namentlich auf Grund der Continuitätsgleichung (206), erhalten wir hierauf der Reihe nach

$$\begin{aligned}
\frac{d w_1}{d t} &= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} - w_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= \frac{\partial v_1}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_1}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + w_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\\
&= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Für die Differentialquotienten der beiden anderen Componenten von $\mathfrak{w}$ gelten entsprechende Gleichungen, die sich aus der letzten durch cyclische Vertauschung ableiten lassen. Im Ganzen hat man daher

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d w_1}{d t} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\\
\frac{d w_2}{d t} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\\
\frac{d w_3}{d t} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \tag{252}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stimmen aber genau mit jenen der Gleichungen (251) überein. Hiernach folgt auch

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\frac{d w_1}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon\frac{d w_2}{dt}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon\frac{d w_3}{dt} \tag{253}$$

und der Vergleich mit den Gleichungen (250) lehrt, dass ε als eine der Zeit nach constante Grösse anzusehen ist und dass dann die zuerst nur für den Beginn des Zeitelements dt aufgestellten Gleichungen (250) auch weiterhin gültig bleiben. Nach Ablauf der Zeit dt ist nämlich, wie aus der Verbindung der Gleichungen (250) mit den Gleichungen (253) hervorgeht, auch noch

$$\xi + d\xi = \varepsilon(w_1 + dw_1); \qquad \eta + d\eta = \varepsilon(w_2 + dw_2);$$
$$\zeta + d\zeta = \varepsilon(w_3 + dw_3).$$

Hieraus folgt, dass zwei benachbarte materielle Punkte der Flüssigkeit, die anfänglich auf einer Wirbellinie lagen, auch noch in jedem folgenden Augenblicke auf einer Wirbellinie enthalten sind. Jedem Wirbelfaden zu Anfang der Zeit entspricht daher auch nachher noch ein Wirbelfaden, der dieselben Theilchen der Flüssigkeit umfasst. Ferner ist die Entfernung der beiden Punkte in jedem folgenden Augenblicke der Grösse des Wirbelvektors proportional. Betrachten wir nun ein Element des Wirbelfadens, das zu Anfang den Querschnitt dF hatte und dessen Länge gleich dem Abstande der beiden materiellen Punkte war. Alle Theilchen der Flüssigkeit, die zu Anfang in diesem Wirbelfadenelemente enthalten waren, bilden auch in jedem folgenden Augenblicke ein Wirbelfadenelement. Wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit müssen beide Elemente gleiches Volumen haben. Wenn sich daher wegen der Veränderung der Grösse des Wirbelvektors die Länge des Elements vergrössert oder verkleinert hat, so muss sich der Querschnitt entsprechend verkleinert oder vergrössert haben, so dass das Produkt $dF \cdot w$ constant bleibt. Der Wirbelfaden besteht daher nicht nur stets aus denselben Theilchen, sondern er hat auch in jedem folgenden Augenblicke dieselbe „Stärke" wie zu Anfang. Hiernach kann man jedem einmal in einer reibungsfreien Flüssigkeit bestehenden Wirbelfaden eine selbständige Existenz zuschreiben; er bewegt sich mit unveränderter Stärke in der Flüssigkeit sammt den Theilchen der Flüssigkeit, an die er gebunden ist, weiter und kann nur entweder durch Reibungen in der Flüssigkeit oder durch äussere Kräfte, die sich nicht von einem Potentiale ableiten lassen, vernichtet (oder neu geschaffen) werden. Der letzte Fall ist übrigens bei den gewöhnlich vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen ausgeschlossen, da als äussere Kraft bei diesen nur die Schwere in Betracht kommt, die zu einem Potentiale gehört.

Die Schlüsse, zu denen wir hier gelangten und die zuerst von Helmholtz in einer seiner berühmtesten Abhandlungen gezogen wurden, sind freilich immer noch an die Voraussetzung

gebunden, dass die Flüssigkeitsreibung vernachlässigt werden könne. Eine genaue Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit ist daher auch von ihnen keineswegs zu erwarten. Immerhin stimmen sie aber in vielen Fällen schon sehr näherungsweise mit den Beobachtungen überein. Eine der bekanntesten Erscheinungen, die hierher gehören, bieten uns die Wirbelringe dar, die ein Raucher hervorzubringen vermag. Auf verhältnissmässig grosse Strecken hin halten diese Rauchringe gut zusammen und dass der Wirbelring dabei stets aus denselben Theilchen zusammengesetzt bleibt, wird in diesem Falle durch die Farbe des Rauchs gekennzeichnet. Sonst spielt der Rauch natürlich bei dem ganzen Vorgange keine Rolle; auch ohne Rauch kann man solche Wirbelringe in die Luft ausstossen, sie entziehen sich dann nur der unmittelbaren Wahrnehmung.

Eine grosse Rolle spielen die Wirbel bei den grossen Luftbewegungen in der Atmosphäre der Erde. In der Gegend der barometrischen Minima und Maxima bestehen Wirbel mit ungefähr senkrechter Axe, die auf der Erdoberfläche enden und nach oben hin in unbekannter Weise weiterlaufen, die sogenannten Cyclonen und Anticyclonen. Die verhältnissmässige Beständigkeit der Wirbel zeigt sich auch bei ihnen, indem sie sich oft Tage lang erhalten, während sie über die Erde hinwegziehen. Sie schlagen dabei mit Vorliebe gewisse Bahnen ein, die sogenannten „Zugstrassen". Uebrigens ist bei der Anwendung der Wirbellehre auf diese meteorologischen Vorgänge nicht ausser Acht zu lassen, dass sich unsere Mechanik zunächst immer nur auf den absoluten Raum bezieht, während hier die Drehung der Erde gegen den festen Raum eine wesentliche Rolle spielt. Man muss daher, um die Bewegung der Luftströmungen relativ zur Erde verfolgen zu können, die Ergänzungskräfte der Relativbewegung an den Lufttheilchen als fernere äussere Kräfte anbringen. Dabei findet man aber, dass die „zweite" (Coriolis'sche) Ergänzungskraft nicht zu einem Potentiale gehört. In Folge dessen ist hier, auch abgesehen von Rei-

bungen, ein Grund zum Entstehen (oder Verschwinden) von Wirbeln gegeben, der sehr wesentlich mitspricht.

Ein kreisförmiger Wirbelring (ähnlich einem der vorher erwähnten Rauchringe) vermöchte sich in einer reibungsfreien Flüssigkeit, so lange nur solche Kräfte auftreten, die zu einem Potentiale gehören, in unveränderter Gestalt und mit constanter Geschwindigkeit in derselben Richtung beliebig lange fortzubewegen. Relativ zu einem Coordinatensysteme, das sich mit ihm bewegte, wäre die Bewegung stationär. Den Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen, die hierbei in Bewegung begriffen sind, entspricht eine gewisse lebendige Kraft. Auch diese Energie bewegt sich demnach mit dem Wirbelringe voran und es gehört zu den bemerkenswerthesten Eigenschaften der Wirbel, dass sie die kinetische Energie zusammenhalten und mit sich weiterführen können, ohne dass eine andere Zerstreuung derselben eintritt, als sie durch die Flüssigkeitsreibungen bedingt wird, die zu einem allmählichen Ausbreiten und zugleich zu einem Erlöschen der Wirbel führt. — Hiermit hängt auch das in neuester Zeit dem Vernehmen nach mit gutem Erfolge ausgeführte „Wetterschiessen“ zum Vertreiben der Hagelwetter zusammen. Von einem Trichter, der sich an die Mündung des Böllers anschliesst, wird ein grosser Wirbelring fortgeschleudert, der über grosse Strecken hin gut zusammenhält, die Wolke durchbricht und so die Ausbildung des labilen Gleichgewichtszustandes, der zu einem Hagelwetter zu führen pflegt, stört oder verhindert.

Auf weitere Betrachtungen, die schon von Helmholtz selbst und später von Anderen an die vorausgehenden grundlegenden Untersuchungen geknüpft wurden, kann ich mich hier nicht einlassen. Ich mache nur nochmals darauf aufmerksam, dass Helmholtz aus Gründen, die ich nicht auseinander zu setzen brauche und die auch das Wesen der Sache meiner Ansicht nach gar nicht berühren, an Stelle des Wirbelvektors $\mathfrak{w}$ überall nur die Hälfte davon als Maass des Wirbels gewählt hat. Mir scheint es, dass in den Erwägungen, die dazu führten, nur eine für das Verständniss nutzlose Erschwerung der Unter-

suchung liegt und ich habe sie daher — freilich im Gegensatze zu fast Allen, die bisher über diesen Gegenstand geschrieben haben — einfach weggelassen. Die Gültigkeit aller vorausgehenden Schlüsse wird von dem Hinzutreten eines constanten Faktors, der im Uebrigen auch ganz beliebig gewählt werden könnte, zu dem Wirbelvektor behufs Bildung eines Maasses für den Wirbel, natürlich gar nicht berührt.

§ 46. Wellenbewegungen.

Zu den bekanntesten Flüssigkeitsbewegungen gehören die Wellen, die sich nach Gleichgewichtsstörungen auf der Oberfläche weit ausgedehnter und tiefer Wasserbecken ausbilden. Ein kleines Stückchen Holz, das auf der Wasseroberfläche schwimmt und deren Bewegungen mitmacht, lehrt uns, dass die Wassertheilchen keineswegs in dauernd fortschreitender Bewegung begriffen sind, wie dies nach flüchtiger Beobachtung vermuthet werden könnte, sondern dass sie — wenigstens bei regelmässiger Ausbildung der Wellen — in sich zurücklaufende Curven beschreiben. Im Allgemeinen bleiben demnach die Wassertheilchen an ihrem Orte; sie heben sich, wenn ein Wellenkamm naht, um sich gleich darauf wieder zu senken und beim Vorbeischreiten eines Wellenthals ihren tiefsten Stand zu erreichen. Nur die Erscheinung oder „Phase“, d. h. die geometrisch wohldefinirte Oberflächenform ist im Fortschreiten begriffen, aber nicht die Materie, aus der sie gebildet ist.

Aus blossen Hebungen und Senkungen kann indessen die Bewegung des Wassers in den Wellen nicht bestehen, da eine solche Bewegung im Widerspruche mit der Continuitätsbedingung wäre. Man denke sich nämlich durch eine lothrechte Mantelfläche einen cylindrischen Wasserkörper von beliebiger Grundfläche, der bis zum Boden hin reicht, abgegrenzt. Wenn keine Horizontalcomponenten der Geschwindigkeit vorkämen, würde aus diesem Raume Wasser weder austreten noch eintreten und da das in ihm vorhandene Wasser stets den gleichen Raum einnehmen muss, folgt, dass bei festem Boden auch der

Wasserspiegel — im Mittel wenigstens — stets die gleiche Höhe einnehmen müsste. Da dies nun für jeden solchen Wassercylinder gilt, kann ohne Horizontalcomponenten der Geschwindigkeit überhaupt keine Wellenbewegung bestehen.

Jedes Wassertheilchen muss hiernach eine Bahn beschreiben, die bei regelmässiger Ausbildung der Wellen als eine geschlossene ebene Curve angenommen werden kann, deren Ebene senkrecht zur Längsrichtung der Wellen, d. h. senkrecht zu den horizontalen Erzeugenden der Cylinderfläche steht, die das Wasser nach oben hin begrenzt. Die Wellenbewegung kann daher als eine ebene Bewegung behandelt werden und insofern vereinfacht sich die Aufgabe der Untersuchung. Dagegen ist hier die Bewegung, wie schon aus den Bemerkungen über die aus der Beobachtung bekannten Bahnen der Wassertheilchen hervorgeht, keineswegs wirbelfrei und daher kann von den sich auf die Theorie der complexen Functionen stützenden bequemen Methoden der §§ 43 und 44 hier kein Gebrauch gemacht werden.

Den Techniker interessiren vor Allem die grossen wohlausgebildeten Wellenzüge, die in Folge eines heftigen Sturmes auf der Oberfläche des Meeres oder eines grösseren Seees auftreten. Diesen hat auch der berühmte Wasserbaumeister Hagen seine Aufmerksamkeit zugewendet. Er fand durch Beobachtung, dass die Wassertheilchen bei ihnen stets ziemlich genau kreisförmige Bahnen beschrieben. Hiervon liess er sich bei der theoretischen Untersuchung, die er daran knüpfte, leiten und die sich daraus ergebende „Hagen'sche Theorie“ der Wasserwellen nimmt in den Kreisen der Wasserbautechniker bis auf den heutigen Tag den ersten Rang ein. Uebrigens war Gerstner (1804) im Wesentlichen schon auf die gleichen Betrachtungen gekommen, wenn er sie auch nicht so weit durchgeführt hatte. — Ausser der von Hagen betrachteten besonderen Bewegungsform sind übrigens auch noch andere möglich, die ihr an Einfachheit kaum etwas nachgeben, aber doch allgemeiner sind, als sie. Die einzelnen Wassertheilchen können nämlich ebensogut auch Ellipsen (und auch noch andere Curven)

beschreiben. Bei Gewässern von geringer Tiefe im Vergleiche zur Wellenhöhe können kreisförmige Bewegungen der Wassertheilchen überhaupt keine genügende Erklärung für die Wellen geben; man muss dann vielmehr zu den elliptischen Bahnen übergehen und diese überdies als sehr lang gestreckt voraussetzen. Sonst kann aber die sich von vornherein auf die Erfahrung aufbauende Hagen'sche Theorie meist als recht gut zutreffend angesehen werden und daher werde ich mich hier auch damit begnügen, nur diesen einfachsten Fall der Wasserwellen zu untersuchen. Wer sich mit diesem Falle vertraut gemacht hat, wird sich übrigens ohne Schwierigkeit auch in dem allgemeineren Falle zurecht finden, da die Untersuchungsmethode die gleiche bleibt.

Ehe mit der Rechnung begonnen wird, möge die Grundlage, auf der sie beruhen soll, noch etwas näher besprochen

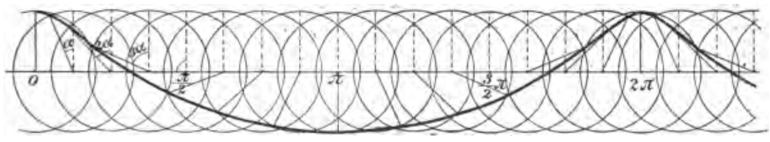


Abb. 63.

werden. Es soll sich also um eine ebene Bewegung handeln, die unter dem Einflusse der Schwere erfolgt, während auf der freien Oberfläche ein constanter Druck — nämlich der Luftdruck — lastet. Das Wasser soll tief im Vergleiche zu den Abmessungen der Wellen sein und auch nach den Seiten hin soll es als unbegrenzt angenommen werden, um die Störungen, die von den Ufern her erfolgen, hier aus dem Spiele lassen zu können. Vermuthet wird ferner auf Grund von Beobachtungen, dass die Wassertheilchen der Oberfläche kreisförmige Bahnen durchlaufen. Abb. 63 giebt näher an, wie hierbei die Wellenoberfläche zu Stande kommt. Ob dies genau zutreffen kann, lässt sich auf Grund der Beobachtung allein nicht entscheiden; wir werden uns vielmehr davon überzeugen müssen, ob eine solche Bewegung geometrisch und dynamisch möglich ist.

Ferner müssen wir nach den Bahnen fragen, die von den

nicht zur Oberfläche gehörenden Theilen eingeschlagen werden. Wir denken uns in der Bewegungsebene eine horizontale Linie gezogen, die bei ruhendem Wasser eine gewisse Tiefe unter dem Wasserspiegel hat. Wenn der vorher gradlinige Wasserspiegel durch die Bewegung in eine Wellenlinie übergegangen ist, müssen auch die Wassertheilchen, die im Gleichgewichtszustande auf jener Geraden lagen, eine Wellenlinie bilden. Die Wellenhöhe dieser Linie ist nur von der Tiefe abhängig, die sie unter dem Wasserspiegel einnimmt. Ihren grössten Werth nimmt sie an der Oberfläche selbst an und von da an muss sie nach der Tiefe zu fortwährend abnehmen, so dass in grösserer Tiefe überhaupt kaum noch etwas von der Bewegung wahrzunehmen ist. Dies ist einerseits nöthig, damit die Grenzbedingung an der Bodenfläche erfüllt werden kann und andererseits weiss man auch schon aus der Erfahrung, dass sich die Wellenbewegungen im Wesentlichen nur in der Nähe der Oberfläche abspielen und schon in einiger Tiefe unter der Oberfläche fast unmerklich werden. Die Wassertheilchen unter der Oberfläche werden sich daher im Allgemeinen ähnlich wie die an der Oberfläche selbst bewegen müssen, nur mit geringeren Ausschlägen. Wir werden daher zu der Vermuthung geführt, dass auch diese Wassertheilchen kreisförmige Bahnen beschreiben, dass aber der Halbmesser der Kreise nach unten hin abnimmt. Wenn die Theilchen an der Oberfläche zum Gipfel eines Wellenberges gehören, müssen der Continuitätsbedingung wegen auch die Theilchen der tieferen Wasserschichten, die grade unter jenen liegen, jedenfalls eine der höchsten benachbarte, wahrscheinlich aber ebenfalls ihre höchste Lage einnehmen. Wir vermuthen daher, dass die Bewegungen in verschiedenen Tiefen an entsprechenden Stellen in gleicher Phase stehen, d. h. dass die tiefer gelegenen Theilchen ihre Kreisbahnen mit derselben Winkelgeschwindigkeit beschreiben, wie die an der Oberfläche und dass der vom Mittelpunkte der Kreisbahn aus nach dem bewegten Punkte gezogene Radius in jedem gegebenen Augenblicke für alle übereinander liegenden Theilchen die gleiche Richtung hat.

Alle diese Schlüsse sind Inductionsschlüsse, die als ein Muster dafür gelten können, wie man mit der theoretischen Deutung einer aus der Beobachtung bekannten Erscheinung beginnen soll. In wie weit man mit diesen Vermuthungen das Rechte getroffen hat, kann erst die nachfolgende deductive Untersuchung lehren.

Für die Durchführung dieser Untersuchung empfiehlt sich im vorliegenden Falle nicht das Verfahren von Euler, sondern das von Lagrange. Denn bei diesem verfolgen wir das einzelne Wassertheilchen; wir können daher nach ihm die Untersuchung in derselben Weise fortsetzen, wie sie vorher begonnen war. Bei der Lagrange'schen Methode fällt die Continuitätsgleichung freilich erheblich verwickelter aus, als nach der Euler'schen; sie spricht aus, dass eine gewisse Determinante constant sein muss. Im Falle der ebenen Bewegung und namentlich in dem hier vorliegenden Falle vereinfacht sich aber die Gleichung so erheblich, dass sie keine Schwierigkeiten mehr machen kann.

Wir ziehen in der Bewegungsebene eine horizontale X-Axe und eine Y-Axe lothrecht nach abwärts. Dann nehmen wir drei benachbarte Punkte an, von denen der zweite mit dem ersten in gleicher Höhe, der dritte mit dem ersten auf der gleichen Lothrechten liegt. Diese drei Punkte ABC in Abb. 64 betrachten wir als die Mittelpunkte der kreisförmigen Bahnen von drei Wassertheilchen, deren Bewegung wir näher verfolgen wollen. In irgend einem Augenblicke sei D die Lage jenes Theilchens, dessen Mittelpunkt in A liegt. Der Halbmesser AD der Kreisbahn sei mit r bezeichnet; der Winkel, den AD mit der Lothrechten bildet und den wir als den Phasenwinkel bezeichnen können, sei zur gegebenen Zeit gleich φ. Wir wollen annehmen, dass die Theilchen ihre Bahnen in

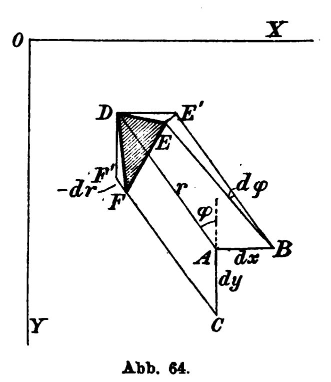


Abb. 64.

solchem Sinne durchlaufen, dass der Winkel φ mit der Zeit abnimmt; die Welle pflanzt sich dann im Sinne der positiven X-Axe fort (vorausgesetzt, dass, wie in der Figur schon angenommen, $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv ist).

Zum Mittelpunkte B gehört das Wassertheilchen E. Wenn sich die Phase beim Fortschreiten nach der X-Axe nicht änderte, käme E nach E', so nämlich, dass BE' gleich und parallel mit AD wäre. Nun ist zwar BE immer noch gleich AD, weil der Halbmesser der Bahnkreise für alle in derselben Schicht liegenden Theilchen dieselbe Grösse hat. Dagegen hat sich der Phasenwinkel φ um $d\varphi$ geändert. Da φ nur von x abhängig, von y aber unabhängig ist, können wir

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

setzen, falls die Strecke AB mit dx bezeichnet wird. — Zum Mittelpunkte C endlich gehört der Flüssigkeitspunkt F. Um ihn zu finden, trage man zunächst CF' gleich und parallel mit AD auf und vermindere hierauf CF' um $F'F$ oder um $-\,dr$. Der Halbmesser r ist nur von y abhängig und von x unabhängig und man hat daher, wenn die Strecke AC mit dy bezeichnet wird,

$$dr = \frac{dr}{dy}\,dy.$$

Wir müssen erwarten, dass r mit wachsendem y abnimmt. Hier setzen wir aber zunächst $\frac{dr}{dy}$ als positiv voraus; die Rechnung muss uns dann von selbst lehren, dass es in Wirklichkeit negativ ist.

Man betrachte den Inhalt des in Abb. 64 durch Schraffirung hervorgehobenen Dreiecks DEF. Wenn die Zeit fortschreitet, verändert sich die Gestalt und die Lage dieses Dreiecks; für jeden folgenden Augenblick lässt es sich aus den festliegenden Mittelpunkten ABC ohne Weiteres von Neuem construiren. Das Dreieck wird stets von denselben Flüssigkeitstheilchen eingenommen; die Continuitäts-

bedingung verlangt daher, dass die Fläche des Dreiecks während der Bewegung constant bleibt.

Wir müssen also nun einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks aufstellen. Um dabei nicht auf Lehren der analytischen Geometrie verweisen zu müssen, von denen ich nicht wissen kann, ob sie dem Leser grade noch im Gedächtnisse geblieben sind, zeichne ich in Abb. 65 ein Dreieck aus den Punkten 1, 2, 3, deren Coordinaten eingeschrieben sind. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks wird durch Zusammensetzen aus den einzelnen Bestandtheilen gefunden zu

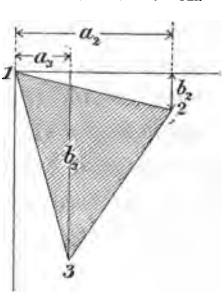


Abb. 65.

$$\triangle = \frac{1}{2} a_3 b_3 + (a_2 - a_3)\frac{b_2 + b_3}{2} - \frac{1}{2} a_2 b_2 = \frac{1}{2}(a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

wofür man auch in Determinantenform

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

schreiben kann.

Um diese Formel für die Berechnung des Dreiecks DEF in Abb. 64 verwenden zu können, brauchen wir nur zu setzen

$$\begin{aligned} a_2 &= dx - r\,d\varphi \cos\varphi, \\ b_2 &= r\,d\varphi \sin\varphi, \\ a_3 &= -\,dr \sin\varphi, \\ b_3 &= dy - dr \cos\varphi. \end{aligned}$$

Diese Werthe ergeben sich nämlich aus Abb. 64 ohne Weiteres, wenn man nur beachtet, dass $EE' = r\,d\varphi$ und $F'F = -\,dr$ ist. Wäre nämlich dr positiv, so läge F jenseits F', während es in der Figur zwischen F' und C angenommen ist. Für den Dreiecksinhalt $\triangle$ bekommt man demnach

$$\triangle = \frac{1}{2}\{(dx - r\,d\varphi\cos\varphi)(dy - dr\cos\varphi) + dr\sin\varphi \cdot r\,d\varphi\sin\varphi\}$$

$$= \frac{1}{2}\{dx\,dy - \cos\varphi\,(dx\,dr + r\,dy\,d\varphi) + r\,dr\,d\varphi\}$$

oder, wenn man für dr und $d\varphi$ die vorher festgestellten Ausdrücke einsetzt,

$$\triangle = \frac{1}{2}\, dx\, dy \left\{1 - \cos\varphi \left(\frac{dr}{dy} + r\frac{d\varphi}{dx}\right) + r\frac{dr}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right\}. \quad (254)$$

Dieser Ausdruck muss der Zeit nach constant sein. Der Halbmesser r und die Differentialquotienten von r und φ sind aber unabhängig von der Zeit und die einzige Grösse, die in dem gefundenen Ausdrucke mit der Zeit veränderlich ist, ist $\cos\varphi$. Um die Continuitätsbedingung zu erfüllen, müssen wir daher den mit $\cos\varphi$ multiplicirten Klammerwerth gleich Null setzen. Wir erhalten damit

$$\frac{dr}{dy} = - r\frac{d\varphi}{dx}. \quad (255)$$

Da r unabhängig von x ist, kann auch $\frac{d\varphi}{dx}$ nicht von x abhängen. Wir können daher einen einfachen Ausdruck für diesen Differentialquotienten aufstellen. Die Länge der Welle, d. h. die Entfernung zwischen zwei Wellenkämmen, sei mit λ bezeichnet; dann ist der Phasenunterschied, der zu dem Abstande λ gehört, gleich 2π. Da nun der Phasenunterschied $d\varphi$, wie wir sahen, überall proportional zu dem horizontalen Abstande dx ist, folgt

$$d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\, dx \quad (256)$$

und die vorige Gleichung geht hiermit über in

$$\frac{dr}{dy} = - \frac{2\pi}{\lambda}\, r.$$

Aus dieser Differentialgleichung kann sofort r als Function von y berechnet werden. Durch Trennung der Variabeln erhält man

$$\frac{dr}{r} = - \frac{2\pi}{\lambda}\, dy$$

und hieraus durch Integration

$$\lg r = C - \frac{2\pi}{\lambda}\, y. \quad (257)$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C dient die Bemerkung, dass für die Wasseroberfläche r gleich der Hälfte der Wellenhöhe h ist, wenn man darunter den Höhenunter-

schied zwischen dem Wellenkamme und dem tiefsten Punkte eines Wellenthals versteht. Wir wollen ferner annehmen, dass die X-Axe in jener Höhe gezogen sei, auf der die Mittelpunkte der von den Punkten der Wellenoberfläche beschriebenen Kreisbahnen liegen. Dabei ist übrigens zu beachten, dase diese Linie nicht etwa mit dem Wasserspiegel des ruhenden Wassers zusammenfällt. Auf Grund dieser Festsetzung findet man für $y = 0$ aus Gl. (257)

$$C = \lg \frac{h}{2},$$

und wenn man dies einsetzt, geht die Gleichung über in

$$\lg \frac{h}{2r} = \frac{2\pi}{\lambda} y \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y}. \tag{258}$$

Der Halbmesser r nimmt also nach einem Exponentialgesetze mit der Tiefe ab. Da

$$e^{-2\pi} = 0{,}00187$$

ist, macht r in einer Tiefe, die gleich der Wellenlänge λ ist, schon nicht mehr ganz zwei Tausendstel des Werthes an der Oberfläche aus und in einer doppelt so grossen Tiefe zählt r nur noch nach Millionteln des Werthes an der Oberfläche. Wir finden damit bestätigt, dass sich die Wellenbewegung im Wesentlichen nur in den oberflächlichen Schichten des Wassers abspielt, deren Dicke etwa von der Grössenordnung der Wellenlänge ist. Unsere Lösung des Problems ist daher jedenfalls auch nur so lange brauchbar, als die Wassertiefe mindestens auch von dieser Grössenordnung ist.

Da die Punkte ABC in Abbildung 64 ganz willkürlich gewählt waren, ist bei Erfüllung der Gl. (255) oder der daraus abgeleiteten Integralgleichung (258) der Continuitätsbedingung (bei genügender Wassertiefe) überall genügt. Die auf inductivem Wege gefundene Bewegungsform stellt daher jedenfalls eine geometrisch mögliche Wasserbewegung dar. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob sie unter den gegebenen Bedingungen für die äusseren Kräfte auch dynamisch möglich ist.

Zu diesem Zwecke machen wir von dem dAlembert'schen Princip Gebrauch. Wenn wir zu den äusseren Kräften noch die Trägheitskräfte an den bewegten Wassertheilchen fügen, muss sich die Wassermasse in der augenblicklichen Gestalt, die sie besitzt, im Gleichgewichte halten, falls wir sie im ruhenden Zustande und in dieser Gestalt und Lage sich selbst überlassen. Die Trägheitskräfte reduciren sich hier, da die Wassertheilchen alle kreisförmige Bahnen mit constanter Geschwindigkeit beschreiben, auf Centrifugalkräfte. Wir haben daher nur noch ein einfaches hydrostatisches Problem zu untersuchen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte kommt aber darauf hinaus, dass die Flüssigkeitsoberfläche eine Niveaufläche bildet, d. h. dass die resultirende äussere Kraft senkrecht zur Oberfläche steht. Der Druck an irgend einer Stelle im Innern regelt sich danach von selbst und kann nach den gewöhnlichen hydrostatischen Gesetzen leicht berechnet werden.

Die Coordinaten irgend eines Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t seien mit $\xi\eta$, die des Mittelpunkts der von ihm beschriebenen Kreisbahn, wie vorher, mit xy bezeichnet (vgl. Abb. 66). Dann ist

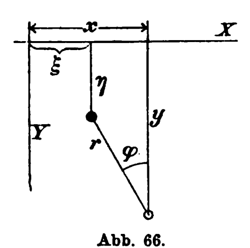


Abb. 66.

$$\xi = x - r \sin\varphi; \quad \eta = y - r\cos\varphi.$$

Setzt man speciell $y = 0$ und schreibt man für das zugehörige r, d. h. für $\frac{h}{2}$ jetzt der Kürze wegen r_0, so wird dies

$$\xi = x - r_0 \sin\varphi; \quad \eta = -r_0 \cos\varphi, \qquad (259)$$

und wenn man aus diesen Gleichungen φ eliminirt, nachdem man zuvor x mit Hülfe von Gl. (256) in φ ausgedrückt hat, erhält man daraus die Gleichung der Wellenoberfläche zur Zeit t. Anstatt diese Elimination auszuführen, können wir aber auch den Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$, auf den es allein ankommt, unmittelbar aus den Gleichungen (259) in Verbindung mit Gl. (256) ermitteln. Man hat nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx},$$

wobei nach den genannten Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dx} = r_0 \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \sin\varphi,$$

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - r_0 \cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \cos\varphi$$

zu setzen ist. Hiernach wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\pi r_0 \sin\varphi}{\lambda - 2\pi r_0 \cos\varphi} \tag{260}$$

und hiermit ist auch die Richtung der Tangente an die Wellenoberfläche an einer Stelle, die der Phase φ entspricht, bekannt.

Auf ein Wassertheilchen, das an dieser Stelle der Wellenoberfläche liegt, wirkt — abgesehen von dem Luftdrucke, der auf der Wasseroberfläche lastet, und der überall als constant und normal zur Oberfläche angesehen werden kann — die Schwerkraft und die zur Herstellung des statischen Problems beizufügende Centrifugalkraft. Die Resultirende aus den beiden zuletzt genannten Kräften muss senkrecht zur Wellenoberfläche stehen. Zerlegen wir also die Resultirende in eine horizontale Componente P_1 und in eine vertikale Componente P_2, wie es in Abb. 67, die ein Stückchen der Wellenoberfläche angiebt, angedeutet ist, so muss sich verhalten

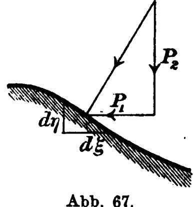


Abb. 67.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d\eta}{d\xi}. \tag{261}$$

Wir werden also das Verhältniss der Componenten P_1 und P_2 berechnen und seinen Werth mit dem des Differentialquotienten, der aus Gl. (260) bekannt ist, vergleichen müssen.

Die Masse des Theilchens, das wir betrachten, sei m. Dann ist die an ihm wirkende Centrifugalkraft C

$$C = \frac{mv^2}{r_0} = mu^2 r_0.$$

Die Winkelgeschwindigkeit u, die hierin vorkommt, ist

$$u = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{262}$$

Für P_1 erhalten wir daher

$$P_1 = C \sin \varphi = m \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \sin \varphi, \tag{263}$$

wenn P_1 als positiv in jener Richtung gerechnet wird, die durch den Pfeil in Abbildung 67 angezeigt ist. Bei P_2 kommt ausser der Vertikalcomponente der Centrifugalkraft noch das Gewicht mg des Theilchens in Betracht; man hat daher, wiederum unter Berücksichtigung der Vorzeichenfestsetzungen,

$$P_2 = mg - C \cos \varphi = mg - m \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \cos \varphi,$$

Gl. (261) geht hiermit und unter Berücksichtigung von Gl. (260) über in

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \sin \varphi}{g - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \cos \varphi} = \frac{2\pi r_0 \sin \varphi}{\lambda - 2\pi r_0 \cos \varphi}$$

und diese Gleichung muss, wenn die Bewegung unter den gegebenen Umständen auch dynamisch möglich sein soll, für jeden Punkt der Wellenoberfläche, d. h. für jeden Werth von φ, erfüllt sein. Dies trifft, wie wir sehen, in der That zu, falls nur zwischen den in der Gleichung vorkommenden constanten Grössen die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 : g = 2\pi : \lambda \tag{264}$$

erfüllt ist. Um dieser Gleichung eine für die weitere Verwendung bequemere Form zu geben, führe ich ferner noch die Schwingungszeit τ ein, also jene Zeit, während deren jedes Flüssigkeitstheilchen seine kreisförmige Bahn einmal durchläuft. Es ist dies zugleich auch die Zeit, während deren sich ein Wellenkamm (oder überhaupt jede bestimmte Phase der Bewegung) in stetiger Folge um die Wellenlänge λ fortbewegt hat. Bezeichnet man demnach die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen mit ϖ, so ist auch

$$\varpi = \frac{\lambda}{\tau}. \tag{265}$$

Andererseits lässt sich aber $\frac{d\varphi}{dt}$ in τ ausdrücken. In τ wächst nämlich φ um 2π und daher ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\varpi}{\lambda}.$$

Setzt man dies in Gl. (264) ein, so erhält man

$$\lambda \cdot \left(\frac{2\pi\varpi}{\lambda}\right)^2 = 2\pi \cdot g.$$

und hierauf durch Auflösen nach ϖ

$$\varpi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{266}$$

Wir sind damit im Wesentlichen am Schlusse unserer Betrachtungen angekommen. Es zeigte sich, dass die zuerst auf Grund der unmittelbaren Beobachtung gebildete Vorstellung von der Art der Wellenbewegung insofern zutreffend war, als sie in der That im Allgemeinen einer geometrisch und dynamisch möglichen Bewegungsform in der reibungsfreien Flüssigkeit entspricht. Es mussten dabei nur die Bedingungsgleichungen (258) und (266) erfüllt sein. Wir haben daher mehr gefunden, als eine blosse Bestätigung für die Zulässigkeit unserer Inductionsschlüsse, denn wir wissen jetzt auch, nach welchem Gesetze die Bewegung nach der Tiefe hin abnimmt und wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen mit der Wellenlänge zusammenhängt. Besonders beachtenswerth ist hierbei, dass die langen Wellen nach Gl. (266) schneller fortschreiten, als die kurzen, während es auf die Höhe der Wellen dabei nicht ankommt. Dieses Ergebniss ist durchaus verschieden von dem Gesetze, nach dem die Schallwellen in einem elastischen Körper fortschreiten, denn in diesem Falle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Wellenlänge. Es steht aber mit der Erfahrung ganz gut in Uebereinstimmung. Bei bewegtem Meeres- oder Seespiegel kann man oft neben längeren Wellen, die dann gewöhnlich auch von grösserer Höhe sind, kleinere Kräuselungen beobachten, die zu Wellen von kleinerer Länge gehören und die sich über die langen Wellenzüge ohne

wesentliche gegenseitige Störung superponiren. Man wird dann stets bemerken, dass die langen Wellen viel schneller fortschreiten als die kurzen, die sie schnell hinter sich lassen.

Bei den Wellenbewegungen bestehen, wie schon zuvor bemerkt wurde, Wirbel. Die einzelnen Wirbelfäden sind hier gradlinig und senkrecht zur Bewegungsebene, also parallel zur Z-Axe gerichtet. Die Aufgabe, um die es sich hauptsächlich handelte, konnte zwar schon ohne weitere Beachtung der Wirbel gelöst werden; es ist aber nicht ohne Interesse, nachträglich auch noch die Wirbel zu berechnen.

Nach Gl. (217) war der Wirbelvektor $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Hier ist $v_3 = 0$ und v_1 und v_2 sind unabhängig von z; daher vereinfacht sich $\mathfrak{w}$ zu

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

d. h. $\mathfrak{w}$ ist, in Uebereinstimmung mit einer zuvor schon gemachten Bemerkung, parallel zur Z-Axe. Es handelt sich daher nur noch um die absolute Grösse von $\mathfrak{w}$, nämlich

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Um diesen Werth zu ermitteln, kehren wir zur Betrachtung von Abb. 64 (S. 437) zurück. Im Punkte D des festen Raumes steht die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in dem Augenblicke, auf den sich die Abbildung bezieht, rechtwinklig zu AD und sie hat die Grösse ru, wenn u wieder die Winkelgeschwindigkeit (ihrem absoluten Betrage nach) bezeichnet. Wir nahmen früher an, dass die kreisförmigen Bahnen der einzelnen Wassertheilchen in solcher Richtung durchlaufen würden, dass φ mit der Zeit abnimmt und wollen an dieser — an sich übrigens gleichgültigen — Annahme auch hier festhalten. Für die Geschwindigkeitscomponenten v_1 und v_2 im Punkte D erhalten wir dann

$$v_1 = ur \cos \varphi; \quad v_2 = -ur \sin \varphi.$$

Es fragt sich jetzt, um wie viel sich diese Componenten in den Punkten E' und F' von denen im Punkte D zur gleichen Zeit

unterscheiden. Unmittelbar bekannt ist die Geschwindigkeit in den Nachbarpunkten E und F von E' und F'. Die Projektionen der Strecke DE auf die Axenrichtungen sind $dx - rd\varphi\cos\varphi$ und $rd\varphi\sin\varphi$. Die Aenderung dv_1 der Geschwindigkeitscomponente v_1, die beim Fortschreiten vom Punkte D zum Punkte E entsteht, kann daher

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x}(dx - rd\varphi\cos\varphi) + \frac{\partial v_1}{\partial y} rd\varphi\sin\varphi$$
$$= dx\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi\right\}$$

gesetzt werden, wobei auf Gl. (256) zu achten war. Andererseits ist aber die Geschwindigkeit im Punkte E ebenso gross als im Punkte D und nur die Richtung hat sich um $d\varphi$ geändert. Man hat daher für dv_1 auch den Ausdruck

$$dv_1 = -ur\sin\varphi\cdot d\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi\cdot dx.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe liefert die erste der vier folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x}\cdot\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi + \frac{\partial v_1}{\partial y}\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x}\cdot\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi + \frac{\partial v_2}{\partial y}\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) = u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi.$$

Die zweite dieser Gleichungen wird nämlich gefunden, wenn man in derselben Weise die Aenderung untersucht, die v_2 beim Uebergange von D nach E erleidet und die beiden letzten Gleichungen beziehen sich ebenso auf die Verschiebung von D nach F. Durch Auflösen der Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = u\left\{\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi - \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right\} : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right],$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = u\left\{\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right\} : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right].$$

Für die Intensität des Wirbels findet man daher

$$w = 2u\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right]. \qquad (267)$$

Der Werth von w hängt demnach bei einer gegebenen Wellenbewegung (d. h. bei gegebenem u und λ) nur noch von dem Halbmesser des Kreises ab, den das Theilchen beschreibt, das sich grade an der betreffenden Stelle befindet. Auch dieses Resultat lässt uns wieder erkennen, was früher schon allgemeiner bewiesen wurde, dass nämlich die Wirbelfäden dauernd an dieselben Theilchen der Flüssigkeit gebunden sind und sich in unveränderter Stärke mit diesen bewegen. Jeder Wirbelfaden beschreibt daher ebenfalls eine kreisförmige Bahn.

Wenn an irgend einer Stelle $2\pi r = \lambda$ wäre, würde w nach Gl. (267) unendlich gross. Dieser Fall ist indessen bei einer Wellenbewegung ausgeschlossen, wie man aus Gl. (260) erkennt. Wenn nämlich $2\pi r_0$ nicht kleiner als λ wäre, hätte die Wellenoberfläche an irgend einer Stelle eine senkrechte Tangente, da $\frac{d\eta}{d\xi}$ unendlich gross würde. Die Wellenoberfläche würde nach den abgeleiteten Gleichungen oben eine Schleife bilden; ein Fall, der natürlich faktisch ausgeschlossen ist. Die Wellenlänge muss demnach immer wenigstens etwas mehr als das π-fache der Wellenhöhe betragen; sollte sie grade das π-fache betragen, so müsste der Wellenkamm oben in eine Spitze auslaufen.

Ganz ähnlich wie die hier besprochenen fortschreitenden Wellen sind auch die stehenden Wellen zu beurtheilen, die sich unterhalb eines Wehres oder eines ähnlichen Hindernisses in einem Flusslaufe ausbilden. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen relativ zur bewegten Wassermasse ist ebenso gross und entgegengesetzt gerichtet wie die Stromgeschwindigkeit, die die Wassermassen im Ganzen genommen nach abwärts führt. Aus dieser Bedingung ergiebt sich nach Gl. (266) die Länge der Wellen, wenn ϖ gegegeben ist.

§ 46a. Gezeiten-Wellen.

Von ganz anderer Art als die soeben besprochenen Oberflächenwellen sind jene langgezogenen und daher ihrer Wellenform nach beim blossen Anblicke nicht übersehbaren Schwingungsbewegungen, die sich in den Gezeiten, also in langsam erfolgenden periodischen Schwankungen des Wasserspiegels kundgeben. Dazu gehört zunächst die Ebbe- und Fluthbewegung der Meere, von der man weiss, dass sie von der verschieden starken Anziehung herrührt, die nach dem Newtonschen Gesetze vom Monde (bezw. der Sonne) auf verschieden weit davon gelegene Punkte der Erde ausgeübt wird. Auch die unter dem Namen der „Seiches" bekannten, zuerst am Genfer See und später auch an anderen Seeen beobachteten Seespiegelschwankungen befolgen, abgesehen davon, dass hier die die Schwingungen erregende Ursache eine andere ist, im Wesentlichen das gleiche Gesetz. Aehnliche langsam verlaufende Pendelungen des Wasserspiegels kommen auch in langen Kanalhaltungen und in manchen anderen Fällen vor. Die einfachsten Bedingungen für das Fortschreiten dieser Gezeiten-Wellen liegen in einem gradlinigen horizontalen Kanale von überall gleichem Querschnitte vor, der überdies noch von gemauerten senkrechten Seitenwänden begrenzt sein möge. Auf diesen Fall, der überdies dem Techniker besonders nahe liegt, soll sich die hier durchzuführende Betrachtung in erster Linie beziehen.

Dabei mag ganz dahin gestellt bleiben, wie die Gezeiten-Welle ursprünglich hervorgerufen wurde. Wir wollen sie nur, nachdem sie auf irgend eine Art entstanden ist und nachdem die erregende Ursache zu wirken aufgehört hat, in ihrem weiteren ungestörten Fortschreiten verfolgen. Namentlich soll also hier nicht auf die Entstehung der Ebbe- und Fluthwelle im grossen Ocean eingegangen werden, während das Fortschreiten dieser vom Ocean her eintreffenden Welle in einem langgezogenen kleineren Gewässer mit in den Bereich dieser Untersuchung gehört.

Die in der angegebenen Weise beschränkte Theorie der Gezeiten-Wellen ist erheblich einfacher als die Theorie der Oberflächenwellen und zwar weil bei diesen langsam erfolgenden Schwingungen die Beschleunigungen der Wassertheilchen nur sehr gering sind. Darum fallen auch die nach dem d'Alembert-schen Princip zur Zurückführung des dynamischen Problems auf ein statisches einzuführenden Trägheitskräfte und namentlich deren Vertikal-Componenten, auf die es hierbei in erster Linie ankommt, äusserst klein aus, so dass sie bei der Berechnung des an irgend einer Stelle der Flüssigkeit auftretenden Druckes ganz vernachlässigt werden können. Der Druck hängt daher nur davon ab, wie tief diese Stelle grade unter der jeweiligen Wasseroberfläche liegt und er ist ebenso gross wie der hydrostatische Druck bei der gleichen Tiefe. Sieht man von dem als constant vorauszusetzenden Luftdrucke auf die Wasseroberfläche, der sonst nur als ein constanter Summand mitzuschleppen wäre, ab, so ist der Druck p an irgend einer Stelle in der Höhe y über der Kanalsohle

$$p = \gamma (h + \eta - y) \tag{267a}$$

zu setzen, wenn unter γ das Gewicht der Volumen-Einheit, unter h die Höhe des Wasserspiegels im ungestörten und unter $h + \eta$ im augenblicklichen Zustande verstanden wird. Unter η ist demnach die zur Zeit t stattfindende Erhebung des Wasserspiegels über den normalen Stand in Folge der Schwingungsbewegung zu verstehen. Rechnet man die Abscissen x in der Richtung der Canal-Axe, so ist η eine unbekannte Function der beiden unabhängigen Variabeln x und t.

Für das Druckgefälle in horizontaler Richtung findet man durch Differentiation

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x}; \tag{267b}$$

es ist daher unabhängig von der Tiefe unter dem Wasserspiegel und ebenso wie η nur von x und t abhängig. Hiermit hängt jene Eigenthümlichkeit der Gezeiten-Wellen zusammen, durch die diese sich am meisten von den Oberflächenwellen unterscheiden. Die Unabhängigkeit des horizontalen Druckgefälles

von der Wassertiefe hat nämlich zur Folge, dass auch die Horizontal-Componenten der Trägheitskräfte in allen Punkten eines Querschnitts jederzeit gleich gross sein müssen, da sich diese Horizontal-Componenten mit dem horizontalen Druckgefälle im Gleichgewichte halten müssen. Hierbei ist noch zu beachten, dass die Horizontal-Componenten der Trägheitskräfte, obschon sie ebenfalls nur sehr gering sind, nicht vernachlässigt werden dürfen, weil sie sich wegen der grossen Längsausdehnung des Kanals schliesslich doch zu grösseren Beträgen summiren. Auch das horizontale Druckgefälle ist nur sehr gering; zwischen weit genug von einander entfernten Querschnitten besteht aber doch ein merklicher Niveauunterschied und hiermit ein merklicher Druckunterschied zwischen gleich hoch liegenden Punkten beider Querschnitte. Dieser Druckunterschied ist gleich dem Linienintegrale der Trägheitskräfte längs der zwischen beiden Querschnitten liegenden Strecke der Kanalaxe. Bezeichnet man die Horizontal-Componente der Geschwindigkeit mit v_1, so ist

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

denn die Beschleunigung $\frac{d v_1}{d t}$ kann hier ohne in Betracht kommende Fehler durch $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ ersetzt werden. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{267c}$$

die zu jeder Zeit erfüllt ist, folgt aber, dass ebenso wie η auch $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ und hiernach auch v_1, wenn diese Geschwindigkeit lediglich in Folge der Schwingungsbewegung aus dem anfänglichen Ruhezustande hervorgegangen ist, für alle Punkte eines Querschnitts zur gleichen Zeit denselben Werth hat. An der Wellenbewegung nehmen daher bei der Gezeiten-Welle (abgesehen von den äusserst geringen, durch die hier vernachlässigten Vertikal-Componenten der Trägheitskräfte hervorgebrachten Unterschieden) im Gegensatze zu den Oberflächenwellen alle Wasser-

theilchen eines Querschnitts mit derselben Geschwindigkeit Theil.

Zu Gl. (267c) tritt noch die Continuitäts-Gleichung. Man betrachte den zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegenden Raum. Wenn $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ positiv ist, strömt aus ihm in der Zeiteinheit die Menge

$$b(h+\eta)\frac{\partial v_1}{\partial x}\cdot dx$$

mehr aus als ein, wenn die Breite des Querschnitts mit b bezeichnet wird, so dass $b(h+\eta)$ den Flächeninhalt des Querschnitts angiebt. Wenn mehr ausströmt als einströmt, muss der Wasserinhalt entsprechend abnehmen und dies kann nur dadurch geschehen, dass sich η entsprechend vermindert. Man erhält so die Gleichung

$$b(h+\eta)\frac{\partial v_1}{\partial x}dx = -bdx\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Streicht man auf beiden Seiten die gleichen Faktoren und nimmt man ferner noch an, dass die Spiegelschwankungen η gering sind im Vergleiche zur Tiefe h des Kanals, so dass η gegen h vernachlässigt werden kann, so erhält man die Continuitätsgleichung in der vereinfachten Form

$$h\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{267d}$$

Aus den beiden Differentialgleichungen (267c) und (267d) kann man nun leicht eine der beiden Veränderlichen v_1 und η eliminiren, indem man die eine Gleichung nach x, die andere nach t differentiirt und nach Multiplikation der einen oder anderen mit g oder h beide von einander subtrahirt. Man gelangt so zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= gh\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\end{aligned}\right\}. \tag{267e}$$

Die beiden Veränderlichen v_1 und η müssen daher derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, die

übrigens zu jenen wenigen gehört, deren allgemeine Lösung bekannt ist. Versteht man unter F_1 und F_2 zwei Functionen von beliebigem Bau, so ist

$$v_1 = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \tag{267f}$$

und dieselbe Lösung gilt auch der Form nach für η. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Constante c passend bestimmt wird und zwar findet man beim Einsetzen des Werthes in die Differentialgleichung, dass

$$c = \sqrt{gh} \tag{267g}$$

sein muss. Die Functionen F_1 und F_2 erhalten ihre nähere Bestimmung durch die im Anfangszustande gegebenen Grenzbedingungen. Es ist aber gar nicht nöthig, dies weiter auszuführen, da das Fortpflanzungsgesetz der Welle schon aus Gl. (267f) deutlich genug erkannt werden kann und, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, von der besonderen Wellenform ganz unabhängig ist. Die Gleichung stellt zwei sich übereinander lagernde und in entgegengesetzter Richtung ohne Formänderung fortschreitende Wellen dar. Betrachten wir zunächst die durch das zweite Glied dargestellte, in der Richtung der positiven X-Axe fortschreitende Welle, setzen also

$$v_1 = F_2(x - ct),$$

so erkennen wir, dass wir nach Ablauf einer Zeit $\triangle t$ überall wieder zu demselben Werthe von v_1 gelangen wie vorher, wenn wir zugleich um eine Strecke $\triangle x$ fortschreiten, so dass

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} = c$$

ist. Dasselbe gilt auch für η. Die Welle hat sich also in $\triangle t$ ohne jede weitere Aenderung nur um $\triangle x$ verschoben und die durch Gl. (267g) näher bestimmte Constante c stellt die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Welle dar, die natürlich von der Geschwindigkeit v_1 der Wassertheilchen wohl unterschieden werden muss. Damit ist aber die Aufgabe, die wir uns stellten, gelöst, denn man erkennt auf dieselbe Art, dass auch das erste Glied in Gl. (267f) eine mit der gleichen Geschwindigkeit c, aber im Sinne der negativen X-Axe fort-

schreitende Welle von beliebiger Gestalt darstellt, die sich der ersten überlagert.

Die Fortschreitungsgeschwindigkeit ist nach Gl. (267g) nur von der Tiefe des Gewässers abhängig und zwar ist sie doppelt so gross, als die Fallgeschwindigkeit, die ein Körper beim freien Fall aus einer Höhe h annehmen würde.

§ 47. **Strömung in Röhren; die Zähigkeit des Wassers.**

Die Bewegung des Wassers in Rohrleitungen interessirt den Techniker in hohem Grade. Leider ist jedoch die Theorie dieses Vorgangs so verwickelt, dass man in den praktisch wichtigeren Fällen auf Näherungsannahmen angewiesen ist, die nicht aus der Theorie selbst, sondern aus Versuchsergebnissen abgeleitet sind. Man besitzt zwar eine ganz einfache Theorie, die eine mögliche Bewegungsart für die Wasserströmung in Röhren kennen lehrt. Der Erfahrung zufolge kommt diese Bewegung aber nur dann wirklich zu Stande, wenn die Wassergeschwindigkeit im Rohre verhältnissmässig gering ist. Für jede Rohrweite giebt es nämlich, wie O. Reynolds durch umfangreiche Versuche festgestellt hat, eine gewisse kritische Geschwindigkeit, nach deren Ueberschreitung die Bewegungsart plötzlich wechselt. Bezeichnet man den Durchmesser des Rohrs mit d, die specifische Masse der Flüssigkeit mit μ, den auf den folgenden Seiten näher zu besprechenden Zähigkeits-Coefficienten mit k und versteht man unter K eine aus den Versuchen abgeleitete Constante, so ist die kritische Geschwindigkeit v (als Durchschnittsgeschwindigkeit für den ganzen Rohrquerschnitt aufgefasst) nach Reynolds durch die empirische Formel

$$v = \frac{kK}{\mu d}$$

gegeben. Die Constante K ist, wie aus den Dimensionen der in der Formel auftretenden Grössen hervorgeht, eine absolute Zahl und zu 1900 bis 2000 ermittelt. Setzt man Wasser von

ungefähr 15° C. voraus, wofür k etwa gleich $140 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{sec}$ angenommen werden kann, so erhält man mit $\mu = \frac{1000}{9.81} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ und $K = 2000$ rund

$$v = 28 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{d}$$

also z. B. $v = 0{,}28 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m}$ oder $v = 0{,}0028 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für $d = 1$ m. Man erkennt daraus, dass die kritische Geschwindigkeit bei sehr engen Rôhren verhältnissmässig gross, bei grossen Wasserleitungsröhren aber so klein ist, dass die einfache Theorie für diese ganz ohne Bedeutung ist. In der That stimmen auch die Ergebnisse der einfachen Theorie mit den von Poiseuille an engen Röhren durchgeführten und später öfters wiederholten Versuchen recht gut überein, während der Leitungswiderstand bei weiten Röhren viel grösser ist, als aus der einfachen Theorie folgen würde. Auf diesen Punkt werde ich nachher noch einmal zurückkommen, vorher aber die für die Bewegung in engen Röhren gültige einfache Theorie auseinandersetzen.

Jedenfalls spielt bei allen Wasserströmungen in Röhren (oder auch in offenen Kanälen) die innere Reibung oder mit anderen Worten die Zähigkeit der Flüssigkeit eine so wesentliche Rolle, dass sie von Anfang an in passender Weise berücksichtigt werden muss. Nun weiss man zwar noch keineswegs genau, welchen Gesetzen die Flüssigkeitsreibung unterworfen ist. Es scheint indessen, dass sie — im Gegensatze zur Reibung zwischen festen Körpern — unabhängig von dem Drucke ist, mit dem die einzelnen Stromfäden aufeinandergepresst sind. Dagegen hängt sie sehr wesentlich von den Geschwindigkeitsunterschieden zwischen benachbarten Stromfäden ab. Mit den Geschwindigkeitsunterschieden nimmt auch die innere Reibung bis auf Null ab und solange die Geschwindigkeitsunterschiede nicht zu gross werden, kann man — wenigstens vorläufig und näherungsweise — die innere Reibung als proportional dazu ansehen. Ausserdem hängt die Reibung

natürlich auch von der Art der Flüssigkeit und auch von ihrer Temperatur ab. Um dem Rechnung zu tragen, führen wir eine Constante k ein, die wir als den Zähigkeitscoefficienten bezeichnen wollen. Der Werth von k kann nur durch Versuche ermittelt werden. Für Wasser ist er nach Versuchen von O. E. Meyer

bei	10,1°	15,5°	17,9°	21,6° C.
gleich	157.10^{-6}	136.10^{-6}	129.10^{-6}	$118.10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \text{sec}$

nach Umrechnung auf das technische Maasssystem. Die Dimension von k, die hier angegeben ist, ergiebt sich aus den nachfolgenden Formeln.

Wir betrachten eine Wasserströmung im Rohre, bei der die Stromlinien sämmtlich gradlinig und parallel zur Rohraxe sind. Der Querschnitt des Rohres wird als kreisförmig vorausgesetzt, so dass der Symmetrie wegen die Geschwindigkeit nur von dem Abstande von der Rohraxe abhängig ist. In Abb. 68 stelle der äussere Kreis den inneren Umfang des Rohrs im Querschnitte dar. Wir betrachten die Bewegung des Wassers innerhalb des durch Schraffirung hervorgehobenen Kreises von dem beliebigen Halbmesser x. Die Geschwindigkeit am Umfange dieses Kreises sei gleich v. Wenn x um dx wächst, ändert sich v um dv. Diesem Geschwindigkeitsgefälle ist die Reibung an dem Umfange des schraffirten Kreises zwischen den innerhalb und den ausserhalb liegenden Stromfäden proportional zu setzen. Am Rohrumfange wird das Wasser durch die Reibung an der Rohrwand festgehalten; daher wird die Geschwindigkeit von der Mitte aus mit wachsendem x abnehmen, d. h. dv ist als negativ zu erwarten. Die Reibung zwischen den Stromfäden tritt in solchem Sinne auf, dass das schneller fliessende Wasser das langsamer fliessende mit sich fortzureissen sucht oder — was auf dasselbe hinauskommt — dass das langsamer fliessende das schneller fliessende aufzuhalten sucht. Für die innerhalb des schraffirten Kreises

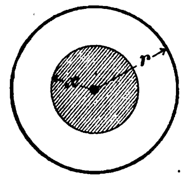


Abb. 68.

liegenden Stromfäden ist die Reibung daher eine verzögernde Kraft, wenn $\frac{dv}{dx}$ negativ ist.

Die Wasserbewegung erfolgt aber nach Voraussetzung gradlinig und daher der Continuitätsbedingung wegen auch mit constanter Geschwindigkeit. Demnach müssen sich alle von aussen her auf ein beliebig abgegrenztes Volumenelement übertragenen Kräfte im Gleichgewichte mit einander halten. Der Kreis vom Halbmesser x bilde den Querschnitt eines Wassercylinders, dessen Länge dz sei. Parallel zur Z-Axe, die mit der Rohraxe zusammenfällt, wirken auf diesen Wassercylinder die Reibungen am Umfange verzögernd ein. Ihre Summe ist gleich

$$2\pi x\, dz \cdot k\, \frac{dv}{dx}.$$

Durch diesen Ansatz wird zugleich die Bedeutung des Zähigkeitscoefficienten k näher definirt. Damit Gleichgewicht bestehe, muss zwischen beiden Cylindergrundflächen ein Druckunterschied von derselben Grösse auftreten. Hiermit erklärt sich zunächst das Druckgefäll längs der Rohraxe, das schon aus der Erfahrung bekannt ist. Bei einer vollkommen reibungsfreien Flüssigkeit wäre zwischen verschiedenen Querschnitten einer horizontal verlaufenden Leitungsröhre kein Druckunterschied zu erwarten. Da ferner v unabhängig von z ist, folgt, dass auch der Druckunterschied proportional mit dz ist. Daher ist

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_0 - p_l}{l} = c, \tag{268}$$

wenn p_0 der Druck im Anfange und p_l der Druck am Ende der Rohrlänge l ist und die Druckabnahme auf die Längeneinheit zur Abkürzung mit c bezeichnet wird. Für das Gleichgewicht der Kraftcomponenten im Sinne der Z-Axe erhalten wir hiernach die Bedingungsgleichung

$$c\,dz \cdot \pi x^2 = -\, 2\pi x\, dz \cdot k\, \frac{dv}{dx}$$

oder kürzer

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{2k}x.$$

Durch Integration folgt daraus

$$v = C - \frac{c}{4k}x^2. \tag{269}$$

Die Integrationsconstante C ist aus der Grenzbedingung am Rohrumfange zu ermitteln. Unter der Voraussetzung, dass die Reibung zwischen einem festen Körper und einer ihn berührenden Flüssigkeit demselben Gesetze folgt, wie die Reibung zwischen verschiedenen Flüssigkeitsschichten, muss man erwarten, dass die Flüssigkeit am Rohrumfange die Geschwindigkeit Null hat, weil einem plötzlichen Sprunge in der Geschwindigkeit zwischen der ruhenden Rohrwand und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht nach unserer Voraussetzung über die Wasserreibung eine unendlich grosse Reibung entsprechen würde. Dieser Schluss scheint auch im Allgemeinen durch die Erfahrung bestätigt zu sein; nach Versuchen von Helmholtz scheint es freilich möglich zu sein, dass zwischen besonders glatten Wänden und angrenzenden Flüssigkeitsschichten auch endliche Geschwindigkeitsunterschiede möglich sind. Es ist aber noch sehr zweifelhaft, ob die betreffenden Beobachtungsergebnisse nicht richtiger darauf zurückzuführen sind, dass der Ansatz für die Flüssigkeitsreibung von vornherein nicht genau zutrifft. An gewöhnlichen Glaswänden oder an den rauhen Oberflächen von Metallröhren dürfte indessen die angrenzende Flüssigkeit festhaften. Ich führe daher die Grenzbedingung ein, dass für $x = r$ die Geschwindigkeit $v = 0$ wird. Damit folgt

$$C = \frac{c}{4k}r^2$$

und hiermit

$$v = \frac{c}{4k}(r^2 - x^2). \tag{270}$$

Trägt man in jedem Punkte eines Durchmessers die zugehörige Geschwindigkeit v in einem passenden Maassstabe rechtwinklig ab, so erhält man als Ge-

schwindigkeitsvertheilungsdiagramm einen Parabelbogen.

Die durch jeden Querschnitt der Röhre in der Zeiteinheit fliessende Wassermenge sei mit Q bezeichnet. Man findet Q, indem man jedes Flächenelement des Querschnitts mit der zugehörigen Geschwindigkeit multiplicirt und hierauf über den ganzen Querschnitt integrirt. Man hat daher

$$Q = \int_0^r v\, 2\pi x\, dx = \frac{2\pi c}{4k}\int_0^r (r^2 x - x^3)\, dx = \frac{\pi c}{8k} r^4. \tag{271}$$

Unter der mittleren Geschwindigkeit v_m der Strömung versteht man jene Geschwindigkeit, die allen Stromfäden zukommen müsste, wenn sie bei allen gleich gross sein und dieselbe Flüssigkeitsmenge Q durch den Querschnitt führen sollte. Man hat daher

$$v_m = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{c r^2}{8k}. \tag{272}$$

Die Geschwindigkeit in der Mitte ist daher doppelt so gross, als die mittlere Geschwindigkeit.

Man verwendet diese Formeln gewöhnlich entweder, um bei gegebenem k den Druckhöhenverlust c für die Längeneinheit zu berechnen, der erforderlich ist, um eine verlangte Flüssigkeitsmenge Q durch die Röhre zu treiben, oder um k aus den übrigen Werthen, die bei einem Versuche direkt beobachtet sind, zu ermitteln. Durch Auflösen nach c findet man aus Gl. (272)

$$c = \frac{p_0 - p_l}{l} = \frac{8 k v_m}{r^2}, \tag{273}$$

d. h. das Druckgefäll wird hiernach proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Rohrweite gefunden.

Bei den Versuchen von Poiseuille mit engen Röhren traf dies zu; bei gewöhnlichen Wasserleitungsröhren und bei den Wassergeschwindigkeiten, mit denen man es in den ge-

wöhnlich vorliegenden Fällen zu thun hat, lehrt aber die Erfahrung, dass das Druckgefäll vielmehr nahezu proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der ersten Potenz der Rohrweite gesetzt werden kann. Man findet, dass der Druckhöhenverlust für eine Rohrlänge, die etwa das 40- bis 50-fache des Rohrdurchmessers beträgt, so gross ist, wie der Druck, der erforderlich ist, um dem Wasser beim Ausströmen aus einem Gefässe in die freie Luft die Geschwindigkeit v_m zu ertheilen. Man drückt dies auch dahin aus, dass der durch die Flüssigkeitsreibung herbeigeführte Verlust an mechanischer Energie auf die angegebene Strecke hin ebenso gross ist, wie die kinetische Energie des strömenden Wassers.

Eine Erklärung für das abweichende Verhalten der Strömung oberhalb der kritischen Geschwindigkeit ist darin zu erblicken, dass die einfache gradlinige Strömung dann nicht mehr stabil ist. Denkt man sich nämlich diese Strömung anfänglich gegeben und setzt voraus, dass durch zufällige Umstände eine geringe Abweichung von ihr veranlasst werde, so fragt es sich, ob diese Abweichung alsdann von selbst wieder erlischt, so dass die ursprüngliche Strömungsart wieder hergestellt wird, oder ob sie sich vielmehr von selbst vergrössert, so dass dadurch die Strömung der Art nach vollständig geändert wird. Im ersten Falle ist die Strömung stabil; im anderen vermag sie sich in der vorausgesetzten Art überhaupt nicht dauernd aufrecht zu erhalten und der endgültige Strömungsvorgang muss ein völlig davon verschiedener werden.

Bis zu einem gewissen Grade vermag man sich durch freilich sehr verwickelte Rechnungen Rechenschaft davon zu geben, wann der eine oder der andere Fall zu erwarten ist. Zu diesem Zwecke denkt man sich die ganze Strömung in eine parallel zur Rohraxe verlaufende Hauptbewegung und eine sich über sie lagernde periodisch wechselnde Nebenbewegung zerlegt, so dass beide die Continuitätsbedingung und die Grenzbedingungen für sich genommen erfüllen. Dabei zeigt sich zunächst, wenn man die im nächsten Paragraphen aufzustellen-

den Bewegungsgleichungen für die zähe Flüssigkeit zu Rathe zieht, dass die Hauptbewegung selbst durch das Bestehen der Nebenbewegung in Mitleidenschaft gezogen wird, so dass für sie andere Gleichungen gelten, als wenn diese wegfiele. Ferner ergiebt sich, dass die lebendige Kraft der ganzen Strömung gleich der Summe der lebendigen Kräfte für die einzeln genommenen beiden Bewegungsantheile gesetzt werden kann. Man leitet dann eine Formel ab für die zeitliche Aenderung $\frac{dE'}{dt}$ der lebendigen Kraft E' der Nebenbewegung und sieht zu, ob dieser Ausdruck negativ oder positiv ausfallen wird. Ueberwiegen die negativen Glieder, so erlischt die Nebenbewegung; im anderen Falle steigert sie sich und die vorausgesetzte Hauptbewegung ist labil.

Ohne auf die Durchführung dieser Betrachtungen weiter einzugehen, erwähne ich nur, dass sie in Uebereinstimmung mit den Beobachtungsthatsachen zu dem Schlusse führt, dass die einfache Hauptbewegung, die wir vorher in diesem Paragraphen betrachteten, um so eher labil werden müsse, je grösser ihre Geschwindigkeit und je grösser der Rohrdurchmesser wird. Dagegen ist es bisher nicht gelungen, auf theoretischem Wege eine bestimmte Auskunft darüber zu erlangen, von welcher Art die Hauptbewegung nach Ueberschreitung der kritischen Geschwindigkeit wird. Von dieser Hauptbewegung hängt natürlich die Beziehung zwischen der durch das Rohr fliessenden Wassermenge und dem Druckgefälle ab.

Einen ungefähren Anhalt dafür erhält man jedoch durch einige einfache Ueberlegungen. Man denke sich wieder wie vorher in Abb. 68 einen Cylinder vom Halbmesser x, aber von einer im Vergleiche zum Rohrdurchmesser grossen Länge L abgegrenzt. Als beschleunigende Kraft wirkt auf die in dem Cylinder enthaltene Wassermasse wieder wie vorher der Druckunterschied an beiden Endquerschnitten. Diese Kraft kann aber jetzt nicht ausschliesslich zur Ueberwindung der Flüssigkeitsreibung am Cylinderumfange verbraucht werden. Wegen der nach Voraussetzung bestehenden „Nebenbewegung“ findet

nämlich zugleich durch den Cylinderumfang ein Austausch von Flüssigkeitstheilchen statt. Da nun die von aussen her eintretenden Theilchen im Allgemeinen eine geringere Geschwindigkeit in der Richtung der Rohraxe mit sich bringen, als die austretenden, so muss ein Theil des bestehenden Druckgefälles zur Beschleunigung dieser Theilchen verwendet werden. Hiermit erklärt sich zunächst, warum das Druckgefäll für die nach der Mitte hin liegenden Wasserfäden grösser werden muss, als wenn die Hauptbewegung mit Ausschluss der Nebenbewegung vor sich ginge. Die der Wand nahe liegenden Schichten erfahren umgekehrt durch die Einwanderung von schneller fliessenden Theilchen aus dem Innern — im Austausche gegen die langsamer fliessenden der äusseren Schichten — einen Antrieb noch über das Druckgefäll hinaus. Daraus folgt, dass dort grössere Flüssigkeitsreibungen zu überwinden sind, d. h. dass die Abnahme der Geschwindigkeit nach aussen hin oder $\frac{dv}{dx}$ in der vorausgehenden Rechnung nach der Wand zu bedeutend grösser werden muss, als dort gefunden wurde. Während im früheren Falle eine parabolische Geschwindigkeitsvertheilung über den Querschnitt gefunden wurde, müssen wir als Folge des Hinzutretens der Nebenbewegungen erwarten, dass sich die Geschwindigkeit von der Mitte aus nach aussen hin zunächst viel weniger ändert und dass erst in der Nähe der Wand ein weit stärkerer Abfall der Geschwindigkeit eintritt.

In der That lehren auch Beobachtungen über die Geschwindigkeitsvertheilung in weiten Rohrleitungen, dass die Geschwindigkeit innerhalb des bis nahe zum Rande hin reichenden mittleren Querschnittstheiles nur wenig, in der Nähe der Rohrwand aber viel schneller nach aussen hin abnimmt. Man kann dies in einfacherer Zusammenfassung der vorhergehenden Erörterungen damit erläutern, dass durch die Durcheinanderrührung der mittleren Wassermassen ein Ausgleich der Geschwindigkeiten herbeigeführt wird. Die der Rohrwand zunächst liegenden Schichten können sich an diesem Ausgleiche nicht betheiligen, da sie wegen der Grenzbedingung am Rande nicht

nach innen hin ausweichen und daher auch nicht gegen von innen zuströmende Massen ausgewechselt werden können.

Die Reibung an der Rohrwand, die für einen bis dahin reichenden Wassercylinder in jedem Falle gleich dem Druckunterschiede zwischen den Endquerschnitten sein muss, ist dem Geschwindigkeitsabfalle $\frac{dv}{dx}$ für $x = r$ proportional. Da nun oberhalb der kritischen Geschwindigkeit dieser Werth viel grösser, als nach den früher aufgestellten Formeln wird, so folgt, dass auch ein entsprechend grösseres Druckgefäll nöthig ist, um die Bewegung zu unterhalten. Es lässt sich auch voraussehen, dass die Mischung der einzelnen Wasserfäden durch die Nebenbewegung um so stärker erfolgt und der Geschwindigkeitsabfall sich um so mehr nach der Rohrwand hin zusammendrängt, je grösser die durchschnittliche Strömungsgeschwindigkeit ist. Hiernach ist zu erwarten, dass der Geschwindigkeitsabfall an der Rohrwand und hiermit auch die Reibung an der Wand, sowie das erforderliche Druckgefäll schneller wachsen als die Geschwindigkeit selbst. Dass freilich das Druckgefäll nun grade der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sein müsse, ist aus dieser Betrachtung nicht abzuleiten. In der That ist es auch nicht wahrscheinlich, dass dies genau zuträfe. Vielmehr weisen die Beobachtungsergebnisse umgekehrt darauf hin, dass der Widerstand etwas langsamer als die zweite Potenz zunehme; nach den Versuchen von Reynolds wäre etwa die 1,7. Potenz der Geschwindigkeit anzunehmen.

§ 48. Die Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten.

Die Entwickelungen in der ersten Hälfte des vorigen Paragraphen bilden das einfachste Beispiel für den heute üblichen Ansatz zur theoretischen Untersuchung von Flüssigkeitsbewegungen, bei denen man den Einfluss der Reibungen — so gut als es eben möglich ist — zu berücksichtigen wünscht. An sie schliessen sich leicht die allgemeineren Bewegungsgleichungen an, von denen man annimmt, dass sie

dem wirklichen Verhalten der zähen Flüssigkeiten am besten entsprechen.

Beim Auftreten von Reibungen ist der Flüssigkeitsdruck nach verschiedenen Richtungen hin verschieden gross. Um die inneren Kräfte in übersichtlicher Weise zu bezeichnen, greift man daher am besten auf die aus der Festigkeitslehre bekannte Darstellungsweise zurück. Für das Gleichgewicht eines Volumenelements erhielten wir in Band III, S. 23 die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.
\end{aligned}$$

Diese können auch hier sofort verwendet werden, wenn man den σ und τ ihre frühere Bedeutung lässt, unter den τ also die Componenten der inneren Reibungen versteht, in die Componenten XYZ der äusseren Massenkraft aber zugleich die Trägheitskraft mit einrechnet, die man beifügen muss, um das dynamische Problem auf ein statisches zurückzuführen.

Gewöhnlich kommt es auf die Schwere nicht an; man fragt vielmehr, wie schon bei der Untersuchung im vorigen Paragraphen, darnach, wie sich der Vorgang gestaltet, wenn das Gewicht ausser Acht gelassen wird. Dann sind unter XYZ nur noch die Componenten der Trägheitskraft zu verstehen und man erhält

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{d v_1}{dt} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\mu \frac{d v_2}{dt} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
\mu \frac{d v_3}{dt} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}
\end{aligned}\right\} . \qquad (274)$$

Diese Gleichungen treten an die Stelle der Euler'schen Gl. (212) oder (213). Für die totalen Differentialquotienten

der Geschwindigkeitscomponenten $v_1 v_2 v_3$ nach der Zeit können auch hier wieder die Werthe aus den Gl. (211) eingeführt werden. — Dass sich das Vorzeichen von $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ gegenüber $-\frac{\partial p}{\partial x}$ hier im Vergleiche zu den Gl. (212) oder (213) umgekehrt hat, ist übrigens einfach darauf zurückzuführen, dass in der Festigkeitslehre Zugspannungen überall positiv gerechnet wurden, während hier ein positives p einen Druck bedeutet.

Wir müssen jetzt noch die Annahme über den Zusammenhang zwischen den inneren Reibungen und den Geschwindigkeitsdifferenzen, von der wir schon im vorigen Paragraphen ausgingen, zum Ausdrucke bringen. Dabei ist vor Allem zu beachten, dass auch hier die in der Festigkeitslehre bewiesenen Gleichungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

unverändert bestehen bleiben. Die innere Reibung τ_{xy} ist zunächst in Zusammenhang zu bringen mit dem Differentialquotienten $\frac{\partial v_2}{\partial x}$, denn v_2 ist gleichgerichtet mit τ_{xy} und für die Reibung τ_{xy} kommt die Aenderung in Betracht, die v_2 erfährt, wenn man in der Richtung x weiter geht. Wenn aber eine Reibung τ_{xy} entsteht, so entspricht ihr zugleich auch eine Reibung τ_{yx} und umgekehrt. Die Reibung τ_{yx} steht nach der früher aufgestellten Annahme im nächsten Zusammenhange mit dem Differentialquotienten $\frac{\partial v_1}{\partial y}$. W i r e r k e n n e n d a r a u s, d a s s f ü r d e n g e m e i n s c h a f t l i c h e n W e r t h v o n τ_{xy} u n d τ_{yx} b e i d e D i f f e r e n t i a l q u o t i e n t e n m a a s s g e b e n d s i n d u n d s e t z e n

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = k\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{275}$$

Dieser Ansatz bildet demnach nur eine folgerichtige Weiter-

bildung des schon im vorigen Paragraphen gewählten. — Mit den für die Schubspannungscomponenten in elastischen Körpern aufgestellten Werthen, Band III, Gl. (288), stimmen übrigens die aus den Gl. (275) eng überein. Man braucht nur an Stelle der Geschwindigkeitscomponenten $v_1 v_2 v_3$ die Verschiebungscomponenten $\xi \eta \zeta$ zu nehmen, und den Zähigkeitscoefficienten k durch den Schubelasticitätsmodul G zu ersetzen, um zu den früheren Formeln zu gelangen. Man kann dies zu einer anschaulichen Darstellung des in den Gl. (275) enthaltenen Ansatzes benützen. Man betrachte nämlich die Wassermasse zu einer gegebenen Zeit und stelle hierauf die Verschiebungen fest, die jeder materielle Punkt während eines passend gewählten kleinen Zeittheilchens erfährt. Wenn ein fester Körper ursprünglich dieselbe Gestalt hatte, wie die Wassermasse und wenn er hierauf deformirt wird, so dass sich jeder materielle Punkt in gleicher Richtung und um ebensoviel verschiebt, wie der ihm in der Wassermasse entsprechende Punkt, so entstehen in diesem Körper Spannungen und die Schubspannungen stimmen für jede Stelle und für jede Schnittrichtung genau überein mit den Reibungen in der Wassermasse. Durch diese Ueberlegung wird die innere Reibung mit einem Deformationszustande in der Wassermasse in Zusammenhang gebracht.

Die gleiche Ueberlegung führt auch zur Aufstellung der Ausdrücke für die Normalspannungen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$. Diese können im Allgemeinen nicht mehr genau gleich unter einander sein; wir denken uns jede von ihnen aus einem gewöhnlichen Flüssigkeitsdrucke p, der nach allen Seiten hin gleich ist, und aus einem Zusatzgliede zusammengesetzt, dessen Werth von der Zähigkeit abhängt. Dieses Zusatzglied bestimmen wir im Uebrigen ebenso aus dem Deformationszustande wie vorher die Schubspannungscomponenten. Wir haben dann in Anlehnung an die Gl. (292) von Band III unter Berücksichtigung der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, die e gleich Null macht, zu setzen

$$\sigma_x = -p + 2k\frac{\partial v_1}{\partial x}; \quad \sigma_y = -p + 2k\frac{\partial v_2}{\partial y};$$
$$\sigma_z = -p + 2k\frac{\partial v_3}{\partial z}. \tag{276}$$

Die Bedeutung von p folgt übrigens leicht aus diesen Gleichungen, wenn man sie addirt. Der Continuitätsbedingung wegen heben sich dabei die mit k behafteten Glieder fort und man behält

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -p,$$

d. h. p ist der arithmetische Mittelwerth des normalen Flüssigkeitsdruckes auf irgend drei zu einander senkrechte Schnittflächen.

Zur Begründung des durch die Gl. (276) ausgesprochenen Ansatzes ist noch darauf hinzuweisen, dass die Ausdrücke für die Schubspannungscomponenten oder Reibungen in den Gl. (275) für jede Orientirung des Coordinatensystems gültig bleiben. Nachdem aber die Componenten τ für alle Schnittrichtungen bereits festgelegt waren, durften die Normalcomponenten σ nicht mehr willkürlich angenommen werden, sondern sie sind damit gleichfalls schon implicite gegeben: durch die Bedingung nämlich, dass alle Spannungen an einem beliebig herausgegriffenen Volumenelemente im Gleichgewichte mit einander stehen müssen. Der Uebergang von den Gl. (275) zu den durch sie mit bedingten Gl. (276) konnte hier am einfachsten durch den Vergleich mit den entsprechenden Untersuchungen der Elasticitätstheorie bewirkt werden. Man weiss nämlich schon von früher her, dass Schubspannungen, die dem Ansatze (275) und Normalspannungen, die dem Ansatze (276) entsprechen, zu einem Gleichgewichtssysteme von Spannungen gehören.

Auch die Arbeiten, die von den Spannungscomponenten an der Oberfläche eines Raumelementes bei der Verschiebung um $v_1 dt$, $v_2 dt$, $v_3 dt$ geleistet werden, sind ebensogross wie bei der durch die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ ausgedrückten Formänderung eines elastischen Körpers. An Stelle der umkehrbar aufgespeicherten Formänderungsarbeit tritt hier freilich ein

Verlust an mechanischer Energie, die während der Zeit dt in Wärme verwandelt wird. Dieser Verlust kann aber im Wesentlichen genau nach denselben Formeln berechnet werden wie die ihm entsprechende elastische Formänderungsarbeit. Gegenüber dem Ansatze in Gl. (296 b), Bd. III, der etwa hierzu übernommen werden kann, ist nur zu beachten, dass die Arbeit hier doppelt so gross ist, als dort, weil dort die Formänderung und die Kräfte von Null an bis zu ihrem Endwerthe wuchsen, während hier die Kräfte während der ganzen Formänderung denselben Werth behalten.

Wenn $k = 0$ ist, wird die Arbeit der Spannungen an jedem Raumelemente zu Null, d. h. in der vollkommenen Flüssigkeit kann keine mechanische Energie verloren gehen. Man kann daher eine vollkommene Flüssigkeit auch dahin definiren, dass bei ihr (abgesehen von Stossvorgängen, bei denen Flüssigkeitstheile mit endlich verschiedenen Geschwindigkeiten unmittelbar aufeinanderprallen) keine mechanische Energie in Wärme verwandelt werden kann.

Setzt man die Werthe für die Spannungscomponenten in die erste der Gl. (274) ein, so geht diese über in

$$\mu \frac{d v_1}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + k \left\{ 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} \right\}$$

Nach der Continuitätsgleichung ist aber

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

und daher auch

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} = 0.$$

Hiernach heben sich drei Glieder in der Klammer gegeneinander fort und man erhält mit Einführung des Zeichens ∇^2 für die Laplace'sche Operation

$$\mu \frac{d v_1}{d t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + k \nabla^2 v_1 .$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Axenrichtungen. Setzt man noch an Stelle der Beschleunigungs-

componenten ihre Werthe aus den Gl. (211), S. 372, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + k\nabla^2 v_1 \\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + k\nabla^2 v_2 \\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + k\nabla^2 v_3 \end{aligned}\right\} \quad (277)$$

Mit $k = 0$ gehen diese wieder in die Euler'schen Gleichungen über. Man kann auch alle drei Gleichungen in eine einzige Vektorgleichung zusammenfassen. wie es früher mit den Euler-schen Gleichungen in Gl. (214) geschehen war. Diese Gleichung lautet hier

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}\right) = -\nabla p + k\nabla^2 \mathfrak{v}. \quad (278)$$

Wegen der verwickelten Gestalt dieser Bewegungsgleichungen macht die Lösung von Aufgaben über die Bewegung zäher Flüssigkeiten weit mehr Schwierigkeiten, als die Lösung der entsprechenden Aufgaben für reibungsfreie Flüssigkeiten. Um diese Schwierigkeiten zu vermindern, begnügt man sich meist damit, den Bewegungsvorgang unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass die Geschwindigkeiten nur sehr klein seien. Dann kann in Gl. (278) auf der linken Seite $(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}$ gegen $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ vernachlässigt, d. h.

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

gesetzt werden. Für eine stationäre Bewegung fällt dann die linke Seite überhaupt ganz fort und man erhält

$$k\nabla^2 \mathfrak{v} = \nabla p, \quad (279)$$

wozu noch die Continuitätsgleichung kommt. Durch Zerlegen in Componenten wird übrigens aus (279)

$$k\nabla^2 v_1 = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad k\nabla^2 v_2 = \frac{\partial p}{\partial y}; \quad k\nabla^2 v_3 = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (280)$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y und die dritte nach z und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Continuitätsbedingung

$$\nabla^2 p = 0. \tag{281}$$

Man gelangt nun zu möglichen Flüssigkeitsbewegungen, wenn man zuerst für p eine Function der Coordinaten $p = f(xyz)$ wählt, die der vorausgehenden Gleichung genügt. Da es sich dabei um die einfache Laplace'sche Gleichung handelt, vermag man beliebig viele partikuläre Lösungen ohne Weiteres anzugeben. Hierauf muss die Strömung, die dieser Druckvertheilung entspricht, mit Hülfe der Gl. (279) oder (280) ermittelt werden. Auf eine nähere Beschreibung des Weges, der hierzu eingeschlagen werden kann, werde ich mich aber hier nicht einlassen.

Dagegen soll noch ein specielles Beispiel, nämlich die Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit Erwähnung finden, womit die Untersuchung in § 41 eine willkommene Ergänzung erfährt. Man setze

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{4} a \frac{\varrho x z}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) \\ v_2 &= \frac{3}{4} a \frac{\varrho y z}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) \\ v_3 &= \frac{3}{4} a \frac{\varrho z^2}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) + a - a\frac{\varrho}{4r}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 3\right) \end{aligned}\right\}. \tag{282}$$

Für alle Punkte auf der Oberfläche der Kugel vom Halbmesser ϱ, also für $r = \varrho$ verschwinden diese Geschwindigkeitscomponenten. Für $r = \infty$ verschwinden v_1 und v_2, während $v_3 = a$ wird, d. h. die Flüssigkeit bewegt sich in grösserer Entfernung von der Kugel parallel zur Z-Axe mit der Geschwindigkeit a. Für die Differentialquotienten der Componenten $v_1 v_2 v_3$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{3}{4} a\varrho z\left(\frac{\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\frac{x^2}{r^7}\varrho^2 + 3\frac{x^2}{r^5}\right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= \frac{3}{4} a\varrho z\left(\frac{\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\frac{y^2}{r^7}\varrho^2 + 3\frac{y^2}{r^5}\right) \\ \frac{\partial v_3}{\partial z} &= \frac{3}{4} a\varrho z\left(\frac{3\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\frac{z^2}{r^7}\varrho^2 + 3\frac{z^2}{r^5}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{283}$$

Addirt man die drei Werthe zu einander, so erhält man Null; die Continuitätsbedingung ist also erfüllt und durch die Gl. (282) wird in der That eine geometrisch mögliche Flüssigkeitsbewegung beschrieben, die, wie wir vorher schon sahen, auch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der ruhenden Kugel und im Unendlichen erfüllt.

Zur Ausführung der Laplace'schen Operation ∇^2 an den Ausdrücken (282) kann man sich der in Band III, § 71 bei Durchführung einer mit der jetzigen analytisch sehr eng verwandten Untersuchung abgeleiteten Sätze bedienen. Wir fanden damals z. B. in Gl. (358), S. 464, 2. Aufl.

$$\nabla^2 \frac{xz}{r^3} = - \frac{6xz}{r^5}$$

und auf demselben Wege erhält man auch

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r^5}\right) = \frac{20}{r^7} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \frac{xz}{r^5} = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus den Gl. (282)

$$\nabla^2 v_1 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{xz}{r^5}; \quad \nabla^2 v_2 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{yz}{r^5};$$

$$\nabla^2 v_3 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{z^2}{r^5} - \frac{3}{2} \frac{a\varrho}{r^3}.$$

Trägt man diese Werthe in die Gl. (280) ein, so erhält man nach Ausführung der leicht zu bewerkstelligenden Integration

$$p = p_0 - \frac{3}{2} ak\varrho \frac{z}{r^3}. \tag{284}$$

Die Integrationsconstante p_0 bedeutet den Flüssigkeitsdruck in grossem Abstande von der Kugel, auf den es aber im Uebrigen nicht ankommt.

Es fragt sich jetzt nur noch, wie gross der resultirende Druck ist, den die Flüssigkeit auf die ihr im Wege stehende Kugel ausübt. Aus Symmetriegründen muss diese Kraft parallel zur Z-Axe sein. Bezeichnen wir sie mit P, so ist zunächst

$$P = \int dF \cdot p_{nz},$$

wenn mit p_{nz} die Z-Componente des specifischen Flüssigkeitsdrucks im Oberflächenelemente dF der Kugel bezeichnet und die Integration über die ganze Kugelfläche erstreckt wird.

Für p_{nz} hat man aber nach Gl. (6), S. 25 von Band III

$$p_{nz} = \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny).$$

Dabei kann man die Richtungscosinus der Normalen zur Kugeloberfläche in unserem Falle leicht in den Coordinaten von dF ausdrücken, womit der vorige Ausdruck übergeht in

$$p_{nz} = \frac{z}{\varrho}\sigma_z + \frac{x}{\varrho}\tau_{xz} + \frac{y}{\varrho}\tau_{yz}.$$

Für die Spannungscomponenten σ_z u. s. f. an der Kugeloberfläche findet man aus den Gl. (275) und (276), nachdem man in diese die Geschwindigkeitscomponenten aus den Gl. (282) eingesetzt und hierauf $r = \varrho$ gemacht hat,

$$\sigma_z = -p_0 + \frac{3ak}{2}\left(\frac{3z}{\varrho^2} - \frac{2z^3}{\varrho^4}\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3ak}{2}\left(\frac{x}{\varrho^2} - \frac{2xz^2}{\varrho^4}\right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3ak}{2}\left(\frac{y}{\varrho^2} - \frac{2yz^2}{\varrho^4}\right).$$

Hiermit wird endlich

$$P = \frac{1}{\varrho}\int dF\left\{-p_0 z + \frac{3ak}{2}\left[\frac{3z^2}{\varrho^2} - \frac{2z^4}{\varrho^4} + \frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{2x^2z^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{2y^2z^2}{\varrho^4}\right]\right\}.$$

Beachtet man, dass

$$\int dF \cdot z = 0$$

ist, und dass sich die Glieder in der eckigen Klammer zu 1 zusammenziehen, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$P = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{3ak}{2}\int dF,$$

oder wenn man für die Kugeloberfläche $\int dF$ ihren Werth $4\pi\varrho^2$ einführt,

$$P = 6\pi ak\varrho, \tag{285}$$

d. h. der resultirende Flüssigkeitsdruck wird proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und zu-

gleich auch proportional der ersten Potenz des Kugelhalbmessers gefunden.

Besonders zuverlässig ist dieses Resultat, wie schon früher bemerkt wurde, freilich keineswegs. Vor allem muss man sich erinnern, dass die ganze Betrachtung nur für sehr kleine Geschwindigkeiten a gültig ist. Für solche scheint nun freilich die Proportionalität mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit hinreichend genau durch die Erfahrung bestätigt zu sein. Für grössere Geschwindigkeiten wächst aber der Erfahrung nach P jedenfalls schneller als a, und zwar ungefähr proportional mit dem Quadrate von a. Auch dass P dem Halbmesser und nicht der Fläche der Kugel proportional gefunden wurde, befremdet zunächst und für grössere Geschwindigkeiten trifft dies auch in Wirklichkeit nicht zu.

Anmerkung. Eine Anwendung von besonderer Art findet die Theorie der zähen Flüssigkeiten auf die Reibungserscheinungen zwischen gut geschmierten Maschinentheilen. Unter der Voraussetzung, dass das Schmiermittel die im Eingriffe mit einander stehenden Theile vollständig trennt, kann die Reibung nur in der Schmierschicht übertragen werden. Insofern sich das Schmiermittel ähnlich wie eine zähe Flüssigkeit verhält, kommt dann eine Flüssigkeitsreibung in Betracht, die nach Annahme vom Drucke unabhängig und der Geschwindigkeit proportional ist. Bis zu einem gewissen Grade wird dies auch, wie schon in Band I besprochen wurde, durch die Erfahrung bestätigt. Man muss nur hinzufügen, dass das Schmiermittel bei hohem Drucke eine gewisse Festigkeit oder wenigstens grosse Zähigkeit besitzen muss, damit es nicht aus der Druckfläche herausgepresst wird. So habe ich vor Kurzem gefunden, dass man bei Gelenkbolzen unter hohem Drucke (von 200 atm an) bei Schmierung mit Stearin oder Paraffin, also mit Körpern, die man unter gewöhnlichen Umständen nicht als Flüssigkeiten bezeichnen kann, nur sehr geringe Reibungen hat. Bei Verwendung von Maschinenöl oder von „consistentem Fett", wie es im Handel erhältlich ist, wird die Reibung unter den angegebenen Umständen etwa 50mal so gross als bei harten Schmiermitteln. Eine Theorie der Reibung, die auf diese Umstände keine Rücksicht nimmt, hat keinen praktischen Werth.

§ 48a. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft in der technischen Hydraulik.

Bei einer Reihe von Fragen über Flüssigkeitsbewegungen, die beim heutigen Stande unseres Wissens keine genauere Beantwortung zulassen, stützt man sich, um wenigstens zu einer näherungsweise zutreffenden Lösung zu gelangen, auf eine Annahme, die in manchen Fällen bis zu einem gewissen Grade durch unmittelbare Versuchsergebnisse gerechtfertigt erscheint, auf andere Fälle aber zugleich in ziemlich willkürlicher Weise übertragen wird. Diese Annahme ist unter der Bezeichnung des Carnot'schen Satzes bekannt. Der Umstand, dass sich die Aussage des Satzes im Wesentlichen mit jener deckt, zu der wir bei der Untersuchung des unelastischen Stosses starrer Körper in § 25b auf Grund einer Betrachtung gelangten, die sich für den dort vorausgesetzten Fall als eine streng beweisbare Folgerung aus den zuverlässigsten Grundgesetzen der Mechanik darstellte, erweckt leicht die Meinung, als ob dem Satze auch bei den Anwendungen, die er in der Hydrodynamik findet, eine ähnliche Bedeutung zukomme. Davor ist aber entschieden zu warnen. Vielmehr sind alle Versuche, die man seither unternommen hat, den Carnot'schen Satz für Flüssigkeitsbewegungen aus den Grundgesetzen der Mechanik abzuleiten, missglückt; die angeblichen Beweise sind nur Scheinbeweise, insofern als dabei Annahmen mit unterlaufen, die selbst wieder ebenso willkürlich und unberechtigt sind, als der Satz selbst, den man beweisen will. Es ist nöthig, dass man sich hierüber im Klaren ist, um sich vor einer Ueberschätzung der Zuverlässigkeit der aus dem Carnot'schen Satze abgeleiteten Rechnungen zu bewahren. Dagegen ist es ganz gerechtfertigt, unter dem Vorbehalte des Zweifels an der Genauigkeit der erlangten Resultate in solchen Fällen, bei denen eine hinlängliche Bestätigung durch die Ergebnisse von Versuchen fehlt, die Rechnungen unter Annahme des Carnot'schen Satzes durchzuführen, um überhaupt ein Resultat zu erlangen, dem eine ungefähre Wahrscheinlichkeit zukommt, indem man sonst

bei Verwerfung dieser Annahme der Frage überhaupt ganz rathlos gegenüber stehen würde. Eine selbst nur ganz bedingungsweise und ungefähr zutreffende Theorie ist, sofern man sie nur mit der nöthigen Vorsicht benutzt, immer noch besser, als gar keine.

Die einfachste Erscheinung, auf die man den Carnot'schen Satz anzuwenden pflegt und für die er auch durch die darüber vorliegenden Versuchsergebnisse als hinlänglich bestätigt zu erachten ist, besteht in dem Druckhöhenverluste, der in Folge einer plötzlichen Erweiterung des Rohrquerschnitts beim Strömen des Wassers in einer Rohrleitung eintritt.

In Abb. 68a sei AB ein Längsschnitt durch das engere, BC ein Schnitt durch das weitere Rohr, das sich bei B in schroffem Uebergange an jenes ansetzt. In den Querschnitten A und C der beiden Rohre, die weit genug von der Uebergangsstelle abliegen, erfolgt die Strömung voraussichtlich ungefähr in parallelen Stromfäden. Bei B gehen die Stromfäden, wie man annimmt, etwa in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise auseinander.

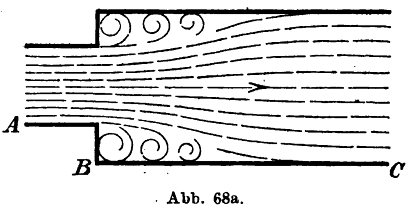


Abb. 68a.

Zwischen den äussersten Stromfäden dieses Bündels und den Rohrwänden liegt an der Uebergangsstelle ein Raum, dessen Wasserinhalt an der fortschreitenden Wasserströmung nicht Theil nimmt, sondern in einer wirbelnder Bewegung begriffen ist, die einerseits durch die Reibung der angrenzenden Stromfäden fortdauernd unterhalten wird, während andererseits die Energie dieser wirbelnden Bewegung durch die inneren Reibungen der Wassermasse und durch die Reibungen an der Gefässwand aufgezehrt wird. Wenn der Vorgang auch nicht von ganz so einfacher Art sein kann, wie er in dieser Schilderung dargestellt wird, spielt er sich doch, wie unmittelbare Beobachtungen erkennen lassen, ungefähr in der angegebenen Weise ab und namentlich kann kaum ein Zweifel darüber erhoben werden, dass der thatsächlich nachweisbare Verlust an

mechanischer Energie bei der Erweiterungsstelle auf Rechnung der wirbelnden Bewegungen zu setzen ist, die dort eintreten.

Bei einem ganz allmählichen Uebergange des engeren Rohrquerschnitts in den weiteren wird dieser Energieverlust vermieden; nur jener, im Vergleiche dazu wesentlich kleinere Energieverlust bleibt auch hier noch bestehen, der schon in den cylindrischen Theilen der Rohrleitung überall auftritt. Von diesem möge der Einfachheit halber jetzt abgesehen werden; er lässt sich nachträglich ohnehin leicht berücksichtigen. Bezeichnet man dann mit v_0 und p_0 die Geschwindigkeit und den Druck im engeren Rohre beim Querschnitte A, mit v_1 und p_1 dieselben Grössen für den Querschnitt C des weiteren Rohres und mit h den etwa bestehenden Höhenunterschied zwischen beiden Querschnitten (wobei C tiefer liegen soll, als A, wenn h positiv ist), so besteht für den Fall eines allmählichen Uebergangs aus dem engeren in den weiteren Rohrquerschnitt nach Gl. (225) dieses Bandes oder auch schon nach Gl. (139) des ersten Bandes zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$p_1 + \frac{\gamma v_1^2}{2g} = p_0 + \frac{\gamma v_0^2}{2g} + \gamma h. \tag{285a}$$

Für den Fall des durch Abb. 68a dargestellten schroffen Uebergangs wird dagegen der Druck p' im weiteren Rohre kleiner, als das nach dieser Gleichung berechnete p_1 und der Unterschied $p_1 - p'$ giebt den durch die plötzliche Erweiterung hervorgebrachten Druckverlust an. Jeder Druck p kann übrigens mit Hülfe der Beziehung

$$p = \gamma H$$

stets auch in einer ihm zugehörigen Druckhöhe H ausgedrückt werden und der Unterschied

$$H_1 - H' = \frac{p_1 - p'}{\gamma}$$

giebt den Druckhöhenverlust an, wenn unter γ, wie schon in der vorigen Gleichung, das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit verstanden wird. Auch der zugehörige Energieverlust Verl lässt sich in den vorigen Grössen sofort aus-

drücken, indem der dem Herabsinken einer Wassermasse M vom Gewichte Mg um die Höhe $H_1 - H'$ entsprechende Energieunterschied

$$\text{Verl} = Mg\,(H_1 - H') = \frac{Mg}{\gamma}\,(p_1 - p') \tag{285b}$$

ist. — Zur Berechnung des Druckes p' fehlt es im vorliegenden Falle an einer einwandfreien Unterlage; man bedient sich daher hierzu der Hypothese, dass der Energieverlust bei dem Geschwindigkeitswechsel von v_0 auf v_1 ebenso gross sei, wie beim Stosse plastisch-starrer Körper nach der Carnot'schen Formel. Man setzt also

$$\text{Verl} = \frac{M\,(v_0 - v_1)^2}{2} \tag{285c}$$

und diese Gleichung gestattet, in Verbindung mit den vorhergehenden, sowohl $p_1 - p'$, als p' selbst zu berechnen. Zunächst erhält man aus dem Vergleiche von (285c) mit (285b)

$$p_1 - p' = \frac{\gamma\,(v_0 - v_1)^2}{2g}$$

woraus nach Einsetzen von p_1 aus Gl (285a)

$$p' = p_0 + \frac{\gamma\,(v_0^2 - v_1^2)}{2g} + \gamma h - \frac{\gamma\,(v_0 - v_1)^2}{2g}$$

$$= p_0 + \gamma h + \frac{\gamma}{g}\,v_1\,(v_0 - v_1) \tag{285d}$$

gefunden wird. Die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 sind als gegegeben zu betrachten, wobei nur zu beachten ist, dass sich beide umgekehrt wie die zugehörigen Querschnittsflächen verhalten. Liegen beide Rohrquerschnitte A und C in gleicher Höhe, wie in Abb. 68a, so ist das Glied γh zu streichen.

Um ferner zu zeigen, in welcher Weise man gewöhnlich eine Begründung für den hier willkürlich eingeführten Ansatz in Gl. (285c) zu geben versucht, wähle ich eine Darstellung, die geeignet ist, den Kern der Sache möglichst deutlich hervortreten zu lassen. In Abb. 68b, die sich auf denselben Fall bezieht, wie schon Abb. 68a, seien wieder zwei Querschnitte A und C im engeren und im weiteren Rohre von den

Flächeninhalten F_0 und F' ausgewählt, die man jetzt am besten in ziemlich grossem Abstande von der Erweiterungsstelle B annimmt. Wir betrachten die ganze Wassermasse, die in einem gegebenen Augenblicke zwischen den Querschnitten F_0 und F_1 enthalten ist und berechnen den Abstand s_0 des Schwerpunktes dieser Masse vom Anfangsquerschnitte F_0. Dieser wird leicht zu

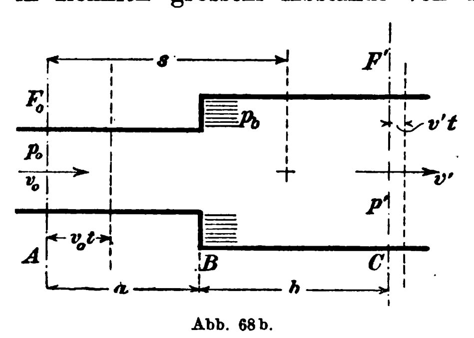


Abb. 68 b.

$$s_0 = \frac{a F_0 \cdot \frac{a}{2} + b F' \left(a + \frac{b}{2}\right)}{a F_0 + b F'}$$

gefunden. Nach Ablauf einer Zeit t, die nicht zu gross gewählt werden darf, befindet sich dieselbe Wassermasse, wenn von Geschwindigkeitsunterschieden der parallelen Stromfäden innerhalb der Querschnitte A und C abgesehen werden kann, zwischen zwei anderen Querschnitten, die sich gegen die Anfangslage um $v_0 t$ bezw. $v' t$ verschoben haben. Berechnet man auch jetzt wieder den Schwerpunktsabstand s derselben Wassermasse von dem ursprünglichen Anfangsquerschnitte, so erhält man

$$s(aF_0 + bF') = (a - v_0 t) F_0 \cdot \frac{a + v_0 t}{2} + (b + v' t) F' \cdot \left(a + \frac{b + v' t}{2}\right).$$

Durch diese Gleichung wird der Schwerpunktsweg s der ins Auge gefassten Wassermenge als Function der Zeit t dargestellt. Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit erhält man daraus die Beschleunigung (bezw. Verzögerung), die der Schwerpunkt erfährt. Man findet

$$(aF_0 + bF') \frac{d^2 s}{dt^2} = - v_0^2 F_0 + v'^2 F'$$

oder wenn man mit der specifischen Masse $\frac{\gamma}{g}$ beiderseits multiplicirt und auf der linken Seite die zwischen beiden Querschnitten

enthaltene Wassermasse, auf die sich die Gleichung bezieht, der Kürze halber mit m bezeichnet,

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - \gamma \left(\frac{v_0{}^2 F_0 - v'^2 F'}{g} \right). \tag{285e}$$

Hierbei ist noch zu beachten, dass $v_0 F_0 = v' F'$ ist, da jedes dieser Produkte das in der Zeiteinheit die Röhre durchfliessende Wasservolumen darstellt. Bezeichnet man daher, wie schon in den früheren Entwickelungen, die Masse dieses Volumens mit M, so geht die Gleichung auch über in

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - M (v_0 - v'). \tag{285f}$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts ist das auf der linken Seite stehende Produkt gleich der Summe aller äusseren Kräfte, die auf die gesammte Wassermasse einwirken. Dabei brauchen wir nur auf jene Componenten der äusseren Kräfte zu achten, die in die Bewegungsrichtung fallen. Der Bewegung entgegen wirkt der Druck $F'p'$, der im Querschnitte C als äussere Kraft auf die betrachtete Wassermasse übertragen wird. Gleichgerichtet mit der Bewegung ist der Druck $F_0 p_0$ im Querschnitte A und der Druck, den die zur Rohraxe senkrechte Abschlusswand an der Erweiterungsstelle B auf die Wassermasse ausübt. Der Flächeninhalt dieser Abschlusswand ist gleich $F' - F_0$. Wie sich der Flüssigkeitsdruck über diese Wand vertheilt, ist unbekannt. Bezeichnen wir den ebenfalls unbekannten Mittelwerth dieses Flüssigkeitsdruckes mit p_b, so ist der von der Abschlusswand B herrührende Druck auf die Wassermasse gleich $(F' - F_0) p_b$. Sieht man, wie es zunächst geschehen sollte, von der Reibung zwischen der Flüssigkeit und den Rohrwänden ab, so steht an allen anderen Stellen der von der Rohrwand auf die Flüssigkeit ausgeübte Druck senkrecht zur Rohraxe und liefert keine Componente in der Richtung der Schwerpunktsbewegung. Wenn das Rohr, wie hier ferner angenommen werden soll, horizontal liegt, hat auch das Eigengewicht keine Componente in der Bewegungsrichtung und der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts führt daher zu der Gleichung

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = -F'p' + F_0 p_0 + (F' - F_0)p_b, \qquad (285\text{g})$$

aus der durch Vergleich mit Gl. (285f) folgt

$$F'p' - F_0 p_0 - (F' - F_0)p_b = M(v_0 - v'). \qquad (285\text{h})$$

Abgesehen von der vorher zur Vereinfachung der Betrachtungen eingeführten Annahme, dass auf die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den parallelen Wasserfäden innerhalb der Querschnitte A und C nicht geachtet zu werden brauche (welche Annahme aber an sich unwesentlich ist und leicht auch vermieden werden könnte), sowie der vorläufig als zulässig angenommenen Vernachlässigung der Reibung des Wassers an den Rohrwänden, lässt sich gegen die strenge Gültigkeit dieser Betrachtungen bis hierher in der That nichts einwenden. Zur Ermittelung der Unbekannten p' ist aber Gl. (285h) noch nicht verwendbar, da in ihr ausserdem noch die zweite Unbekannte p_b vorkommt. Hier muss nun, um zu einem greifbaren Resultate zu gelangen, ausserdem noch eine willkürliche Annahme hinzutreten. Man setzt willkürlich voraus, dass

$$p_b = p_0 \qquad (285\text{i})$$

gesetzt werden könne. Schliessen wir uns dem an, so finden wir aus Gl. (285h)

$$p' = p_0 + \frac{M}{F'}(v_0 - v') = p_0 + \frac{\gamma v'}{g}(v_0 - v') \qquad (285\text{k})$$

in Uebereinstimmung mit der aus der Carnot'schen Annahme abgeleiteten Gleichung (285d). Natürlich kann, nachdem diese Gleichung auf solche Art gefunden ist, daraus auch rückwärts wieder die Carnot'sche Formel (285c) hergeleitet werden, von der die Gleichung früher als eine Folgerung erschien. Die durch Gl. (285i) ausgesprochene Annahme ist daher gleichbedeutend mit der Voraussetzung der Gültigkeit der Carnot-schen Formel (285c); die eine ist aber ebenso willkürlich als die andere und ein Beweis des Carnot'schen Satzes, der sich auf die Annahme (285i) stützt, ist daher nicht nur werthlos, sondern auch schädlich, da er Solche, die den Fehler nicht merken, zu weiteren falschen Schlüssen verführen kann.

Hierzu bemerke ich noch, dass man den Beweisgang im Einzelnen noch mannichfach verändern kann, ohne dass davon der Kern der Sache berührt würde. Man kann z. B. zur Herleitung von Gl. (285k) an Stelle des Satzes von der Bewegung des Schwerpunkts auch den Satz vom Antrieb benutzen, wodurch die Entwickelung zudem noch etwas abgekürzt wird. Aber auch in diesem Falle bildet die willkürliche Annahme, die durch Gl. (285i) ausgesprochen wird, die wesentliche Unterlage des Schlussresultats. — Eine direkte Prüfung der Zulässigkeit dieser Annahme könnte dadurch ausgeführt werden, dass man die Abschlusswand B an verschiedenen Stellen anbohrte und von da feine Röhrchen zu dem Rohre A führte. Durch diese Röhrchen dürfte keine Wasserströmung stattfinden, wenn der Druck an beiden Enden gleich gross sein sollte. Soviel mir bekannt ist, hat man dies bisher nicht ausgeführt, sondern die hinreichend genaue Gültigkeit der ganzen Betrachtung stets nur aus dem Vergleiche der Formeln (285d) bezw. (285k) mit manometrischen Messungen von p_0 und p' in den Rohrquerschnitten A und C nachgewiesen. Auch darüber scheinen bisher keine Versuche vorzuliegen, welchen Einfluss die Zähigkeit der Flüssigkeit auf die mehr oder weniger genaue Uebereinstimmung der vorausgehenden Formeln mit der Wirklichkeit hat. Namentlich nach dem auf der Annahme $p_b = p_0$ fussenden Scheinbeweise des Carnot'schen Satzes könnte man zu dem Schlusse verleitet werden, dass die Zähigkeit nicht von Einfluss auf den durch die plötzliche Erweiterung herbeigeführten Energieverlust sein könne. Ich glaube aber daran zweifeln zu müssen; zum mindesten wäre es erwünscht, das Verhalten von anderen Flüssigkeiten, z. B. von Oel darauf hin durch den Versuch zu prüfen.

Die vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich stets auf den Fall, dass das Wasser aus dem engeren Rohre in das weitere übertritt. Auf den Fall der umgekehrten Strömungsrichtung sind die aufgestellten Formeln nicht verwendbar. Man hilft sich, um für diesen Fall eine Näherungsformel für den Druckverlust zu erhalten, damit, dass man zunächst die Con-

traction ins Auge fasst, die der Strahl beim Uebergange in das engere Rohr erfährt. Im engsten Querschnitte des contrahirten Strahls ist die Geschwindigkeit am grössten und von da ab nimmt sie in dem Maasse wieder ab, als sich der Strahlquerschnitt vergrössert, bis er nach einiger Zeit den vollen Querschnitt des engeren Rohres ausfüllt. Der Energieverlust, der dem Uebergange aus der grössten Geschwindigkeit in die normale Geschwindigkeit im engeren Rohre entspricht, wird dann wiederum nach der Carnot'schen Formel berechnet. Unter der Voraussetzung, dass der Contractions-Coefficient bekannt ist, steht der Durchführung dieser Rechnung, die sich ganz so abspielt, wie im vorigen Falle, kein Hinderniss im Wege.

Auch in einer Reihe von anderen Fällen über Wasserbewegungen gelangt man in ganz ähnlicher Art unter Zugrundelegung des Carnot'schen Satzes zu einer annähernden Lösung. Als Beispiel hierfür möge noch die Berechnung eines Strahlapparates angeführt werden. Mischen sich nämlich zwei Wasserstrahlen, die in parallelen Richtungen zugeführt werden und von denen der eine vorher mit der Geschwindigkeit v_1 unter dem Drucke p_1 strömte, während sich die Buchstaben $v_2 p_2$ auf den zweiten Strahl und $v p$ auf den vereinigten Strahl beziehen sollen, so setzt man den Verlust an mechanischer Energie bei der Vereinigung, dem Carnot'schen Satze entsprechend, zu

$$\text{Verl} = m_1 \frac{(v_1 - v)^2}{2} + m_2 \frac{(v - v_2)^2}{2}$$

an. Dabei bedeuten m_1 und m_2 die auf die Zeiteinheit bezogenen Wassermassen beider Strahlen, die sich selbst wieder in den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und den Querschnitten der beiden Zuführungsrohre ausdrücken lassen. An der Vereinigungsstelle ist $p_1 = p_2$ zu setzen und der Druck p nach der Vereinigung (am Ende des „Mischungsraumes", wie man sich ausdrückt) kann auf Grund des gewählten Ansatzes so wie vorher berechnet werden. Wegen der weiteren Ausrechnung, auf die hier nicht eingegangen werden kann, sei auf das Werk

von Zeuner über die Theorie der Turbinen, Leipzig 1899, verwiesen.

§ 49. **Grundwasserströmungen.**

Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen ist die Bewegung des Wassers durch ein Filter oder durch eine wasserdurchlässige Bodenschicht, die gleichfalls als ein Filter betrachtet werden kann. Am nächsten verwandt ist diese Bewegung mit der in § 47 besprochenen Strömung durch ein sehr enges Rohr. Die Wassertheilchen müssen sich durch die engen und unregelmässig aufeinander folgenden Hohlräume des Filters hindurchwinden und können auch bei grossen Druckunterschieden wegen der Reibung an den dicht bei einander liegenden Sandkörnern o. dgl. verhältnissmässig nur sehr geringe Geschwindigkeiten annehmen.

Wenn zum Zwecke der Wassergewinnung ein Schacht in eine wasserführende Schicht des Bodens abgeteuft und das Wasser durch eine Pumpe daraus stetig entnommen wird, senkt sich der Grundwasserspiegel an dieser Stelle. Hierdurch entsteht ein Gefäll nach dem Brunnen hin von solcher Grösse, dass der dadurch bewirkte Zufluss des Grundwassers im Beharrungszustande ebenso gross ist, als die Wasserentnahme aus dem Brunnen. Die Zuflussgeschwindigkeit übersteigt hierbei selten einige Meter in der Stunde und ist in einiger Entfernung vom Brunnen noch erheblich geringer. Die lebendige Kraft des strömenden Wassers ist daher sehr gering und die durch die Spiegelsenkung ausgelöste potentielle Energie wird fast ausschliesslich zur Ueberwindung der Reibungen verbraucht.

Es lässt sich hiernach schon erwarten, dass das zur *Aufrechterhaltung der Strömung erforderliche Druckgefäll wie bei den engen Röhren, die mit geringer Geschwindigkeit durchströmt werden, der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.* Dies steht auch in guter Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Im Uebrigen kommt es natürlich wesentlich auf die Zusammensetzung des Filters, auf die Grösse, Gestalt und Lagerung der

Sandkörner u. s. f. an, wie gross das zu einer gegebenen Strömungsgeschwindigkeit erforderliche Druckgefäll sein muss. Die Zusammensetzung des Bodens kann auch längs der wasserführenden Schicht starken und unregelmässigen Schwankungen unterworfen sein, durch die Abweichungen in der Wasserbewegung herbeigeführt werden, die sich nicht voraussehen lassen. Immerhin wird man sich zunächst ein Urtheil darüber verschaffen müssen, welche Bewegung unter regelmässigen Umständen zu Stande käme.

Wie man Aufgaben dieser Art behandelt, wird sich aus dem folgenden einfachen Beispiele ergeben, auf dessen Untersuchung ich mich hier beschränke. In Abb. 69 sei AB der horizontale Grundwasserspiegel vor dem Betriebe des Brunnens. Die Terrainoberfläche ist gleichgültig und daher in der Abbildung weggelassen. CD sei die Oberfläche der undurchlässigen Schicht, die den Grundwasserstrom nach unten hin begrenzt. Die Oberfläche CD möge eine horizontale Ebene bilden. JK sei die Axe und LM, NO seien die Seitenwände des im Grundrisse kreisförmigen Brunnenschachtes. EF sei der Wasserspiegel im Brunnen, der sich im Beharrungszustande einstellt, wenn die Wassermenge Q in der Zeiteinheit entnommen wird. FH und EG sind Theile des gesenkten Grundwasserspiegels im Beharrungszustande.

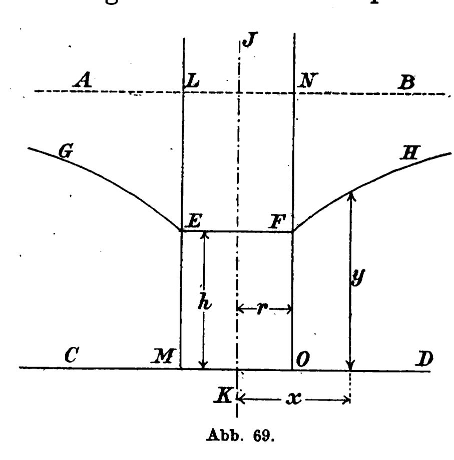


Abb. 69.

Da wir überall gleiche Bodenbeschaffenheit voraussetzen, bildet der gesenkte Grundwasserspiegel eine Rotationsfläche, deren Axe JK ist. Die Geschwindigkeit v der Grundwasserströmung im Abstande x von der Axe kann nach unserer Annahme

$$v = k \frac{dy}{dx} \tag{286}$$

gesetzt werden, wenn k einen von der Bodenbeschaffenheit abhängigen Coefficienten bedeutet, der im einzelnen Falle aus besonderen Versuchen zu ermitteln ist. Die Geschwindigkeit v ist übrigens in allen auf derselben Lothrechten liegenden Punkten als gleich gross anzusehen. Für die Wassermenge Q, die von aussen her durch den Cylindermantel vom Halbmesser x strömt, hat man daher

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi kxy \frac{dy}{dx}.$$

Der Continuitätsbedingung wegen muss durch jeden Cylindermantel von einem beliebigen Halbmesser x, der zwischen r und ∞ liegt, dieselbe Menge strömen. In der vorausgehenden Gleichung ist daher Q eine Constante. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q} y dy,$$

so kann sie ohne Weiteres integrirt werden und liefert

$$\lg x = C + \frac{\pi k}{Q} y^2. \tag{287}$$

Für $x = r$ wird $y = h$, d. h. gleich der Höhe des Wasserspiegels im Brunnen über der undurchlässigen Schicht. Daraus folgt für die Integrationsconstante C

$$C = \lg r - \frac{\pi k}{Q} h^2.$$

Setzt man das ein und löst nach Q auf, so erhält man

$$Q = \pi k \cdot \frac{y^2 - h^2}{\lg \frac{x}{r}}. \tag{288}$$

In einem Abstande R vom Brunnenschachte sei ein Bohrloch niedergetrieben, in dem man die Höhe H des Grundwasser-

spiegels beobachtet. Das gesammte Gefäll $H - h$ vom Bohrloche bis zum Brunnen sei ferner noch zur Abkürzung mit s bezeichnet. Dann liefert die vorige Gleichung mit $x = R$ und $y = H$

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h^2}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{\pi k}{\lg \frac{R}{r}} s(2H - s). \tag{289}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man den Zusammenhang zwischen dem Gefälle s und der Ergiebigkeit des Brunnens. Wenn die undurchlässige Schicht CD sehr tief liegt, H also sehr gross gegen s ist, wächst die Ergiebigkeit des Brunnens zunächst proportional mit der Spiegelsenkung.

Es möge schliesslich noch darauf hingewiesen werden, dass man zu ungereimten Resultaten käme, wenn man die Spiegelcurve FH auf Grund der vorausgehenden Gleichungen bis ins Unendliche verfolgen wollte. Das ist auch ganz selbstverständlich. Nach unserem Ansatze wurde nirgends ein Zufluss zum Grundwasser vorausgesetzt, vielmehr angenommen, dass der Grundwasserspiegel vor Betrieb des Brunnens überall horizontal und das Grundwasser ohne eigene Bewegung gewesen sei. Wenn dies so wäre, könnte aber nach Betrieb des Brunnens ein Beharrungszustand überhaupt nicht eintreten, da die fortgeschaffte Wassermenge durch stets weiter fortschreitende und sich schliesslich bis auf die grössten Entfernungen hin merklich machende Spiegelsenkungen ausgeglichen werden müsste. In Wirklichkeit wird vielmehr in grösserer Entfernung vom Bohrloche durch den Zusammenhang mit anderen Gewässern eine Speisung des Grundwassers stattfinden, die den Abgang ohne merkliche fernere Spiegelsenkung stets wieder ersetzt. Das Bohrloch, von dem vorher die Rede war, sollte demnach nur eine Stelle bezeichnen, bis zu der hin die Gültigkeit der gemachten Voraussetzungen noch genau genug angenommen werden kann.

Als bemerkenswerthes Beispiel für den Nutzen, der aus Rechnungen solcher Art gezogen werden kann, darf ein Vortrag des Herrn A. Thiem bezeichnet werden, der kürzlich in

„Schillings Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung“, 1898, erschienen ist. Ich kann mir es nicht versagen, aus der Abhandlung dieses hervorragenden Ingenieurs, der auf dem Gebiete der Wasserversorgung auf praktische Leistungen und auf Erfahrungen zurückblicken kann, wie kaum ein Anderer, hier einen Satz anzuführen, der mir so recht geeignet erscheint, dieses Buch abzuschliessen.

Nach der Beschreibung einer Wasserfassung, die er bei Essen a. d. Ruhr ausführte, sagt Thiem:

„Es möge dieser Vorgang als Beispiel dafür dienen, dass der Theoretiker mit Hülfe eines zuverlässigen Gesetzes und der daraus gewonnenen Ableitungen auch auf dem Gebiete der Hydrologie mit Sicherheit und sehenden Auges Wege beschreiten kann, die der blosse Praktiker nur mit verbundenen Augen tastend zurücklegt, wenn ihm dies überhaupt gelingt.“

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Dynamik des materiellen Punktes.

Seite

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{P}\mathfrak{r} = \frac{d}{dt}\mathrm{V}\,m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} \qquad (2)\quad 7$$

allgemeinste Aussage des Flächensatzes für den materiellen Punkt; m = Masse, $\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeit, $\mathfrak{P}$ = äussere Kraft an m, $\mathfrak{r}$ der von einem festen aber beliebig gewählten Momentenpunkt gezogene Radiusvektor oder Hebelarm, $\mathrm{V}\,\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ das statische Moment von $\mathfrak{P}$, $m\mathfrak{v}$ die Bewegungsgrösse des des Punktes, $\mathrm{V}\,m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}$ deren statisches Moment oder der Drall.

$$Yz - Zy = \frac{d}{dt}(mv_2 z - mv_3 y), \qquad (3)\quad 9$$

Flächensatz für die X-Axe als Momentenaxe; XYZ die Componenten von $\mathfrak{P}$; xyz die von $\mathfrak{r}$.

$$\mathrm{V}\,m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{C}, \qquad (6)\quad 11$$

Flächensatz für den Fall, dass das Moment von $\mathfrak{P}$ verschwindet, $\mathfrak{C}$ ein constanter Vektor.

$$\int \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s} = 0, \qquad (8)\quad 16$$

Bedingung dafür, dass ein Kraftfeld wirbelfrei ist; die Integration ist über eine geschlossene Curve zu erstrecken.

$$V_A = V_O - \int_O^A \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s}, \qquad (10)\quad 20$$

Definititions-Gleichung für das Potential V_A im Punkte A; O Anfangspunkt, V_O bleibt willkürlich.

Seite

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad P_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (12) \; 22$$

$$\mathfrak{P} = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad (13) \; 22$$

$$\mathfrak{P} = -\nabla V, \qquad (14) \; 23$$

Ableitung der Kraft des Feldes aus dem Potentiale V.

$$V_2 + L_2 = V_1 + L_1, \qquad (15) \; 27$$

die Summe aus der potentiellen Energie V und der kinetischen Energie L bleibt während der Bewegung im Kraftfelde constant.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \qquad (16) \; 30$$

Differentialgleichung der gradlinigen harmonischen Schwingung, c ein die Intensität des Feldes beschreibender Proportionalitätsfaktor.

$$x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t, \qquad (17) \; 31$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (18) \; 31$$

Lösung der Gleichung (16), A und B Integrationsconstanten, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \qquad (20) \; 32$$

Formel für die Schwingungsdauer der harmonischen Schwingung.

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0\sqrt{\frac{m}{c}}\cdot\sin t\sqrt{\frac{c}{m}} + \mathfrak{a}\cos t\sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (21) \; 34$$

$\mathfrak{r}$ der Radiusvektor bei der elliptischen harmonischen Schwingung zur Zeit t, $\mathfrak{v}_0$ Anfangsgeschwindigkeit, $\mathfrak{a}$ Anfangswert von $\mathfrak{r}$.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - k\frac{dx}{dt}, \qquad (22) \; 37$$

Differentialgleichung für die gedämpfte gradlinige Schwingung, k der Dämpfungsfaktor.

Seite

$$x = Ae^{-\frac{k}{2m}t} \cdot e^{\gamma t} + Be^{-\frac{k}{2m}t} e^{-\gamma t}, \qquad (23) \; 38$$

allgemeinste Lösung der Differentialgleichung, A und B Integrationsconstanten, γ zur Abkürzung für den constanten Werth

$$\gamma = \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}.$$

$$x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{-\frac{k}{2m}t} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}), \qquad (24) \; 39$$

dieselbe Lösung nach Anpassung an die Grenzbedingungen.

$$x = \frac{v_0}{\gamma'} e^{-\frac{k}{2m}t} \sin \gamma' t, \qquad (25) \; 40$$

Umformung der vorigen Lösung für den Fall, dass $\gamma = i\gamma'$ imaginär ist, d. h. für den Fall der periodischen Bewegung.

$$T = \frac{2\pi}{\gamma'} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mc - k^2}}, \qquad (26) \; 41$$

Formel für die Schwingungsdauer der gedämpften harmonischen Schwingung.

$$\lg a_n - \lg a_{n+1} = \frac{\pi k}{\sqrt{4mc - k^2}} = \frac{kT}{4m}, \qquad (30) \; 48$$

Formel für das logarithmische Decrement zweier aufeinander folgenden Ausschläge a_n und a_{n+1}.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx + k\frac{dx}{dt} = P \sin \eta t, \qquad (31) \; 48$$

Differentialgleichung für die erzwungenen Schwingungen, P der grösste Betrag der die Schwingungen anregenden periodisch veränderlichen Kraft, η ein Faktor, der von deren Periode abhängt.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{m\eta^2 - c}, \qquad (33) \; 49$$

φ Phasenverschiebungswinkel.

$$C = \frac{P}{\cos \varphi (c - m\eta^2) - k\eta \sin \varphi}, \qquad (34) \; 49$$

C die Amplitude der erzwungenen Schwingungen im Beharrungszustande.

Seite

$$x = \frac{P}{m(\alpha^2 - \eta^2)} \left\{ \sin \eta t - \frac{\eta}{\alpha} \sin \alpha t \right\}$$ (39) 55

giebt den Schwingungsverlauf bald nach Beginn der Erregung unter der Voraussetzung an, dass die Dämpfung bis dahin vernachlässigt werden kann.

$$\mathfrak{P} = - \mathfrak{r} f(r),$$ (40) 57

$\mathfrak{P}$ als Centralkraft dargestellt; die zunächst unbekannte Function der Entfernung $f(r)$ ist auf Grund der Kepler'schen Gesetze zu ermitteln.

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r} = ar - b^2,$$ (41) 59

Ellipsengleichung, $\mathfrak{r}$ Radiusvektor vom Brennpunkt, $\mathfrak{e}$ Excentricität, a und b Halbaxen der Ellipse.

$$\mathfrak{P} = - \frac{\mathfrak{r}}{r^3} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$ (45) 62

folgt aus den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen; der letzte Faktor stellt nach dem dritten Kepler'schen Gesetze die Sonnenmasse dar, T ist die Umlaufszeit des Planeten.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$ (48) 73

Näherungsformel für die volle Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge l.

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \, F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$ (56) 78

genaue Formel für das einfache Pendel, α Schwingungsamplitude, F das Functionszeichen für das elliptische Integral erster Gattung.

(Eine abgekürzte Tabelle für die Werthe von F findet sich auf S. 77.)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$ (57) 80

genauere Näherungsformel für das einfache Pendel.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}},$$ (60) 82

T Dauer der Schwingungen auf der Cycloide.

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des starren Körpers und des Punkthaufens.

Seite

$$\mathfrak{H} = - m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}$$ (69) **107**

$\mathfrak{H}$ Trägheitskraft, die an jedem materiellen Punkte anzubringen ist, um ein Gleichgewichtssystem von Kräften herzustellen (d'Alembert).

$$\Sigma\left(\mathfrak{P} - m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}\right) \delta\mathfrak{s} = 0,$$ (71) **110**

Aussage des d'Alembert'schen Princips in Verbindung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, $\delta\mathfrak{s}$ virtuelle Verschiebungen.

$$-\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Qs \sin\varphi,$$ (74) **115**

Differentialgleichung für die Schwingungen des physischen Pendels, Θ Trägheitsmoment für die Schwingungsaxe, φ Ausschlag, Q Gewicht, s Schwerpunktsabstand von der Schwingungsaxe.

$$l = \frac{g\Theta}{Qs},$$ (76) **116**

l reducirte Pendellänge.

$$\frac{d}{dt} \Sigma V m\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r},$$ (82) und (82a) **113**

Aussage des Flächensatzes für den Punkthaufen; gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt.

$$\Sigma Mr \cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma Mr \sin\alpha = 0,$$ (83) **138**

$$\Sigma Mra \cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma Mra \sin\alpha = 0,$$ (84) **140**

Bedingungsgleichungen für den Schlick'schen Massenausgleich bei Schiffsmaschinen, M die hin- und hergehenden Massen, r die Kurbelhalbmesser, α die Winkel zwischen den folgenden Kurbeln und der ersten und a die Abstände der Kurbelmechanismen von dem ersten.

Seite

$$\mathfrak{B} = \Sigma m \mathrm{V} \mathfrak{r} \cdot \mathrm{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r}, \quad (85) \quad 146$$

$\mathfrak{B}$ der Drall eines um den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ rotirenden starren Körpers.

$$\Sigma m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u} \mathfrak{r} \parallel \mathfrak{u}, \quad (89) \quad 149$$

Bedingung für die freien Axen.

$$B' = u\Theta, \quad (90) \quad 151$$

B' Drall des rotirenden Körpers in Bezug auf die Drehaxe.

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}, \quad (91) \quad 155$$

Aussage des Flächensatzes für den starren Körper, an dem das Kräftepaar vom Momente $\mathfrak{K}$ angreift.

$$\Theta \frac{du}{dt} = K \quad (93) \quad 155$$

folgt aus dem Vorigen für den Fall, dass $\mathfrak{K}$ in die Richtung einer freien Axe fällt.

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} \frac{\int K_1 \, dt}{\Theta_1} + \mathfrak{j} \frac{\int K_2 \, dt}{\Theta_2} + \mathfrak{k} \frac{\int K_3 \, dt}{\Theta_3}, \quad (96) \quad 162$$

$\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit, die durch einen Drehstoss hervorgebracht wird, dessen Impulscomponenten in den Richtungen der Hauptträgheitsaxen gleich $\int K_1 dt$ u. s. f. sind, während die Θ die zugehörigen Hauptträgheitsmomente sind.

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} \frac{B_1}{\Theta_1} + \mathfrak{j} \frac{B_2}{\Theta_2} + \mathfrak{k} \frac{B_3}{\Theta_3} \quad (97) \quad 162$$

folgt aus dem Vorigen; die B sind die Componenten von $\mathfrak{B}$ nach den 3 Hauptaxen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 u_3 \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{du_2}{dt} &= u_3 u_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2} \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \end{aligned}\right\} \quad (101) \quad 173$$

Gleichungen von Euler; gelten für einen freien starren

Seite

Körper und geben die Veränderlichkeit von $\mathfrak{u}$ mit der Zeit relativ zum Körper selbst an.

$$u_2 = A \sin \gamma u_1 t + B \cos \gamma u_1 t, \qquad (105)\ 175$$

Lösung der Eulerschen Gleichungen für den Fall $\Theta_2 = \Theta_3$; A und B Integrationsconstanten, γ zur Abkürzung eingeführt für

$$\gamma = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_2}.$$

$$T = \frac{2\pi\Theta_2}{u_1(\Theta_1 - \Theta_2)}, \qquad (106)\ 175$$

T Umlaufszeit der Nutationsbewegung.

$$\Theta \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathrm{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{s}, \qquad (110)\ 182$$

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = -\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{s}. \qquad (111)\ 182$$

Beide Gleichungen zusammen bestimmen die Bewegung eines schweren Kugelkreisels, $\mathfrak{Q}$ Gewicht (als gerichtete Grösse aufgefasst), $\mathfrak{s}$ Schwerpunktsabstand von der festen Spitze.

$$\mathfrak{s} = a\mathfrak{u} + \frac{a^2}{\Theta}\mathfrak{Q}, \qquad (117)\ 185$$

partikuläres Integral der vorhergehenden Gleichungen, das der regulären Präcessionsbewegung entspricht, a Integrationsconstante.

$$w = \frac{Qs}{\Theta u}, \qquad (121a)\ 188$$

w Winkelgeschwindigkeit der Präcession.

$$\Theta\mathfrak{u} = \Theta\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{R}t, \qquad (122)\ 190$$

Veränderung von $\mathfrak{u}_0$ in $\mathfrak{u}$ durch einen sehr kurz dauernden Drehstoss vom Impulse $\mathfrak{R}t$.

$$T = \frac{2\pi}{\chi} t = \frac{2\pi u \Theta}{Qs}, \qquad (123)\ 198$$

T Umlaufszeit bei der pseudoregulären Präcession.

Seite

$$K = u\Theta w, \qquad (125) \quad 202$$

K Drehmoment, das erforderlich ist, um einen mit u rotirenden Schwungring vom Trägheitsmomente Θ mit der Winkelgeschwindigkeit w (senkrecht zur Umlaufsaxe) zu drehen.

$$\begin{aligned}\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\left(\frac{A_1}{M} + r_2\,\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3} - r_3\,\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2}\right)\\ + \mathfrak{j}\left(\frac{A_2}{M} + r_3\,\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1} - r_1\,\frac{A_1 p_2 - A_2 p_1}{\Theta_3}\right)\\ + \mathfrak{k}\left(\frac{A_3}{M} + r_1\,\frac{A_3 p_1 - A_1 p_3}{\Theta_2} - r_2\,\frac{A_2 p_3 - A_3 p_2}{\Theta_1}\right), \qquad (125\text{d}) \quad 215\end{aligned}$$

$\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, die ein Punkt des starren Körpers vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ erlangt, wenn ein Stoss vom Antriebe $\mathfrak{A}$ auf einen Punkt vom Radiusvektor $\mathfrak{p}$ (vom Schwerpunkte aus gerechnet) ausgeübt wird.

$$\mathfrak{v}\mathfrak{J} = \mathfrak{v}'\mathfrak{A} \qquad (125\text{e}) \quad 216$$

spricht den Satz von der Gegenseitigkeit der Stossgeschwindigkeiten aus; $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ Geschwindigkeiten der Punkte $\mathfrak{r}$ bezw. $\mathfrak{p}$, wenn jedesmal am anderen Punkte der Stoss vom Antriebe $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{J}$ ausgeübt wird.

$$\text{Verl} = \frac{1}{2} m_1 (w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - w)^2, \qquad (125\text{g}) \quad 224$$

Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft beim Stosse starrer Körper; v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 vor dem Stosse, w Geschwindigkeit nach dem Stosse.

$$E\Theta\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\,\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad (126) \quad 235$$

Differentialgleichung für die Schwingungen eines Stabes mit gleichförmig vertheilter Masse, μ Masse für die Längeneinheit, y Durchsenkung an der Stelle x zur Zeit t, E Elasticitätsmodul, Θ Trägheitsmoment des Querschnitts.

$$y = A \sin\frac{\pi x}{l} \sin t\,\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\Theta}{\mu}}. \qquad (129) \quad 236$$

Lösung der vorigen Gleichung für den Fall der Grundschwingungen, l die Länge des Stabs.

Seite

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{E\Theta}}, \qquad (130) \quad 236$$

T Dauer einer vollen Grundschwingung.

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{c}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + x + e\cos ut = 0 \\ \frac{m}{c}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + y + e\sin ut = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (131) \quad 249$$

Differentialgleichungen für die Schwerpunktsschwingungen eines auf einer schwanken Welle aufgekeilten Rades (Laval'sche Turbinenwelle), xy Schwerpunktscoordinaten, e Excentricität, c ein von der Biegungselasticität der Welle abhängiger Proportionalitätsfaktor.

$$\left.\begin{aligned} x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t + e\frac{\alpha^2}{u^2-\alpha^2}\cos ut \\ y = C\sin\alpha t + D\cos\alpha t + e\frac{\alpha^2}{u^2-\alpha^2}\sin ut \end{aligned}\right\}, \qquad (132) \quad 249$$

Lösung der Gleichungen, A, B, C, D Integrationsconstanten, α die Constante

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (133) \quad 250$$

$$u_k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad (135) \quad 252$$

u_k die kritische Geschwindigkeit.

$$N_k = 300\sqrt{\frac{P}{Q}}, \qquad (137) \quad 255$$

N_k die kritische Tourenzahl (auf die Minute bezogen), Q das Gewicht des Rades, P die Kraft, die erforderlich ist, um die Welle um 1 cm durchzubiegen.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2b}{dt^2} - 2u\frac{da}{dt} - u^2b + \frac{g}{l}b + \frac{cg}{Q}b = 0 \\ \frac{d^2a}{dt^2} + 2u\frac{db}{dt} - u^2a + \frac{g}{l}a = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (142) \quad 262$$

Differentialgleichungen für die Schwingungsausschläge einer schnell umlaufenden Hängespindel, l Länge der Spindel, Q das an ihr aufgehängte Gewicht.

Seite

$$u_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (149)\ 264$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{cg}{Q}}, \qquad (150)\ 264$$

u_1 und u_2 die Winkelgeschwindigkeiten, zwischen denen die Schwingungen der Hängespindel zu grossen Ausschlägen führen, während sie unter u_1 und über u_2 klein bleiben.

Dritter Abschnitt.

Die Relativbewegung.

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} \qquad (160)\ 296$$

Satz von Coriolis; $\mathfrak{s}$ der Radiusvektor des beweglichen Punktes von einem festen Anfangspunkte im absoluten Raume, $\mathfrak{p}$ der Radiusvektor nach dem Punkte des Fahrzeugs, mit dem der bewegliche Punkt grade zusammenfällt, vom gleichen Anfangspunkte aus gerechnet, $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor des beweglichen Punktes von einem Anfangspunkte, der mit dem Fahrzeuge fest verbunden ist, und $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \qquad (161)\ 296$$

Zusammenrechnung zwischen absoluter Geschwindigkeit, Fahrzeuggeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit.

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{H} - 2mV\mathfrak{v}\mathfrak{u}, \qquad (165)\ 301$$

$\mathfrak{H}$ die „erste Zusatzkraft“ der Relativbewegung, das folgende Glied giebt die „zweite Zusatzkraft“ an; darin ist $\mathfrak{v}$ die Relativgeschwindigkeit des bewegten Punktes gegen das Fahrzeug.

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{G} + \mathfrak{P}_1 - 2mV\mathfrak{v}\mathfrak{u}, \qquad (166)\ 302$$

gilt für die Bewegung eines materiellen Punktes relativ zur

Seite

Erde, $\mathfrak{G}$ das Gewicht des Punktes, $\mathfrak{P}_1$ die Resultirende der übrigen an ihm angreifenden Kräfte, $\mathfrak{u}$ Winkelgeschwindigkeit der Erde.

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{g} - 2\,\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{u}, \qquad (167)\ \mathbf{303}$$

Differentialgleichung für die Fallbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung, $\mathfrak{g}$ Beschleunigung der Schwere, als gerichtete Grösse aufgefasst.

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g}\,\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\,\mathrm{V}\mathfrak{g}\mathfrak{u}, \qquad (168)\ \mathbf{303}$$

näherungsweise gültiges Integral der vorigen Gleichung.

Vierter Abschnitt.

Dynamik zusammengesetzter Systeme.

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{r}_0\, q_1\, q_2 \cdots q_n), \qquad (169)\ \mathbf{312}$$

$\mathfrak{r}$ Radiusvektor eines Massenpunktes, der zu einem System von n Freiheitsgraden gehört, $\mathfrak{r}_0$ Werth von $\mathfrak{r}$ in der Normallage, q die allgemeinen Coordinaten des Systems.

$$L = \frac{1}{2}\,\Sigma m \left\{\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 + \cdots \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\,\dot{q}_n\right\}^2, \qquad (171)\ \mathbf{313}$$

L die lebendige Kraft des Systems.

$$F_i = \Sigma m\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}, \qquad (172)\ \mathbf{314}$$

F_i die auf die Coordinate q_i reducirte äussere Kraft.

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (174)\ \mathbf{315}$$

Gleichung von Lagrange, gilt für jeden Freiheitsgrad und folgt aus der vorigen Gleichung.

$$\frac{\Theta + \frac{Q_1}{g}\,l^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Qs + Q_1 l} = \frac{\Theta_1 + \frac{Q_1}{g}\,s_1{}^2 + \frac{Q_1}{g}\,l s_1}{Q_1 s_1}, \qquad (177)\ \mathbf{324}$$

Bedingung dafür, dass der Klöppel nicht an die Glocke schlägt, Bedeutung der Buchstaben aus Abb. 56, S. 318.

Seite

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u^2 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad (178)\ \mathbf{330}$$

Differentialgleichung für die Pendelschwingungen relativ zu einem mit der Winkelgeschwindigkeit u rotirenden Raume (unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen nur nach der einen Seite der Lothrechten hin erfolgen).

$$T = \frac{2\pi u l}{\sqrt{u^4 l^2 - g^2}}, \qquad (187)\ \mathbf{334}$$

T Schwingungsdauer für kleine Schwingungen im vorhergehenden Falle.

$$\left.\begin{aligned} F(\varphi) - F(\varphi_0) &= \Theta \frac{d^2\psi}{dt^2} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= n^2 \sin\varphi\left(\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cos\varphi - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0^2 \cos\varphi_0\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (190)\ \mathbf{339}$$

Bewegungsgleichungen für die Schwingungen eines Regulators (Gültigkeit an besondere Voraussetzungen gebunden).

$$\eta = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + Ce^{\alpha_3 t}, \qquad (193)\ \mathbf{341}$$

η Abweichung der Winkelgeschwindigkeit der Maschine von der normalen, A, B, C Integrationsconstanten, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die drei Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\alpha^3 = ab - c\alpha;$$

a, b, c sind Constanten, die von der Einrichtung der Maschine abhängen.

$$\frac{\partial(L-V)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \qquad (195)\ \mathbf{343}$$

Gleichung von Lagrange für den Fall, dass sich die äusseren Kräfte von einem Potentiale V ableiten lassen.

$$\delta \int_0^{t_1} (L - V)\, dt = 0 \qquad (196)\ \mathbf{344}$$

spricht das Princip von Hamilton aus; δ bedeutet die Aenderung, die der Werth des Integrals erfährt, wenn man

Seite

sich die Bewegung während der Zeit von 0 bis t_1 in willkürlicher Weise unendlich wenig verändert denkt.

$$\pi = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}, \qquad (198) \quad 354$$

Hauptbedingung für die dynamische Aehnlichkeit zwischen einer Maschine und ihrem Modell, π das Verhältniss der Kräfte, μ das Verhältniss der Massen, λ Verhältniss der Längen und τ Verhältniss der Zeiten.

Fünfter Abschnitt.

Hydrodynamik.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \qquad (206) \quad 368$$

Continuitätsbedingung für die unzusammendrückbare Flüssigkeit, $v_1 v_2 v_3$ Geschwindigkeitscomponenten nach den Axenrichtungen.

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla) \cdot \mathfrak{v} \qquad (209) \quad 371$$

zeigt, wie sich die Beschleunigung aus der Veränderung am gleichen Orte und aus der durch die Verschiebung selbst bedingten Aenderung von $\mathfrak{v}$ zusammensetzt.

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) & \\ = X - \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(V+p) & \\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) & \\ = Y - \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(V+p) & \\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) & \\ = Z - \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(V+p) & \end{aligned}\right\}, \qquad (213) \quad 378$$

Gleichungen von Euler, μ specifische Masse, p Druck,

Seite

XYZ Componenten der äusseren Kraft, die zum Potentiale V gehört.

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}\right)=\mathfrak{P}-\nabla p=-\nabla(V+p), \qquad (214)\ \mathbf{374}$$

abgekürzte Wiedergabe der Euler'schen Gleichungen.

$$\int_0^0 \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}=0, \qquad (215)\ \mathbf{375}$$

Bedingung für die wirbelfreie Bewegung; das Integral erstreckt sich auf eine beliebige geschlossene Curve.

$$v_1=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad v_2=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad v_3=\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad (216)\ \mathbf{378}$$

Φ Geschwindigkeitspotential, nur für wirbelfreie Bewegung verwendbar.

$$\mathfrak{w}=\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right), \qquad (217)\ \mathbf{379}$$

$\mathfrak{w}$ der Wirbelvektor.

$$\mathfrak{w}=\operatorname{curl}\mathfrak{v} \qquad (219)\ \mathbf{380}$$

abgekürzte Wiedergabe der vorigen Gleichung.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (220)\ \mathbf{381}$$

Continuitätsbedingung für die wirbelfreie Bewegung.

$$\frac{1}{2}\mu\mathfrak{v}^2+V+p=C, \qquad (225)\ \mathbf{383}$$

allgemeines Integral der Euler'schen Gleichungen für die stationäre wirbelfreie Bewegung, C eine Constante, die sowohl von der Zeit als vom Orte unabhängig ist.

$$\Phi=az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3}+1\right), \qquad (226)\ \mathbf{388}$$

Geschwindigkeitspotential für die Strömung um eine Kugel, ϱ der Kugelhalbmesser, r die Entfernung vom Kugelmittelpunkt, a Geschwindigkeit der Strömung in grosser Entfernung von der Kugel (parallel zur Z-Axe).

Seite

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\mu(a^2 - \mathfrak{v}^2), \qquad (230) \ 390$$

p Flüssigkeitsdruck an irgend einer Stelle mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, p_0 Druck in grosser Entfernung von der Kugel.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \qquad (234) \ 400$$

Continuitätsbedingung für die ebene wirbelfreie Flüssigkeitsbewegung.

$$\left.\begin{array}{l} z = x + yi \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y \end{array}\right\}, \qquad (235) \ 403$$

Zusammenhang zwischen der complexen Zahl z und dem zugehörigen Vektor $\mathfrak{z}$.

$$w = F(z) = \Phi + i\Psi, \qquad (236) \ 404$$

Ψ Stromfunction, w irgend eine Function der complexen Variabeln z.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad (237) \ 404$$

Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitspotential und Stromfunction.

$$w = a\left(z + \frac{\varrho^2}{z}\right), \qquad (240) \ 407$$

Beispiel, das der Strömung um einen Cylinder vom Halbmesser ϱ entspricht.

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1} \qquad (241) \ 414$$

entspricht der Bewegung in einem Flüssigkeitsstrahle, der aus einer Oeffnung in dünner Wand austritt.

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{1}{C - x}\right)^2 - 1}, \qquad (247) \ 420$$

Differentialgleichung für die freie Grenzlinie des Flüssigkeitsstrahls, die Constante C wird später gleich $-\frac{\pi}{2}$ gefunden.

Seite

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0, \qquad (248) \; 425$$

$w_1 w_2 w_3$ Wirbelcomponenten.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{dw_2}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{dw_3}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \qquad (252) \; 429$$

Gleichungen für den zeitlichen Verlauf der Wirbel.

$$\lg \frac{h}{2r} = \frac{2\pi}{\lambda} y \quad \text{oder} \quad r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y}, \qquad (258) \; 441$$

h Höhe einer Wasserwelle (Oberflächenwelle), r Halbmesser des Kreises, den ein in der Tiefe y gelegener Punkt beschreibt, λ Wellenlänge.

$$\varpi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \qquad (266) \; 445$$

Gleichung für die Fortschreitungsgeschwindigkeit ϖ der Wellen von der Länge λ (im tiefen Wasser).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad (267\text{c}) \; 451$$

$$h \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad (267\text{d}) \; 452$$

Differentialgleichungen für die Fortpflanzung der Gezeitenwellen; v_1 Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Fortpflanzungsrichtung, η Erhebung des Wasserspiegels über den normalen Stand in Folge der Schwingung, wird als klein betrachtet gegenüber der Tiefe h des Gewässers, g Beschleunigung der Schwere;

$$v_1 = F_1(x + ct) + F_2(x - ct), \qquad (267\text{f}) \; 453$$

allgemeine Lösung der Gleichungen, F_1 und F_2 zwei beliebige Functionsformen, die zwei in entgegengesetzter Richtung fortschreitenden Wellen von beliebiger Gestalt entsprechen, c Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen.

Seite

$$c = \sqrt{gh} \qquad (267\,g) \quad 453$$

giebt die Fortschreitungsgeschwindigkeit an.

$$v = \frac{c}{4k}(r^2 - x^2), \qquad (270) \quad 458$$

v Geschwindigkeit der Wasserströmung in einem engen Rohre vom Halbmesser r im Abstande x von der Mitte, c die Druckabnahme auf die Längeneinheit des Rohrs und k der Zähigkeitscoefficient.

$$v_m = \frac{cr^2}{8k}; \qquad c = \frac{8kv_m}{r^2}, \qquad (272 \text{ u. } 273) \quad 459$$

v_m die durchschnittliche Geschwindigkeit der Wasserströmung im engen Rohre.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = k\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (275) \quad 465$$

üblicher Ansatz für die zähen Flüssigkeiten, τ_{xy} u. s. f. die Componenten der inneren Reibungen.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = -p + 2k\frac{\partial v_1}{\partial x}; \quad \sigma_y = -p + 2k\frac{\partial v_2}{\partial y}; \\ \sigma_z = -p + 2k\frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (276) \quad 467$$

dient zur Ergänzung der vorigen Gleichungen, p der Mittelwerth des normalen Flüssigkeitsdruckes.

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + k\nabla^2 v_1 \\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + k\nabla^2 v_2 \\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + k\nabla^2 v_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (277) \quad 469$$

Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten, die mit $k = 0$ wieder in die Euler'schen Gleichungen übergehen.

Seite

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}\right) = -\nabla p + k\nabla^2 \mathfrak{v}, \qquad (278)\ 469$$

abgekürzte Wiedergabe der vorigen Gleichungen.

$$k\nabla^2 v_1 = \frac{\partial p}{\partial x};\quad k\nabla^2 v_2 = \frac{\partial p}{\partial y};\quad k\nabla^2 v_3 = \frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (280)\ 469$$

vereinfachte Form der Bewegungsgleichungen für stationäre Strömungen, die mit sehr geringer Geschwindigkeit erfolgen.

$$P = 6\pi a k \varrho, \qquad (285)\ 472$$

P der Widerstand, den eine Kugel vom Halbmesser ϱ bei gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit a in einer Flüssigkeit vom Zähigkeitscoefficienten k findet.

$$\text{Verl} = \frac{M(v_0 - v_1)^2}{2g} \qquad (285\text{c})\ 477$$

willkürliche Annahme für den Verlust Verl an mechanischer Energie bei Wasserströmungen, die mit einem schnellen Geschwindigkeitswechsel von v_0 auf v_1 verbunden sind, z. B. beim Strömen aus einem engeren Rohre in ein weiteres ohne allmählichen Uebergang. Sogenannter Satz von Carnot, in der technischen Hydraulik vielfach zu Grunde gelegt.

$$p' = p_0 + \gamma h + \frac{\gamma}{g} v_1 (v_0 - v_1) \qquad (285\text{d})\ 477$$

Formel zur Berechnung des Druckverlusts beim plötzlichen Uebergang aus einem engeren Rohre in ein weiteres unter Voraussetzung der Gültigkeit des Carnot'schen Satzes; p' Druck im weiteren, p_0 im engeren Rohre, v_1 und v_0 Geschwindigkeiten in beiden Rohren, h Höhenunterschied der beiden ins Auge gefassten Stellen, γ Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit.

$$v = k\frac{dy}{dx}, \qquad (286)\ 485$$

Ansatz für die Geschwindigkeit v der Grundwasserströmung beim Gefäll $\frac{dy}{dx}$; k eine von der Bodenbeschaffenheit abhängige Constante (nicht zu verwechseln mit dem vorher ebenso bezeichneten Zähigkeitscoefficienten).

Seite

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h^2}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{\pi k}{\lg \frac{R}{r}} s(2H - s), \qquad (289)$$ 486

Q Ergiebigkeit eines Brunnens vom Halbmesser r bei der Wasserspiegelhöhe h im Brunnen; H die Wasserspiegelhöhe in der Entfernung R vom Brunnen, $s = H - h$ das Gefäll von da bis zum Brunnen.

Kohlrausch, Dr. F., Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, und Dr. L. **Holborn**, Mitglied der physikalisch-technischen Reichsanstalt, das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der Lösungen. Methoden, Resultate und chemische Anwendungen. Mit in den Text gedruckten Figuren und 1 Tafel. [XVI u. 211 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Kröhnke, G. H. A., Königlich Preufsischer Regierungs- und Baurat in Frankfurt a. O., Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs sorgfältigste berechnet. Dreizehnte Auflage. Mit einer Figurentafel. [VIII u. 164 S.] 16. 1896. In Leinw. geb. n. ℳ 1.80.

Launhardt, Geheimer Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover, am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht der Wirkungen der Entwicklung der Naturwissenschaft und der Technik. Mit vielen Abbildungen. 1900. Geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. ℳ 1.25.

Richarz, Professor Dr., neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. Mit 94 Abbildungen im Text. 1900. Geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. ℳ 1.25.

Routh, Edward John, Sc. D., LL. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Professor Dr. Felix Klein zu Göttingen. gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Einzeln:
I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. [XII u. 472 S.] n. ℳ 10.—
II. (Schlufs-)Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. [X u. 544 S.] n. ℳ 14.—

Scheid, Professor Dr. K., die Metalle. Reich illustriert. 1900. Geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. ℳ 1.25.

Vater, Rich., Ingenieur, Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen. Mit zahlreichen Abbildungen. 1900. Geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. ℳ 1.25.

Wedding, Professor Dr. H., das Eisenhüttenwesen. Erläutert in acht Vorträgen. Mit 12 Figuren im Text. 1900. Geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. ℳ 1.25.

Wüllner, Dr. **Adolph**, Geheimer Regierungsrat und Professor der Experimentalphysik an der Königlichen Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 1092 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und 4 lithographierten Tafeln. gr. 8. 1895/99. geh. n. ℳ 56.—, in Hfzbd. ℳ 64.—

Einzeln: **Jeder Band ist einzeln käuflich.**

I. Band: Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] 1895. n. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—
II. Band: Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. n. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—
III. Band: Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. n. ℳ 18.—, in Hfzbd. ℳ 20.—
IV. Band: Die Lehre von der Strahlung. Mit 299 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und 4 lithogr. Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. n. ℳ 14.—, in Hfzbd. ℳ 16.—






HARVARD ENGINEERING SCHOOL